MICROWAVE ENGINEERING

Prof. Gentili G.G.
A.A. 2023/24

Burattini Michelangelo

Microwaves

MICROWAVE → 300 MHz ÷ 300 GHz (1m ÷ 1mm)

e sono usate nelle telecomunicazioni, nel sensing e nei radar

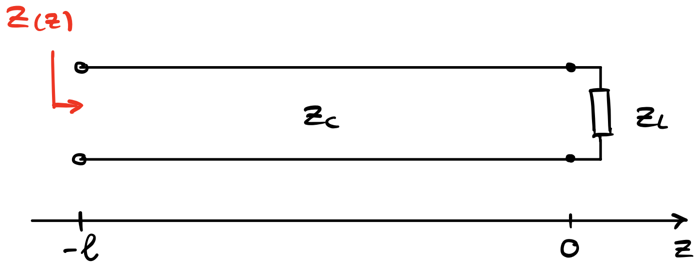
→ lo scopo del corso e' quello di analizzare e progettare dispositivi e circuiti passivi per le microonde

- circuiti di matching
- linee di trasmissione
- guide d'onda
- coupler e filtri

Prima di introdurre nuovi concetti facciamo una review di tutto quello visto in altri corsi e che viene dato per scontato

REVIEW

consideriamo la seguente linea di trasmissione:



e' una convenzione

ho che l' impedenza d' ingresso equivalente al punto z e':

$$\boxed{Z(z) = Z_c \frac{Z_L - Z_c \tanh(\gamma z)}{Z_c - Z_L \tanh(\gamma z)}}$$

ho che l' ammettenza d' ingresso equivalente al punto z e':

$$\boxed{Y(z) = Y_c \frac{Y_L - Y_c \tanh(\gamma z)}{Y_c - Y_L \tanh(\gamma z)}}$$

Definisco l' INTENSITA' D'ONDA INCIDENTE e l'INTENSITA' D'ONDA RIFLESSA come:

$$\begin{cases} a(z) = \dfrac{V_0^+}{\sqrt{Z_c}} e^{-\gamma z} & \text{incidente} \\ b(z) = \dfrac{V_0^-}{\sqrt{Z_c}} e^{\gamma z} & \text{riflessa} \end{cases}$$

e quindi anche il COEFFICIENTE DI RIFLESSIONE $\Gamma(z) = \dfrac{b(z)}{a(z)}$

→ al carico esso vale $\Gamma(0) = \Gamma_L = \dfrac{V_0^-}{V_0^+}$

→ posso scrivere che ⟶ $\boxed{\Gamma(z) = \Gamma_L e^{2\gamma z}}$

→ se conosco $\Gamma(z_0)$ allora conosco $\Gamma(z)$ $\forall z$

Alcune equazioni utili che si ricavano:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z(z) = Z_c \dfrac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)} \\ \Gamma_L = \dfrac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} = -\dfrac{Y_L - Y_c}{Y_L + Y_c} \end{array}}$$

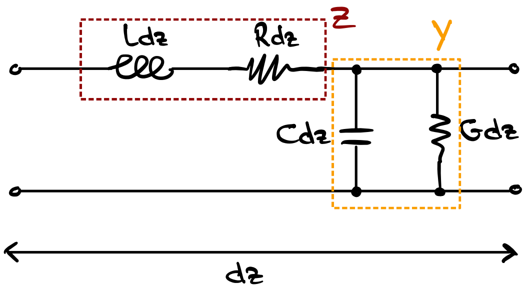
N.B.: • si considera solo la parte immaginaria della COSTANTE DI PROPAGAZIONE

$$\gamma = \underbrace{\alpha}_{\text{costante di attenuazione}} + j\overbrace{\beta}^{\text{costante di fase}}$$

$\gamma = \sqrt{ZY}$ della linea

$Z = R + j\omega L$ $\quad$ $Y = G + j\omega C$

Una linea può essere descritta tramite un modello a parametri distribuiti:



$\alpha = \alpha_c + \alpha_d$

$\alpha_c = \dfrac{R}{2Z_c}$ $\quad$ $\alpha_d = \dfrac{GZ_c}{2}$

$\boxed{Z_c = \sqrt{\dfrac{Z}{Y}} \quad \text{IMPEDENZA CARATTERISTICA}}$

e per tale linea e' possibile ricavarsi le **EQUAZIONI DEI TELEGRAFISTI**

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -ZI \\ \frac{dI}{dz} = -YV \end{cases}}$$

la cui soluzione e'

$$\begin{cases} V(z) = \underbrace{V_0^+ e^{-\overbrace{\sqrt{ZY}}^{\gamma}\cdot z}}_{\text{componente progressiva}} + \underbrace{V_0^- e^{\overbrace{\sqrt{ZY}}^{\gamma}\cdot z}}_{\text{componente regressiva}} \\ I(z) = V_0^+ \frac{\sqrt{ZY}}{Z} e^{-\sqrt{ZY}\cdot z} - V_0^- \frac{\sqrt{ZY}}{Z} e^{\sqrt{ZY}\cdot z} \end{cases}$$

le due costanti V_0^+ e V_0^- si trovano imponendo le condizioni di alimentazione e di carico

Se la linea e' a basse perdite ho che $\alpha \simeq 0 \wedge \beta \simeq \omega\sqrt{LC}$ (trascuro R e G).
Se la linea presenta delle basse perdite (low losses) allora ho che parte della potenza trasmessa dall'onda viene dissipata; in questo caso il modello e' il seguente

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \wedge \alpha = \alpha_c + \alpha_d$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\alpha_c = \frac{R}{2Z_c} \qquad \alpha_d = G\frac{Z_c}{2}$$

questo deriva da: $\gamma = \sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$ assumendo che per basse perdite $R \ll \omega L$ e $G \ll \omega C$

$\Rightarrow RG \ll \omega^2 LC$

$$\simeq j\omega\sqrt{LC}\sqrt{1-j\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)}$$

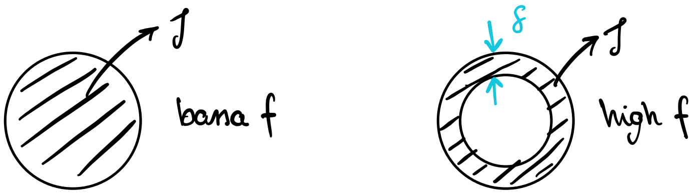
(Taylor) $$\simeq j\omega\sqrt{LC}\left[1-\frac{1}{2}j\left(\frac{R}{\omega L}+\frac{G}{\omega C}\right)\right]$$

da cui ricavo α e β:

$$\begin{cases} \alpha \simeq \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) \\ \beta \simeq \omega\sqrt{LC} \end{cases} \longrightarrow \quad \alpha \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{R}{Z_c} + GZ_c\right) = \alpha_c + \alpha_d$$

EFFETTO PELLE

Una linea e' caratterizzata ad alta frequenza dall' **EFFETTO PELLE**



$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$ **SKIN DEPTH**

→ per le microonde, solo una piccola parte del conduttore e' soggetto al transito della corrente e quindi e' necessario solo un sottile strato di esso per formare i componenti.

σ:
1) Argento $6{,}1 \cdot 10^7\ Sm^{-1}$ → @10GHz $\delta = 640$ nm
2) Rame $5{,}8 \cdot 10^7\ Sm^{-1}$ → @10GHz $\delta = 660$ nm
3) Oro $4{,}1 \cdot 10^7\ Sm^{-1}$ → @10GHz $\delta = 786$ nm

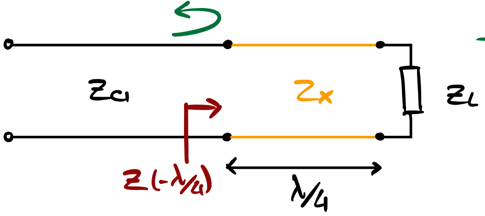
⇒ ho una resistenza che aumenta all' aumentare della frequenza

$$R_{tot} = \frac{2}{\sigma}\frac{dz}{2\pi a\delta} \Rightarrow R = \frac{1}{\sigma\delta}\frac{1}{\pi a}$$

⇒ la resistenza di superficie e' $\boxed{R_s = \frac{1}{\sigma\delta}}$ [Ω]

ADATTATORE A λ/4

Γ=0 così non ho riflessione e tutta la potenza passa al carico



→ devo imporre che $Z(-\lambda/4) \underset{*}{=} \frac{Z_x^2}{Z_L} = Z_{c1}$

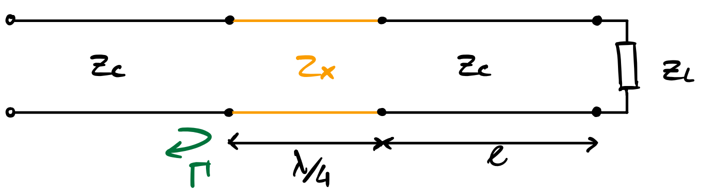
$$\Downarrow$$

$$Z_x = \sqrt{Z_{c1} Z_L}$$

→ e' un adattatore completo se e solo se:

- linea a monte priva di perdite $Z_{c1} = R_{c1}$
- carico puramente resistivo $Z_L = R_L$

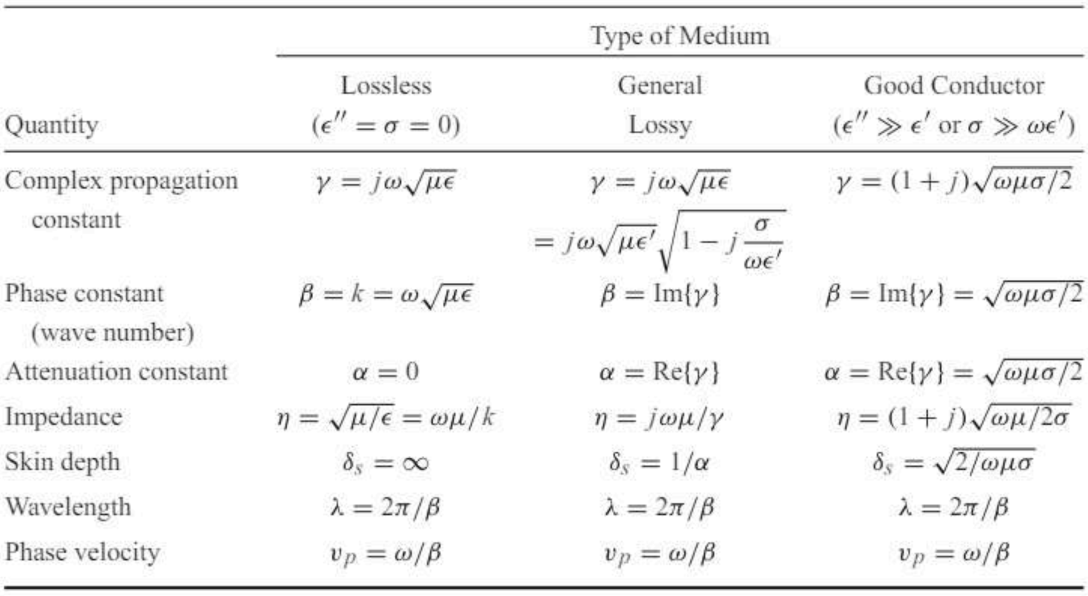
$$\left.\right\} \downarrow \quad R_x = \sqrt{R_{c1} R_L} \quad \forall R_c, R_L$$



$$\boxed{Z_x = \sqrt{Z_c \cdot Z_L}}$$

$$* \quad Z(-\lambda/4) = Z_x \frac{Z_L + jZ_x \tan\beta\ell}{Z_x + jZ_L \tan\beta\ell} \quad \wedge \quad \beta\ell = \frac{\pi}{2}$$

TABELLA RIASSUNTIVA

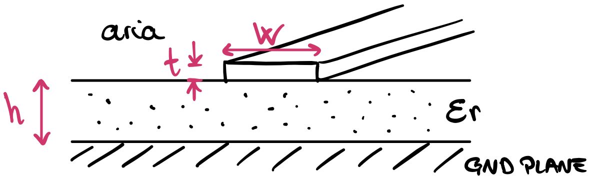


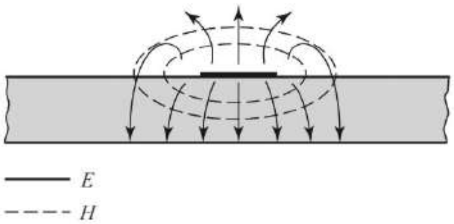
Quantity	Lossless ($\epsilon'' = \sigma = 0$)	General Lossy	Good Conductor ($\epsilon'' \gg \epsilon'$ or $\sigma \gg \omega\epsilon'$)
	Type of Medium		
Complex propagation constant	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$ $= j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\dfrac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$	$\gamma = (1+j)\sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Phase constant (wave number)	$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\}$	$\beta = \text{Im}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Attenuation constant	$\alpha = 0$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\}$	$\alpha = \text{Re}\{\gamma\} = \sqrt{\omega\mu\sigma/2}$
Impedance	$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon} = \omega\mu/k$	$\eta = j\omega\mu/\gamma$	$\eta = (1+j)\sqrt{\omega\mu/2\sigma}$
Skin depth	$\delta_s = \infty$	$\delta_s = 1/\alpha$	$\delta_s = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$
Wavelength	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$	$\lambda = 2\pi/\beta$
Phase velocity	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$	$v_p = \omega/\beta$

LINEE DI TRASMISSIONE

△ MICROSTRIP

e' una delle più popolari perche' molto versatile, facile da fabbricare e facilmente miniaturizzabile; di solito e' "accoppiata" ad un piano di massa





→ ho un mezzo che non e' omogeneo (aria + isolante) ⇒ quasi-TEM

$$\underset{\text{aria}}{k_0} < \beta < \underset{\text{substrato dielettrico}}{k_0\sqrt{\varepsilon_r}} \qquad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

Per una linea di trasmissione omogenea (non questa), vale sempre:

$$L_0 C_0 = \mu_0\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad L_0 = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{C_0}$$

→ in questo caso ho che $L = L_0$ (l'accoppiamento induttivo e' circa ideale), mentre $C \neq C_0$ e posso definire una PERMETTIVITA' DIELETTRICA RELATIVA EFFETTIVA

$$\boxed{\varepsilon_{r,eff} = \frac{C}{C_0}}$$

$$\begin{cases} k_0 < \beta < k_0\sqrt{\varepsilon_r} \\ \beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_{r,eff}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 < \varepsilon_{r,eff} < \varepsilon_r}$$

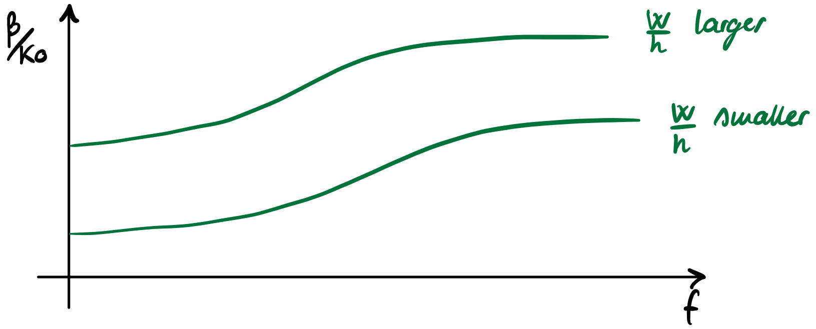
$\varepsilon_{r,eff}$ dipende dalle dimensioni della microstriscia:

$$\varepsilon_{r,eff} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_r+1}{2} + \frac{\varepsilon_r+1}{2}\left[\left(1+\frac{12h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0{,}04\left(1-\frac{W}{h}\right)^2\right] & \text{se } \frac{W}{h} \leq 1 \\ \frac{\varepsilon_r+1}{2} + \frac{\varepsilon_r+1}{2}\left(1+\frac{12h}{W}\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{se } \frac{W}{h} > 1 \end{cases}$$

e posso ricavare l'impedenza, ponendo $\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}}$

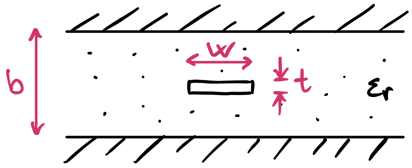
$$Z_c = \begin{cases} \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(8\frac{h}{W} + \frac{W}{4h}\right) & \text{se } \frac{W}{h} \leq 1 \\ \eta \left[\frac{W}{h} + 1{,}393 + 0{,}667 \ln\left(\frac{W}{h} + 1{,}444\right)\right]^{-1} & \text{se } \frac{W}{h} > 1 \end{cases}$$

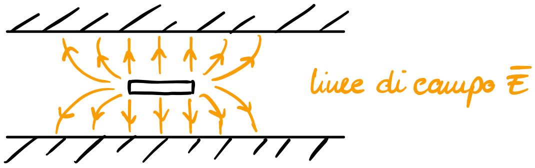
di solito ho che $20 < Z_c < 200$ $[\Omega]$ e l'andamento e' il seguente:



$\beta/k_0 = \varepsilon_{r,eff}(\omega)$ ↑ dispersione

Δ STRIPLINE





il mezzo in questo caso e' omogeneo ⇒ linea TEM e quindi posso ricavarmi:

$v_p = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$

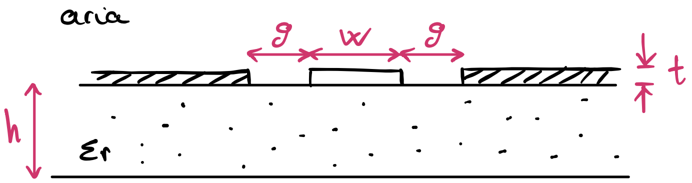
$\beta = \frac{\omega}{v_p} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r}$

$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{1}{v_p C}$ e ricavando L e C in funzione della geometria della linea posso scrivere che:

$$Z_c = \frac{30\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \frac{b}{W_e + 0{,}441\, b}$$

dove W_e e' la larghezza effettiva $W_e = W - \begin{cases} 0 & \text{se } W/b \geq 0{,}35 \\ \left(0{,}35 - \frac{W}{b}\right)^2 b & \text{se } W/b < 0{,}35 \end{cases}$

Δ COPLANAR WAVEGUIDE



→ i due conduttori di ground sono idealmente connessi

→ la linea non e' omogenea ⇒ linea quasi-TEM

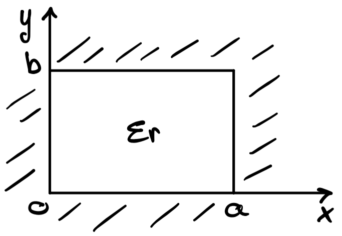
posso semplificare ponendo $t \to 0 \wedge h \to +\infty \Rightarrow \varepsilon_{r,eff} = \frac{1+\varepsilon_r}{2}$

$$Z_c = \frac{\pi \eta_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r,eff}}}\left[0{,}69 + 2\,\text{arctanh}\sqrt{\frac{w}{d}}\right]^{-1}$$

$d = w + 2g$ e' la distanza fra i due conduttori di ground

Z_c e' compresa in un range di $20 < Z_c < 150$ [Ω], mentre nel caso in cui le due strisce sono simmetriche posso arrivare fino a 350 [Ω]

Δ RECTANGULAR WAVEGUIDE



a>b per convenzione
(altrimenti inverto gli assi)

e' stata una delle prime guide d'onda per le microonde (1 ÷ 122 GHz)

→ permette la propagazione di modi TE, TM ma non modi TEM perche' e' presente un solo conduttore

Le guide d'onda TE hanno $E_z = 0$, mentre H_z deve soddisfare l'equazione delle onde ridotta:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right) H_z(x,y) = 0$$

per cui ottengo una soluzione generica del tipo:

$$H_z(x,y) = (A\cos k_x x + B\sin k_x x)(C\cos k_y y + D\sin k_y y)$$

imponendo le condizioni al contorno e svolgendo i calcoli ottengo:

$$\left.\begin{array}{l} E_x(x, y=0) = 0 \\ E_y(x=0, y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D = 0 \ \wedge \ k_y = n\frac{\pi}{b} \\ B = 0 \ \wedge \ k_x = m\frac{\pi}{a} \end{array}\right.$$

la soluzione finale raccogliendo una costante e':

$$H_z(x,y,z) = A_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{-j\beta z}$$

dove m e n definiscono il modo TE_{mn}; la costante di propagazione (in assenza di perdite) e': $\beta = \sqrt{k^2 - (\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}$

$$= \sqrt{k^2 - k_c^2} \Rightarrow k_c = \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}$$

e quindi ogni modo TE ha una propria frequenza di taglio:

$$\boxed{f_{cmn} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}}$$

il modo dominante e' quello con la frequenza di taglio piu' bassa TE_{10} (a>b)

$$\boxed{f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}} \quad \text{perche'} \quad k_{c10} = \frac{\pi}{a}$$

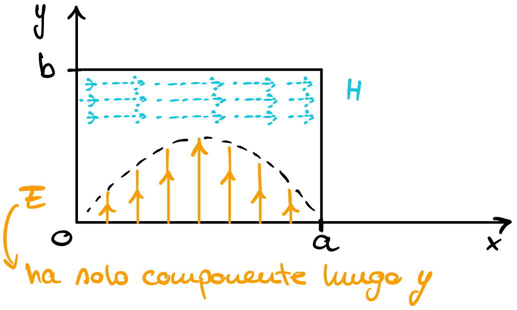
in questo caso ho che:

$$H_z = A_{10}\cos(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z}$$

$$E_y = -j\frac{\omega\mu a}{\pi} A_{10}\sin(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z}$$

$$H_x = j\frac{\beta a}{\pi} A_{10}\sin(\frac{\pi}{a}x)\, e^{-j\beta z}$$

$$E_x = H_y = E_z = 0$$

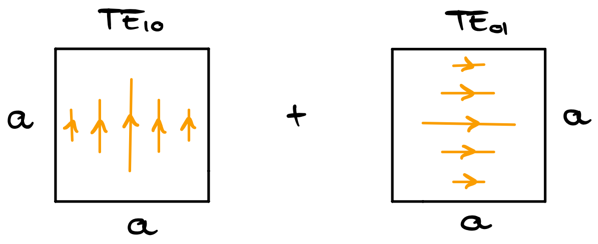


→ e' usata per sistemi a frequenza molto alta e con bassissime perdite

→ la stessa analisi puo' essere ripetuta per i modi TM_{mn}

△ SQUARE WAVEGUIDE

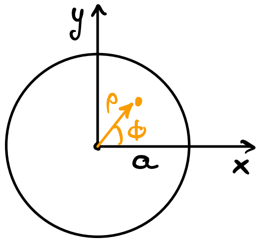
la posso vedere come la sovrapposizione di due sistemi polarizzati TE_{10} + TE_{01}



$$f_{c\,10,01} = \frac{v}{2a} \quad \left(k_c = \frac{\pi}{a}\right)$$

$$f_{c,mp} = \sqrt{2}\,\frac{v}{2a} \quad (TE_{11}, TM_{11})$$

△ CIRCULAR WAVEGUIDE



anche in questo caso ho che per i modi TE

$E_z = 0$ e H_z e' soluzione di

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

che risolvo in coordinate cilindriche e

supponendo $H_z(\rho,\phi) = R(\rho)\,P(\phi)$

→ le soluzioni generiche sono:

$$P(\phi) = A \sin n\phi + B \cos n\phi$$

$$R(\rho) = C\, J_n(k_c\rho) + D\, Y_n(k_c\rho)$$

funzioni di Bessel del primo e del secondo tipo di ordine s

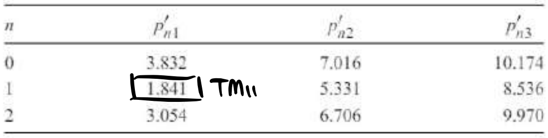
poiche $Y_n \xrightarrow{\rho \to 0} +\infty$ non e' accettabile per una guida d'onda circolare $\Rightarrow D = 0$ e so:

$$H_z(\rho,\phi) = (A \sin n\phi + B \cos n\phi)\, J_n(k_c\rho)$$

le condizioni al contorno sono $E(\rho = a, \phi) = 0$ e quindi:

$$E(\rho,\phi,z) = j\,\frac{\omega\mu}{k_c}\,(A \sin n\phi + B \cos n\phi)\, J_n'(k_c\rho)\, e^{-j\beta z}$$

affinche' sia rispettata la condizione al contorno in $\rho = a$ devo avere che la derivata $J'(k_c a) = 0$ e questo e' vero per m radici di $J'(x)$



n	p'_{n1}	p'_{n2}	p'_{n3}
0	3.832	7.016	10.174
1	$\boxed{1.841}$ TM_{11}	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_{cnm} = \frac{p'_{nm}}{\underset{\downarrow}{a}}}$$

raggio $R = a$

$$\Rightarrow \quad \beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f_{cnm} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a \sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Calcolo del modo $\boxed{TE_{11}}$

modi TE: $\quad \bar{E}_t, \bar{H}_t, \bar{H}_z \; \} \; e^{-\gamma z} \overset{\text{no perdite}}{=} e^{-j\beta z}$

$$\gamma = \sqrt{\underset{\text{autovalori del modo}}{k_c^2} - \underset{\text{numero d'onda}}{k}} \qquad k = k_c \text{ @ } f_c \quad (\gamma = 0 \wedge \beta = 0)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -j\omega\mu\bar{H} \\ \nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon\bar{E} \end{cases} \longrightarrow \quad \nabla \times \nabla \times \bar{H} = j\omega\varepsilon \, \nabla \times \bar{E} \overset{!}{=} \underbrace{j\omega\varepsilon(-j\omega\mu)}_{k^2}\bar{H}$$

$$\nabla = \hat{i}_x \partial_x + \hat{i}_y \partial_y + \cancel{\hat{i}_z \partial_z} = \nabla_t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \times \nabla \times \bar{H} - k_c^2 \bar{H} = 0}$$

e' l'equazione che voglio risolvere

so che $\bar{H} = \bar{H}_t + \bar{H}_z$

$$\Rightarrow \quad \nabla_t \times \nabla_t \times (\bar{H}_t + \bar{H}_z) - k_c^2(\bar{H}_t + \bar{H}_z) = 0$$

$$\underbrace{\nabla_t \times \underbrace{\nabla_t \times \bar{H}_t}_{z}}_{t} + \underbrace{\nabla_t \times \underbrace{\nabla_t \times \bar{H}_z}_{t}}_{z} - \underbrace{k_c^2 \bar{H}_t}_{t} - \underbrace{k_c^2 \bar{H}_z}_{z} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla_t \times \nabla_t \times \bar{H}_z - k_c^2 \bar{H}_t = 0 \\ \nabla_t \times \nabla_t \times \bar{H}_t - k_c^2 \bar{H}_z = 0 \end{cases}$$

mi basta risolvere una di queste due...

ho ottenuto un problema molto piu' semplice da risolvere

$$\nabla_t \times \nabla_t \times \overline{H_z} = \nabla_t(\cancelto{0}{\nabla_t \cdot \overline{H_z}}) - \nabla_t^2 \overline{H_z}$$

=> $-\nabla_t^2 \overline{H_z}^2 - k_c^2 \overline{H_z} = 0$ dove $\overline{H_z} = \hat{i}_z H_z$ => $\boxed{\nabla_t^2 H_z + k_c^2 H_z = 0}$

pongo $H_z(x,y) = F(x)\,G(y)$ separando le variabili => $\nabla_t^2 FG + k_c^2 FG = 0$

$$\Rightarrow \frac{G\frac{\partial^2}{\partial x^2}F}{FG} + \frac{F\frac{\partial^2}{\partial y^2}G}{FG} + \frac{k_c FG}{FG} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F}_{F(x)} + \underbrace{\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial y^2}G}_{G(y)} + k_c^2 = 0$$

vale solo se sono costanti:

$$\begin{cases} \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -k_x^2 \\ \frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -k_x^2 \\ k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \longrightarrow \frac{d^2F}{dx} = -k_x^2 F \longrightarrow F(x) = Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_y y}$$

$$\overset{!}{=} A\cos k_x x + B\sin k_y y$$

posso scegliere la forma che voglio

(la soluzione per G e' analoga)

visto che la linea e' un PEC (perfect. elect. cond.), allora $\frac{\partial H_z}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$

=> cancello il $\sin(\cdot)$ ponendo $B=0$

=> $H_z = A\cos k_x x$

$k_x = m\frac{\pi}{a}$ => $H_z = A\cos(m\frac{\pi}{a}x)$

analogamente:

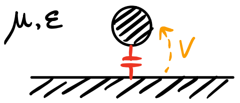
$k_y = n\frac{\pi}{a}$ => $H_z = A\cos(n\frac{\pi}{a}y)$

$$\left\} \begin{array}{l} k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \\ m = 0,1,\dots \wedge n = 0,1,\dots \end{array} \right.$$

=> $\boxed{H_z(x,y) = F(x)\,G(x) = A\cos\frac{m\pi}{a}x \; B\cos\frac{n\pi}{a}y}$

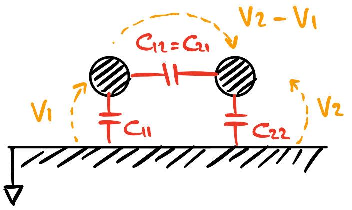
COUPLED LINES

single line → caratterizzata da L, C



$\boxed{LC = \mu\varepsilon}$ e $\boxed{Q = CV}$

coupled lines → e' caratterizzata da $\underline{\underline{L}}$ e $\underline{\underline{C}}$ in forma matriciale (perche' ho piu' interazioni da descrivere, non solo quelle con il piano di ground)

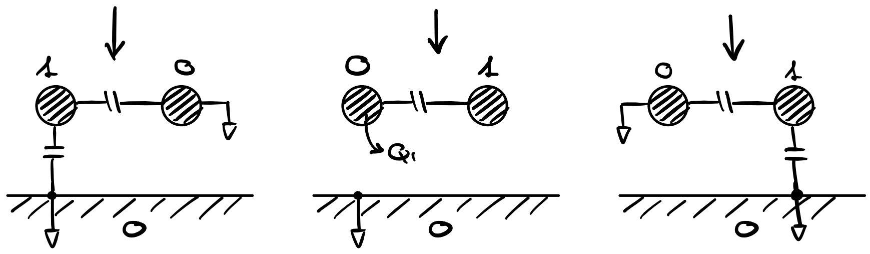


$$\begin{cases} Q_1 = C_{11}'V_1 + C_{12}'(V_1-V_2) = (C_{11}'+C_{12}')V_1 - C_{12}'V_2 \\ Q_2 = C_{22}'V_2 + C_{12}'(V_2-V_1) = -C_{12}'V_1 + (C_{22}'+C_{12}')V_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underline{Q} = \underline{\underline{C}}\,\underline{V}}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} C_{11}'+C_{12}' & -C_{12}' \\ -C_{12}' & C_{22}'+C_{12}' \end{pmatrix}$$

quindi ho che $\begin{cases} Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \\ Q_2 = C_{12}V_1 + C_{22}V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{11} = C_{11}'+C_{12}' \\ C_{12} = -C_{12}' \\ C_{22} = C_{22}'+C_{12}' \end{cases}$

dove $C_{11} = \left.\frac{Q_1}{V_1}\right|_{V_2=0}$, $C_{12} = \left.\frac{Q_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$ e $C_{22} = \left.\frac{Q_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$



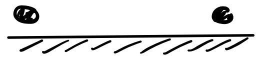
posso distinguere

$$Z_{C\,even} = \frac{1}{v\,C_{even}} \qquad C_{even} = C_{11}'$$

$$Z_{C\,odd} = \frac{1}{v\,C_{odd}} \qquad C_{odd} = C_{11}' + 2C_{12}'$$

→ meno sono accoppiate e $\boxed{Z_{C\,even} \simeq Z_{C\,odd}}$

esempio: molto lontane



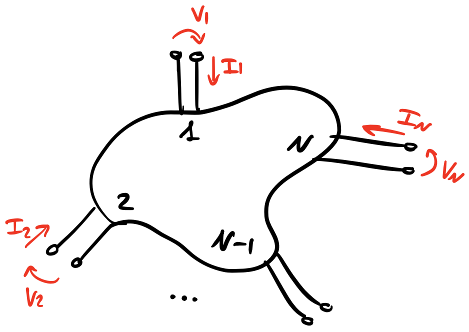
MATRICI CIRCUITALI

∆ Z e Y MATRIX

per un circuito a N porte, la matrice d'impedenza (e di ammettenza) e' N × N e gli elementi sono dati da

$$\boxed{Z_{m,n} = \left.\frac{V_m}{I_n}\right|_{I_{k\neq n}=0}}$$

↓ tutte le altre porte sono lasciate aperte



dispositivo a N porte

analogamente:

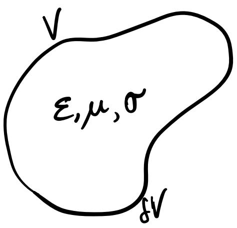
$$\boxed{Z_{m,n} = \left.\frac{I_m}{V_n}\right|_{V_{k\neq n}=0}}$$

↓ tutte le altre porte sono cortocircuitate

→ se il circuito e' reciproco allora le due matrici sono simmetriche e se il circuito e' senza perdite allora esse sono immaginarie

→ esse non esistono sempre, infatti per circuiti senza perdite hanno dei poli

FISICAMENTE ... consideriamo una regione V in cui iniettiamo una potenza media complessa pari a P_o inducendo una corrente J_o all'interno di tale regione



$$P_o = -\frac{1}{2}\int_V E\cdot J_o^* \, dV$$

energia elettrica → $W_e = \frac{1}{4}\int_V E\cdot D^* \, dV = \frac{1}{4}\int_V \varepsilon |E|^2 \, dV$

energia magnetica → $W_e = \frac{1}{4}\int_V H\cdot B^* \, dV = \frac{1}{4}\int_V \mu |H|^2 \, dV$

potenza dissipata → $P_d = \frac{1}{2}\int_V E \cdot J^* \, dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma |E|^2 \, dV$

potenza che esce dal bordo δV → $P_r = \frac{1}{2}\oint_{\delta V} E \times H^* \cdot \hat{n} \, dS$

se consideriamo V largo abbastanza da includere tutto il campo reattivo, allora Pr e' reale e rappresenta la potenza irradiata; posso scrivere che

$$\underset{\underset{\text{Poynting}}{\uparrow}}{P_o} = P_d + P_r + 2j\omega(W_m - W_e)$$

definisco Zin | $\frac{1}{2} Z_{in} |I_o|^2 = \frac{1}{2}(R_{in} + jX_{in})|I_o|^2 = P_o$

⇒ $\boxed{Z_{in} = \frac{2P_d + 2P_r + 4j\omega(W_m - W_e)}{|I_o|^2}}$ l'impedenza rappresenta la reazione del circuito all'applicazione di uno stimolo (tramite una sorgente) e dipende dalla posizione in cui lo stimolo viene applicato

⇒ quindi dipende, come visto, dalla porta

Δ SCATTERING MATRIX

esiste sempre

descrive il circuito in termini di onde (incidenti e riflesse) descritta a partire da due coefficienti in termini di potenza (an e bn)

→ potenza incidente $\frac{1}{2}|a_n|^2$ } l'elemento della matrice di scattering e':
→ potenza riflessa $\frac{1}{2}|b_n|^2$

$$\boxed{S_{mn} = \frac{b_m}{a_n}\Big|_{a_{i \neq n} = 0}}$$

→ i circuiti reciproci hanno una matrice di scattering simmetrica ($S = S^T$)

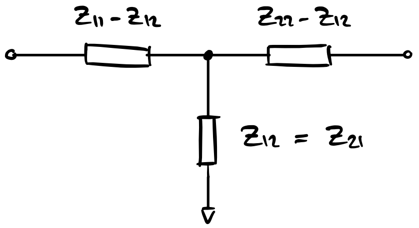
→ i circuiti senza perdite hanno una matrice unitaria $SS^\dagger = I$

dalla definizione ho che $|S_{mn}|^2 = \frac{P_{\text{riflessa } m}}{P_{\text{incid. } m}}\Big|_{P_{\text{inc. } i \neq n} = 0}$

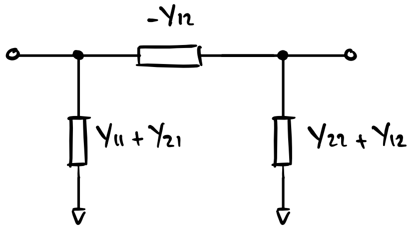
CIRCUITI CON 2 PORTE

Δ Z e Y MATRIX

Li posso sempre descrivere in circuiti T-equivalenti e Π-equivalenti:



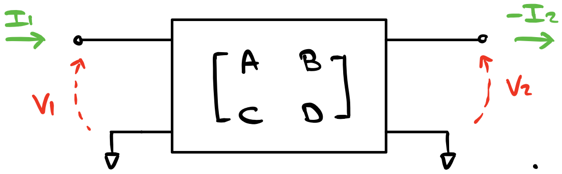
$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} -jZ_c \,\text{cotan}\, \beta l & \frac{-jZ_c}{\sin\beta l} \\ \frac{-jZ_c}{\sin\beta l} & -jZ_c \,\text{cotan}\, \beta l \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} -jY_c \,\text{cotan}\, \beta l & \frac{jY_c}{\sin\beta l} \\ \frac{jY_c}{\sin\beta l} & -jY_c \,\text{cotan}\, \beta l \end{bmatrix}$$

Δ ABC MATRIX

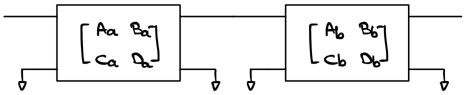
e' il nome della matrice di trasmissione che infatti indichiamo con T:



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

i circuiti reciproci hanno $\det T = AD - BC = 1$

→ A e D sono numeri puri, mentre B e' un'impedenza e C e' un'ammettenza



$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T_a}}\,\underline{\underline{T_b}}$$

→ per una linea di trasmissione (l, Z_c) ho: $T = \begin{bmatrix} \cos\beta l & jZ_c \sin\beta l \\ jY_c \sin\beta l & \cos\beta l \end{bmatrix}$

Δ SCATTERING MATRIX

nel caso di un dispositivo biporta senza perdite e reciproco ho che:

$$\boxed{|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = |S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|S_{11}| = |S_{22}|} \quad e \quad |S_{21}| = \sqrt{1-|S_{11}|^2}$$

→ e' un bilancio energetico in termini di potenza (visto che il circuito e' senza perdite)

→ inoltre ho che $S_{ij} = |S_{ij}| e^{j\phi_{ij}}$

⇒ (unitarieta') $\phi_{12} = \phi_{21} = \frac{\phi_{11} + \phi_{22}}{2} + \frac{\pi}{2} + n\pi$

⇒ (simmetria) $\phi_{11} - \phi_{12} = \pm \frac{\pi}{2}$

LINEA DI TRASMISSIONE lunga ℓ, di impedenza caratteristica Z_c e cost. di prop. β:

$$z_c = \frac{Z_c}{Z_R}$$

$$\Delta = 1 - 2j z_c \operatorname{cotan} \beta\ell + z_c^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} z_c^2 - 1 & \frac{-j z_c}{\sin\beta\ell} \\ \frac{-j z_c}{\sin\beta\ell} & z_c^2 - 1 \end{bmatrix}$$

se $Z_c = Z_R$ ho che $z_c = 1$

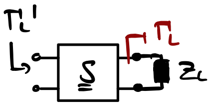
$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{impedenza di riferimento}}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\beta\ell} \\ e^{-j\beta\ell} & 0 \end{bmatrix}$$

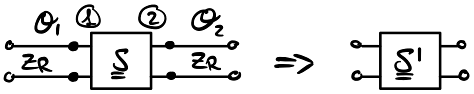
se mettiamo un carico sulla porta 2 con coefficiente di riflessione Γ_L ottengo

$$\Gamma_L' = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$



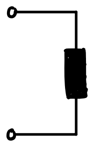
SHIFT NEL REFERENCE PLANE

$$S_{mn}' = S_{mn} e^{-j\theta_m} e^{-j\theta_n}$$



la matrice di scattering la posso misurare tramite un VNA (Vector Network Analayzer)

RISONATORI



Z,Y impedenza lossless

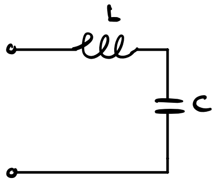
$\Rightarrow$ $Z = jX$ e $Y = jB$

CONDIZIONI DI RISONANZA

$\boxed{X = 0 \quad \text{oppure} \quad B = 0}$

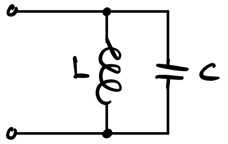
SERIES RESONANCE — PARALLEL RESONANCE

RISONATORE IN SERIE



$$X = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

RISONATORE IN PARALLELO



$$B = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

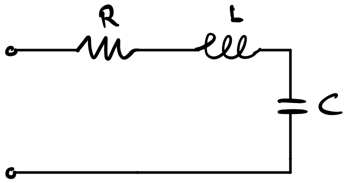
$$X = \frac{4\omega(W_m - W_e)}{|I|^2}$$

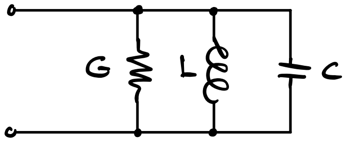
$$B = \frac{4\omega(W_e - W_m)}{|I|^2}$$

deriviamo subito che per avere risonanza devo avere la stessa quantità di energia elettrica e magnetica

$\boxed{W_m = W_e}$ @ RESONANCE

Consideriamo ora le perdite :



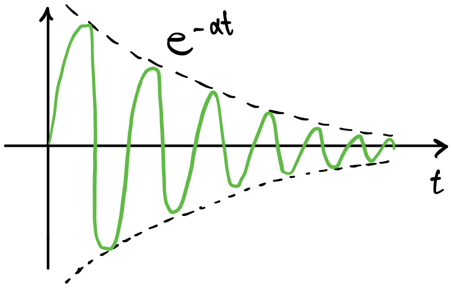


P_d → potenza dissipata su R o su G

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0 \overset{W_m+W_e}{W}}{P_d}}$$ QUALITY FACTOR

$$= \frac{2\omega_0 W_m}{P_d} = \omega_0 \frac{L}{R} \quad \text{(series)}$$

$$= \frac{2\omega_0 W_e}{P_d} = \omega_0 \frac{C}{G} \quad \text{(parallel)}$$



→ frequenza di decrescita delle oscillazioni:

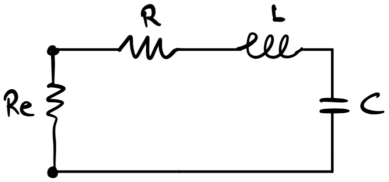
$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\Rightarrow Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R\left(1 + j2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$$

$\delta\omega = \omega - \omega_0$ è la variazione della freq. rispetto a quella ideale ω_0

$$\Rightarrow Z_p \simeq R\left(1 + j2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)$$

Supponiamo ora di connettere una resistenza (conduttanza) esterna Re (Ge):



$Q_0 \xrightarrow{\text{ideale}} +\infty$ se $R \to 0$

$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R}$ senza carico

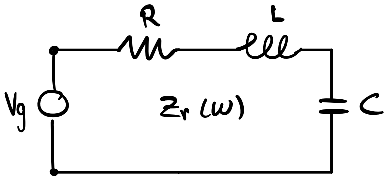
$Q_e = \omega_0 \frac{L}{R_e}$ del carico

$$\Downarrow$$

$$Q_{tot} = \frac{\omega_0 L}{R + R_e} = \frac{1}{1/Q_0 + 1/Q_e}$$

per il parallelo vale la stessa cosa: $Q_{tot} = \frac{\omega_0 C}{G + G_e} = \frac{1}{1/Q_0 + 1/Q_e}$

Consideriamo ora il risonatore connesso a un generatore di tensione ideale V_g

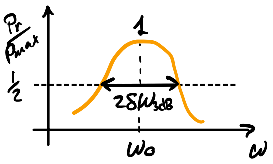


la potenza assorbita dal risonatore è:

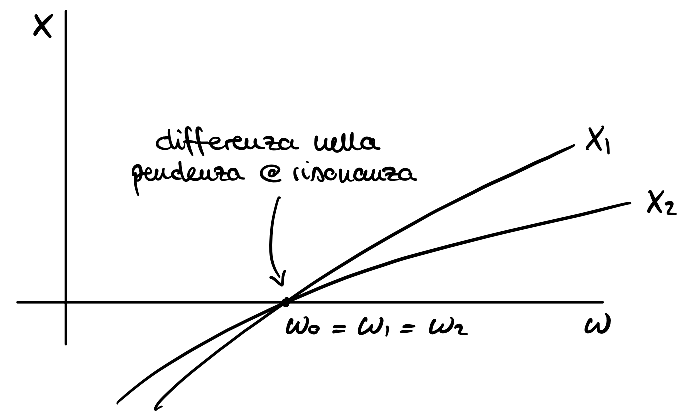
$$P_r = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Z_r\}|I|^2 = \frac{1}{2}R\left|\frac{V_g}{Z_R}\right|^2$$

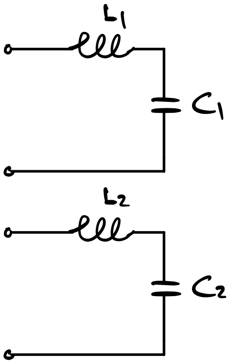
che ha un massimo in:

$$P_{max} = \frac{1}{2}R\left|\frac{V_g}{R}\right|^2$$



$$\frac{P_r}{P_{max}} = \frac{R^2}{|Z_r|^2} \overset{\text{impongo}}{=} \frac{1}{2} \iff 4Q^2\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{derivo}\left\{\boxed{\begin{array}{l}\delta\omega|_{3dB} = \dfrac{\omega_0}{2Q} \\[2ex] Q = \dfrac{\omega_0}{2\,\delta\omega|_{3dB}}\end{array}}\right.$$





$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$

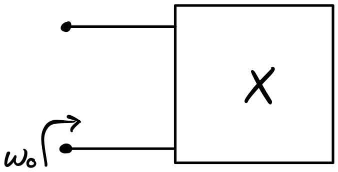
$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \omega_1$

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial \omega}\Big|_{\omega_0}} \qquad \boxed{C = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial \omega}\Big|_{\omega_0}}$$

→ per identificare un risonatore bastano:

$\{L, C\}$

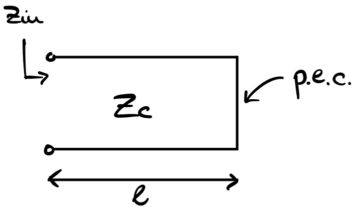
$\{\omega_0, \text{pendenz}|_{\omega_0}\}$



$\frac{dX}{d\omega}\Big|_{\omega_0} = L$ → vicino alla risonanza ($\sim \omega_0$) X si comporta come un series resonator con pendenza L e freq. di risonanza ω_0

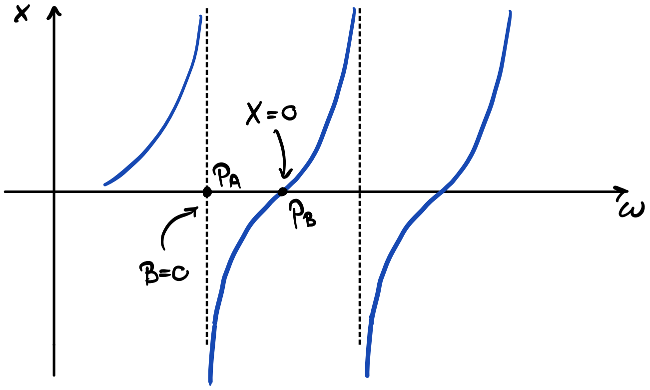
TRANSMISSION LINE RESONATOR

- **SHORT-CIRCUITED**



$Z_{in} = jX$

$X = Z_c \tan \beta \ell = Z_c \tan\left(\frac{\omega}{v} \ell\right)$



@ P_A $\quad \frac{\omega}{v} \ell = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_A = \frac{v\pi}{2\ell}}$

$\lambda_A = \frac{v}{\omega_A} \cdot 2\pi$

$\frac{v 2\pi}{\lambda_A} = \frac{v\pi}{2\ell} \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\lambda_A}{4}}$

↓

si comporta come un // resonator

@ P_B si comporta come un series resonator

$$B = -Y_c \cot\beta \ell$$

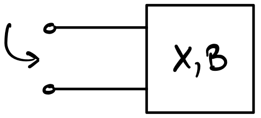
$$\frac{dB}{d\omega} = \frac{Y_c}{\sin^2\beta\ell}\,\frac{d(\beta\ell)}{d\omega} = \frac{\ell Y_c}{v\sin^2\beta\ell}$$

@ RESONANCE, $\sin^2\beta\ell = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{C_A = \frac{1}{2}\frac{\partial B}{\partial\omega}\Big|_{\omega_A} = \frac{Y_c\ell}{2v} = \frac{Y_c}{8f_A} = \frac{\pi Y_c}{4\omega_A}}$

e' la capacita' equivalente del risonatore

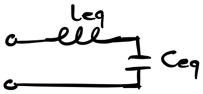
analogo posso fare per l'induttanza @ RESONANCE $\boxed{L = \frac{1}{2}\frac{\partial X}{\partial\omega}\Big|_{\omega_B} = \frac{\pi Z_c}{2\omega_0}}$

Piu' generalmente, considerando anche i punti di lavoro successivi ho che:



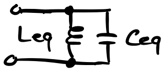
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_{eq}}}$$

$X = 0$ @ ω_0 $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $X_{eq} = \omega_0 L_{eq}$

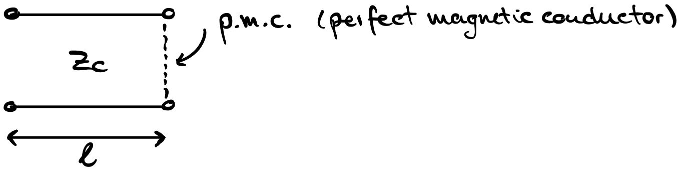
$B = 0$ @ ω_0 $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $B_{eq} = \omega_0 C_{eq}$

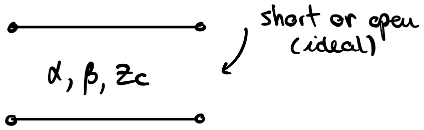
- se ℓ e' un multiplo dispari di $\frac{\lambda}{4}$: $\ell = \frac{\lambda}{4}(1+2n)$ $\Rightarrow$ $B_{eq} = (1+2n)\frac{\pi}{4}Y_c$
- se ℓ e' un multiplo di $\frac{\lambda}{2}$: $\ell = n\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $X_{eq} = n\frac{\pi}{2}Z_c$

• OPEN-CIRCUITED



- $\ell = (1+2n)\frac{\lambda}{4}$ $\Rightarrow$ $L_{eq} = (1+2n)\frac{\pi Z_c}{4\omega_0}$ $\Rightarrow$ $X_{eq} = (1+2n)\frac{\pi}{4}Z_c$
- $\ell = n\frac{\lambda}{2}$ $\Rightarrow$ $C_{eq} = \frac{n\pi Y_c}{2\omega_0}$ $\Rightarrow$ $B_{eq} = n\frac{\pi}{2}Y_c$

UNLOADED - Q



$\alpha \ll \beta$ $\alpha = \alpha_c + \alpha_d$ dove $\begin{cases} \alpha_c = \frac{R_u}{2Z_c} \\ \alpha_d = \frac{G_u Z_c}{2} \end{cases}$

$W_m = \frac{1}{2} L_u \int |I(z)|^2 dz$ dove L_u = induttanza per unita' di lunghezza

$P_d = \frac{1}{2} R_u \int |I(z)|^2 dz$ dove R_u = resistenza per unita' di lunghezza

$\Rightarrow \quad Q_c = \frac{2\omega_0 W_m}{P_d} = \omega_0 \frac{L_u}{R_u} = \frac{\beta}{2\alpha_c} \longrightarrow \omega_0 \sqrt{L_u C_u}$

facendo analogo per la parte di α_d:

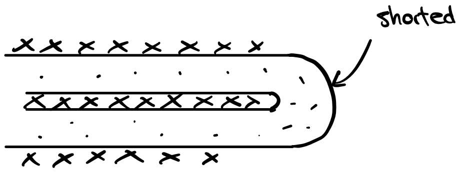
$W_e = \frac{1}{4} C_u \int |V(z)|^2 dz$ dove C_u = capacita' per unita' di lunghezza

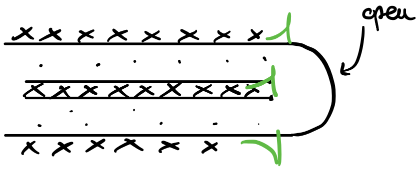
$P_d = \frac{1}{2} G_u \int |V(z)|^2 dz$ dove G_u = conduttanza per unita' di lunghezza

$\Rightarrow \quad Q_d = \frac{\beta}{2\alpha_d}$

ottengo cosi' che senza carico $\boxed{Q = \frac{1}{1/Q_c + 1/Q_d} = \frac{\beta}{2(\alpha_c + \alpha_d)} = \frac{\beta}{2\alpha}}$

Se voglio usare una linea TX come risonatore devo avere un Q in assenza di carico che obbedisce a questa relazione

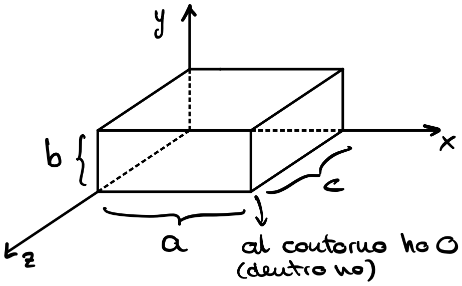




$Q = 50 \div 300$

cavity waveguide → $Q \simeq 20\,000$

CAVITA' A PARALLELEPIPEDO (RETTANGOLARE)



al contorno ho 0
(dentro no)

$m,n,p = 0,1,2,\dots\ \infty$ ma $(m,n,p) \neq (0,0,0)$

non e' accettabile

non e' un modo!

↓

rappresentano gli autovalori:

$$\underset{x\ \ y\ \ z}{k_{mnp}} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} - k^2 \bar{E} = 0$$

freq. di risonanza

↑

$$f_{r,mnp} = \frac{k_{mnp}\, v}{2\pi}$$

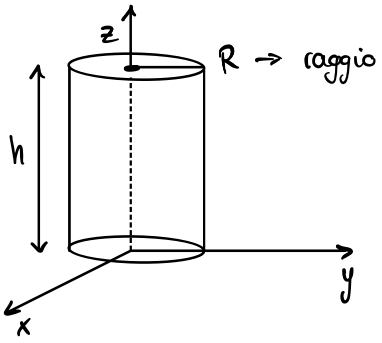
v → velocita' della luce nel materiale

I modi possono essere classificati come TE^z_{mnp} e TM^z_{mnp}

- $\boxed{TE_{101}}$, TE_{011}
- TE_{001} NON PUO' ESISTERE PERCHE' HO COMP. COST. IN X-Y
- TM_{10} → per i modi TM non ho indice 0

Su un pec la componente normale del campo magnetico deve andare a 0, mentre la comp. tangente del campo elettrico deve essere 0 $\Big\}$ $H_z \cdot \hat{n}_z = 0$

CAVITA' CILINDRICA



R → raggio

$$k_{mnp} = \begin{cases} \sqrt{\left(\frac{X'_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} & TE \\ \sqrt{\left(\frac{X_{mn}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2} & TM \end{cases}$$

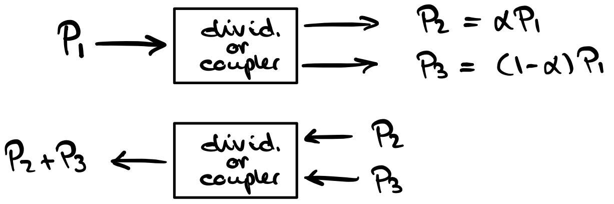
→ X'_{mn} = n-esima radice della derivata della funzione di Bessel del primo tipo di ordine n

→ X'_{mn} = n-esima radice della funzione di Bessel del primo tipo di ordine m

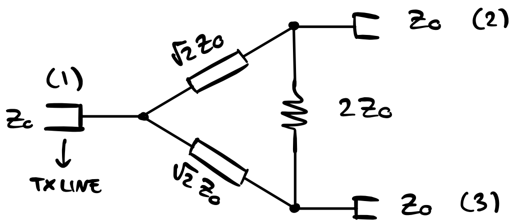
MICROWAVE DEVICES

- power dividers e combiners
- circulators e isolators

i power dividers sono usati per dividere e ricombinare le potenze:



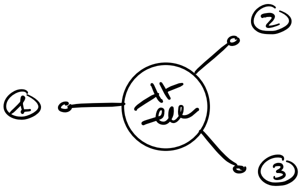
Δ WILKSON POWER DIVIDER



le linee sono lunghe $\frac{\lambda}{4}$

→ tutte le porte sono matchate

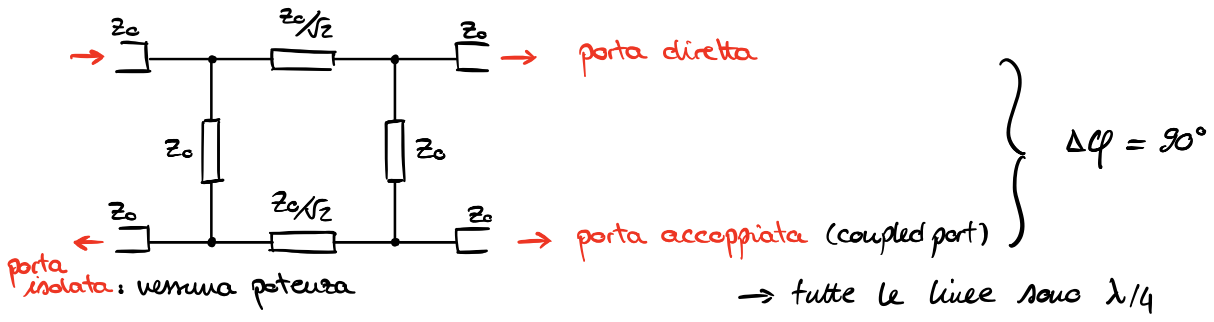
l'ingresso nella porta ① divide la potenza nelle porte ② e ③ senza perdite, mentre l'ingresso nelle porte dissipa 3dB sul resistore



→ non ho match in tutte le porte

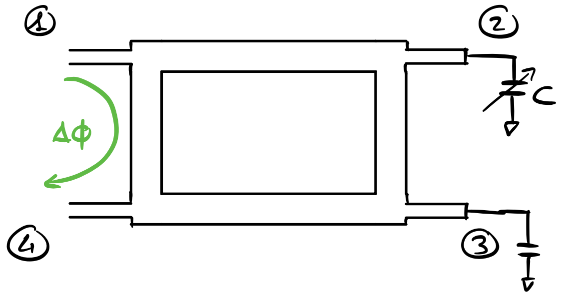
→ per avere un match in tutte le porte devo usare dei lossy devices (per i dispositivi a 3 porte)

Δ 90° HYBRID COUPLER



porta isolata: nessuna potenza

→ tutte le linee sono $\lambda/4$

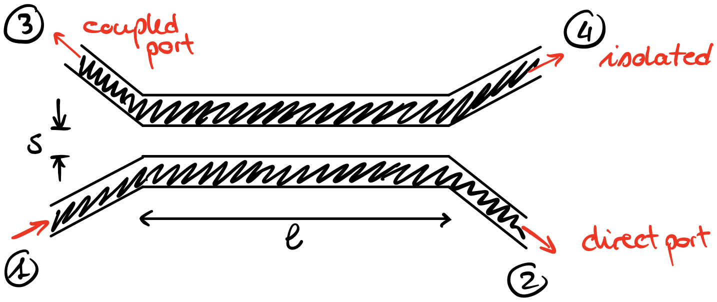


$$\underline{\underline{S}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix}$$

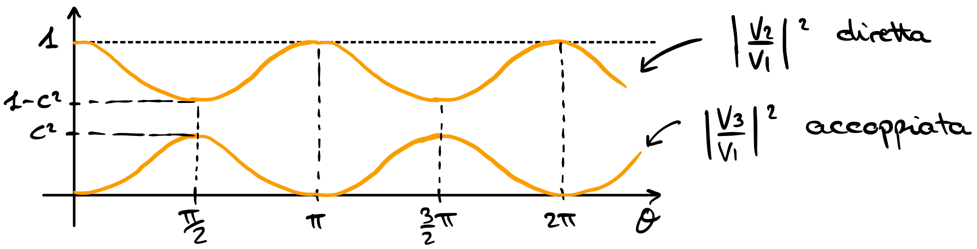
tra ② e ④ ho uno sfasamento di 90°, mentre la divisione e' tra ② e ③
↓
e' isolata

Con $\not{\phi}$ ho uno sfasamento che dipende dalle capacita'; se le due capacita' sono uguali perdo il problema del matching del circuito

△ COUPLED LINES DIRECTIONAL COUPLER



lunghezza elettrica $\theta = \beta l$



Se voglio dividere la potenza in modo esattamente equo tra le due porte devo avere che $c^2 = \frac{1}{2}$

Il livello di accoppiamento e' dato:

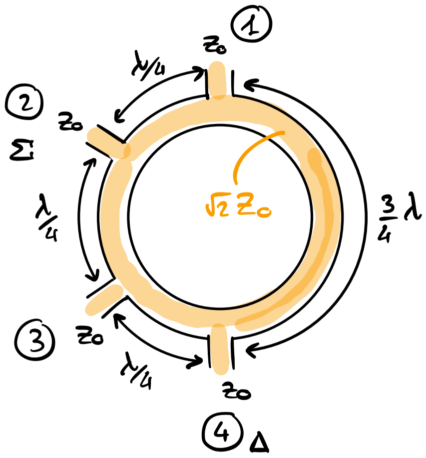
impedenza di riferimento
(e' la stessa ∀porta)

$$Z_{c\,even} = Z_0 \sqrt{\frac{1+c}{1-c}} \qquad Z_{c\,odd} = Z_0 \sqrt{\frac{1-c}{1+c}}$$

→ scelgo c per separare come voglio

$V_{even} \neq V_{odd}$ (velocita' modi pari ≠ modi dispari)

Δ RAT RACE COUPLER (180° COUPLER)



$$\underline{\underline{S}} = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma = A + B$ A → INPUT

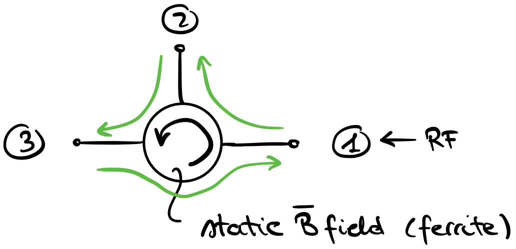
$\Delta = A - B$ B → LO

→ e' usato sia come power divider, sia come mixer (IN@1 + LO@3 + NON.LIN COMP. @4)

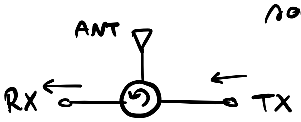
→ l'output ② e ④ e' senza sfasamento (input @ ①)

→ l'output ① e ③ e' sfasato di 180° (input @ ④)

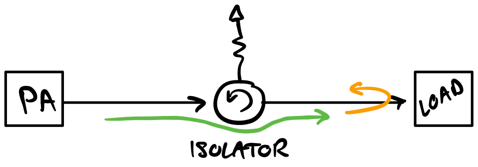
Δ Non reciprocal components



di solito viene usato nei radar in cui TX e RX sono alla stessa f



ma puo' essere usato anche per isolare la riflessione di un carico:

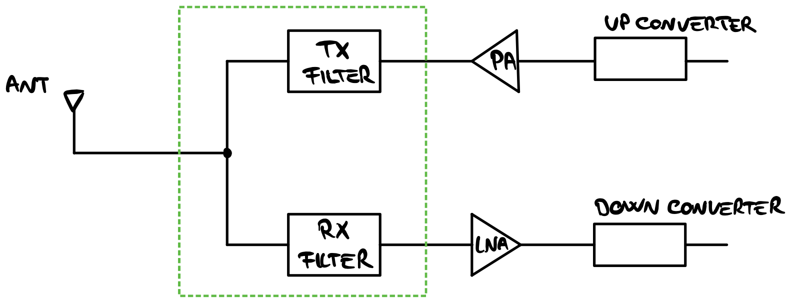


MICROWAVE FILTER

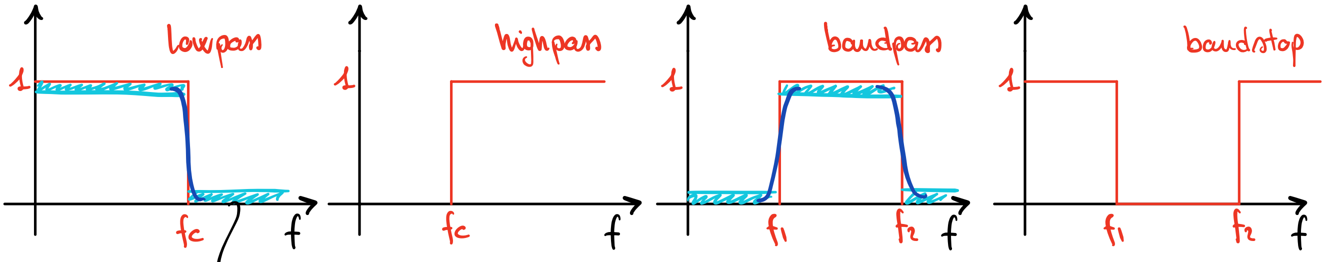
i filtri possono essere classificati in 4 categorie:

- BAND PASS
- BAND STOP
- LOW PASS
- HIGH PASS

e sono usati nei ricetrasmettitori:



diplexer → tx e rx @ frequenze diverse (all-pole filters)



la transizione non e' immediata, ma ho una regione di transizione

→ devo rispettare una maschera

→ questi filtri sono descritti in termini di parametri di scattering; ricordando che un due-porte lossless puo' essere descritto tramite

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$|S_{11}|^2$ = potenza relativa riflessa alla porta 1

$|S_{21}|^2$ = potenza relativa trasmessa alla porta 2

$|S_{22}| = |S_{11}|$

$|S_{21}|^2 + |S_{11}|^2 = 1$

SPECIFICHE DEL FILTRO

sono un set di parametri che delineano le caratteristiche del filtro e la sua maschera, definendo le regioni per i parametri $|S_{11}|$ e $|S_{12}|$; il design del filtro deve essere un compromesso tra maschera e complessita (costo).

definiamo il power loss ratio $\boxed{P_{LR} = \frac{P_{max}}{P_L}}$

P_{max} → potenza massima della sorgente

P_L → potenza assorbita dal carico

$$\Rightarrow \quad P_{LR} = \frac{1}{1-|S_{11}|^2} = \frac{1}{|S_{12}|^2}$$

puo' anche essere chiamato insertion loss (IL), espresso in dB:

$$\boxed{IL = 10 \log P_{LR}}$$

definiamo anche il return loss (RL) come $\boxed{RL = 10 \log \frac{1}{|S_{11}|^2}}$

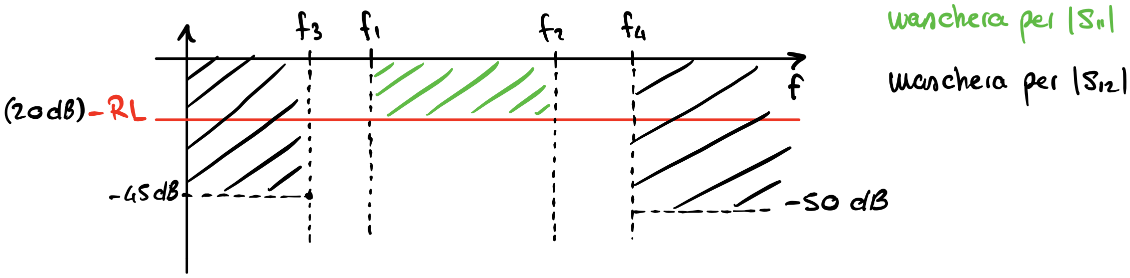
N.B.

$$|S_{11}|_{dB} = 20 \log |S_{11}|$$

$$(|S_{11}|^2)_{dB} = 10 \log |S_{11}|^2$$

Per un filtro passa banda, i requirements consistono nello specificare un RL min nella banda passante e un IL min nella banda attenuata; ad esempio potrei avere:

- $RL > 20$ dB (in banda tra $f_1 < f < f_2$)
- almeno 45 dB di attenuazione @ $f = f_3$
- almeno 50 dB di attenuazione @ $f = f_4$



Come fare ?

- identificare un polinomio
- ottenere un circuito/lumped per cui P_{LR} e' il polinomio desiderato
- convertire il circuito in circuito per microonde

LOW PASS

(equivalent low-pass prototype)

→ derivo un filtro passa-basso normalizzato

→ noi lavoreremo solo con filtri all-pole ⇒ $|S_{21}|$ non ha zeri se non @ ∞

Introduciamo il dominio delle frequenze normalizzato $-\infty < \Omega < +\infty$

⇒ progettiamo un filtro che ha un taglio @ $\Omega_c = \pm 1 \, rad s^{-1}$

↓

e' il punto in cui il filtro inizia ad attenuare (e' il margine della banda passante)

BUTTERWORTH

$$\boxed{P_{LR}(\Omega) = 1 + \varepsilon^2 \Omega^{2N}}$$

→ numero intero (ordine del filtro)

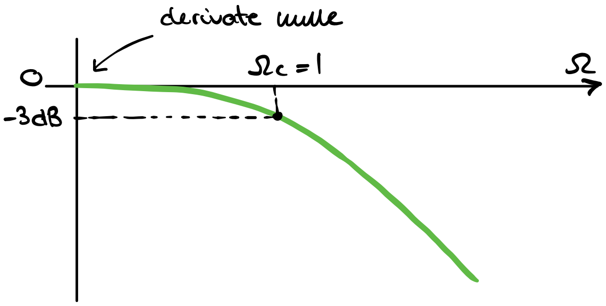
↓ fattore di ripple

↓

la risposta e' detta massimamente piatta perche' tutte le sue derivate sono nulle in 0

→ non e' molto usato

→ la frequenza di taglio e' definita come il punto @ -3dB



$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{P_{LR}} = \frac{1}{1+\varepsilon^2}$$

$$|S_{11}|^2 = 1 - |S_{21}|^2 = \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$

$$|S_{11}|^2 = 10^{-\frac{RL}{10}}$$

CHEBYSHEV

$$\boxed{P_{LR}(\Omega) = 1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}$$

$\downarrow$

e' il polinomio di Chebyshev di grado N definito come:

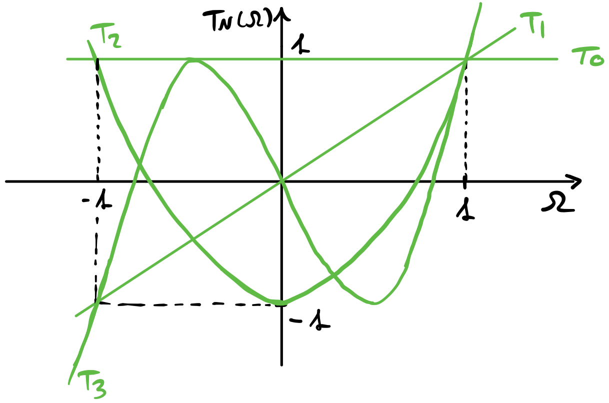
$$T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \cdot \arccos(\Omega)) & \text{se } |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega)) & \text{se } \Omega > 1 \\ (-1)^N \cosh(N \cdot \operatorname{arccosh}(\Omega)) & \text{se } \Omega < -1 \end{cases}$$

e' sempre possibile scriverlo in forma polinomiale

$$T_0 = 1$$

$$T_1 = \Omega$$

$$T_{N+1} = 2\Omega\, T_N(\Omega) - T_{N-1}(\Omega)$$



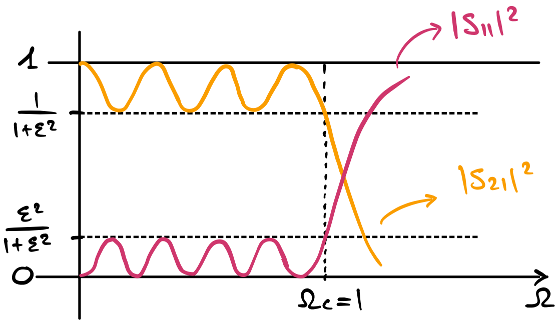
abbiamo che:

$$|S_{11}|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}$$

$$|S_{21}|^2 = \frac{1}{P_{LR}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega)}$$

affinche il taglio sia @ $\Omega_c = 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} |S_{21}|^2_{\Omega=1} &= \frac{1}{1+\varepsilon^2} \\ |S_{11}|^2_{\Omega=1} &= \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2} \end{aligned}}$

posso esprimere le specifiche anche in funzione di ε: $\varepsilon^2 = \dfrac{|S_{11}|^2_{\Omega=1}}{1 - |S_{11}|^2_{\Omega=1}}$



l'attenuazione aumenta con N: ogni l'aggiunta di un grado aumenta di 6dB

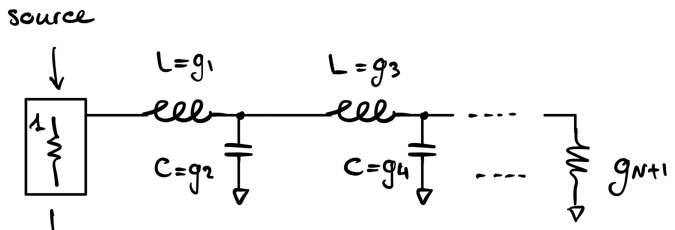
l'attenuazione fuori banda

$\Rightarrow$ se voglio un'attenuazione A_s @ Ω_s:

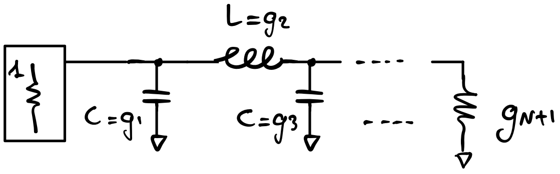
$$\boxed{N > \frac{A_s + RL + 6}{20 \log \Omega_s + 6}}$$

Quindi i parametri sono $\begin{cases} RL \text{ o } IL \\ A_s \text{ o } \Omega_s \end{cases}$

Trovato il polinomio di $P_{RL}(\Omega)$ desiderato, esiste sempre un circuito $\forall N$ e prende il nome di lowpass prototype
↓
composto da N elementi in un tipo ladder



impedenza unitaria
(devo scalare se così non fosse)



→ i coefficienti g_i sono induttanze [H] per gli elementi in serie e capacità [F] per quelli in parallelo

→ g_{N+1} e' una resistenza se quello prima e' in parallelo, un'ammettenza se quello prima e' in serie

Posso trovare i valori dalle seguenti equazioni:

$$\beta = \ln \left\{ \coth \left[\frac{\log(1+\varepsilon^2)}{1{,}737} \right] \right.$$

$$\gamma = \sinh \frac{\beta}{2N}$$

$$a_i = \sin \frac{(2i-1)\pi}{2N} \qquad b_i = \gamma^2 + \sin^2 \frac{i\pi}{N} \qquad i = 1,2,\dots N$$

$$g_0 = 1 \,, \quad g_1 = \frac{2a_1}{\gamma} \,, \quad \underbrace{g_i = \frac{4a_{i-1}a_i}{b_{i-1}g_{i-1}}}_{i = 2,3,\dots N}$$

$$g_{N+1} = \begin{cases} 1 & N \text{ dispari} \\ \coth^2 \frac{\beta}{4} & N \text{ pari} \end{cases}$$

IMPEDANCE SCALING:

1 → Ro

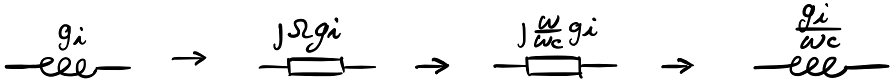
 → × Ro

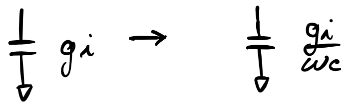
 → × 1/Ro

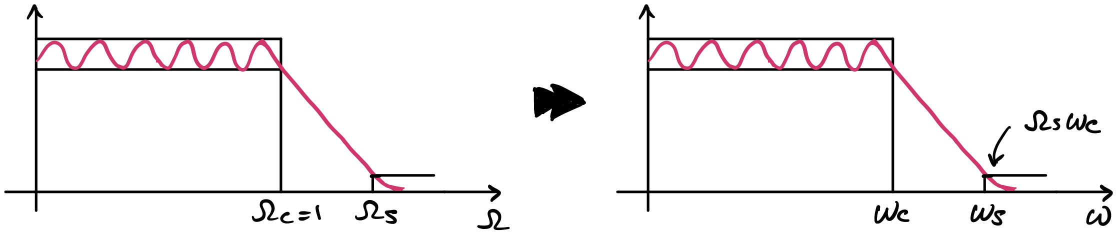
FREQUENCY SCALING :

Voglio avere un passa-basso @ ω_c cutoff

$$\Omega \to \frac{\omega}{\omega_c}$$







esempio: design un passa-basso con RL = 20, taglio a f_c e attenuazione As a ω_s

$\omega_c = 2\pi f_c$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{\omega_c}$$

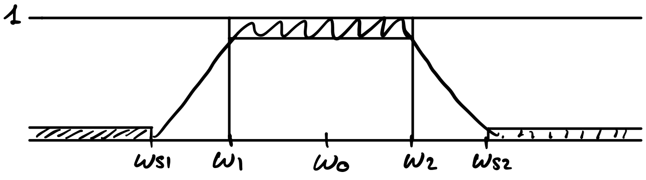
$$N > \frac{A_s + R_L + 6}{20\log\frac{\omega_s}{\omega_c} + 6}$$

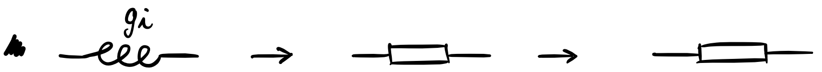
LOW PASS → BAND PASS

La sostituzione da fare e' $\Omega \to \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$

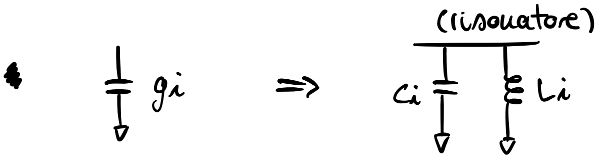
dove ω_1, ω_2 sono i limiti della banda passante e $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ centro banda

Δ = banda relativa = $\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0} = \frac{f_2-f_1}{f_0}$





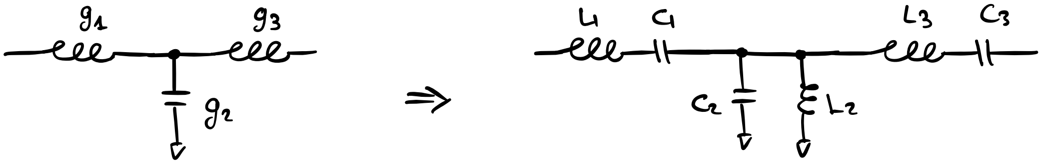
$$j\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)g_i = j\omega \underbrace{L_i}_{\frac{g_i}{\Delta\omega_0}} - j\frac{1}{\omega \underbrace{C_i}_{\frac{\Delta}{\omega_0 g_i}}}$$



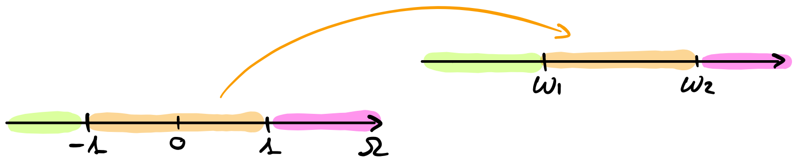
$C_i = \frac{g_i}{\Delta\omega_0}$

$L_i = \frac{\Delta}{\omega_0 g_i}$

quindi ho una trasformazione del tipo:



la trasformazione converte:



$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ ↓

infatti se converto ω_2: $\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\omega_2}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = \frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}\,\frac{\omega_2^2-\omega_0^2}{\omega_0\omega_2} = \frac{1}{\cancel{\omega_2-\omega_1}}\,\frac{\cancel{\omega_2}(\cancel{\omega_2-\omega_1})}{\cancel{\omega_2}} = 1$

PASSA-BANDA tra f_1 e f_2 con RL e $\underbrace{A_{s1} @ f_{s1}}_{N_1} \wedge \underbrace{A_{s2} @ f_{s2}}_{N_2}$

scelgo il massimo N_i => $\max(N_i) = N$

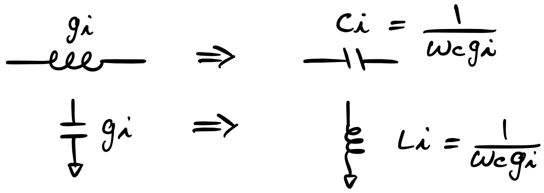
in termini di Ω:

$\Omega_{s1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{f_{s1}}{f_0}-\frac{f_0}{f_{s1}}\right)$ dove $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$

$\Delta = \frac{f_2-f_1}{f_0}$

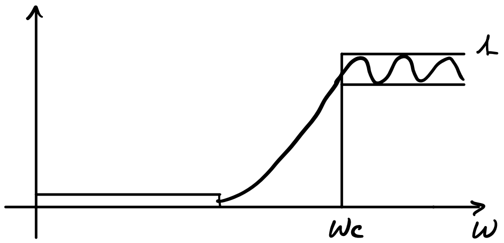
LOW PASS → $\boxed{\text{HIGH PASS}}$

$$\Omega \to -\frac{\omega_c}{\omega}$$



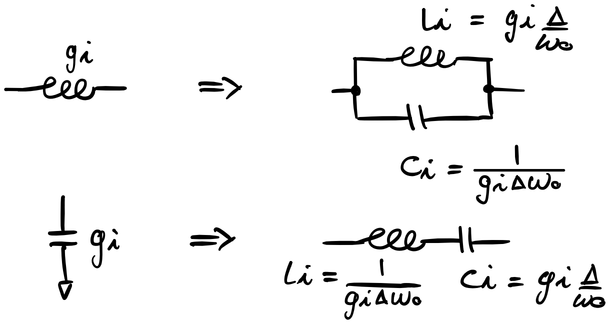
$C_i = \frac{1}{\omega_c g_i}$

$L_i = \frac{1}{\omega_c g_i}$



LOW PASS → $\boxed{\text{BAND STOP}}$

$$\Omega \to -\Delta\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^{-1}$$

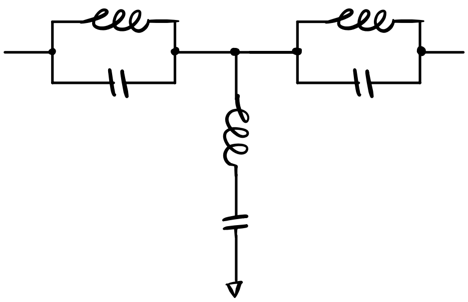


$L_i = g_i \frac{\Delta}{\omega_0}$

$C_i = \frac{1}{g_i \Delta \omega_0}$

$L_i = \frac{1}{g_i \Delta \omega_0}$ $C_i = g_i \frac{\Delta}{\omega_0}$

la forma e':



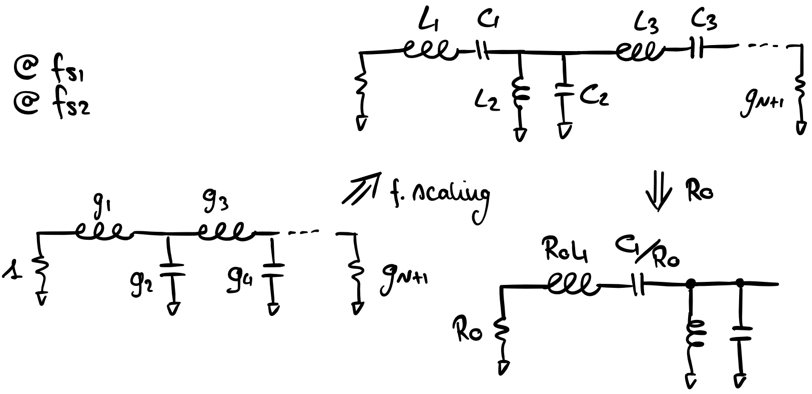
$$N > \frac{A_s + RL + 6}{20\log|\Omega_s| + 6}$$ → se ho $\Omega_s < 0$ uso il valore assoluto

Specifiche del filtro

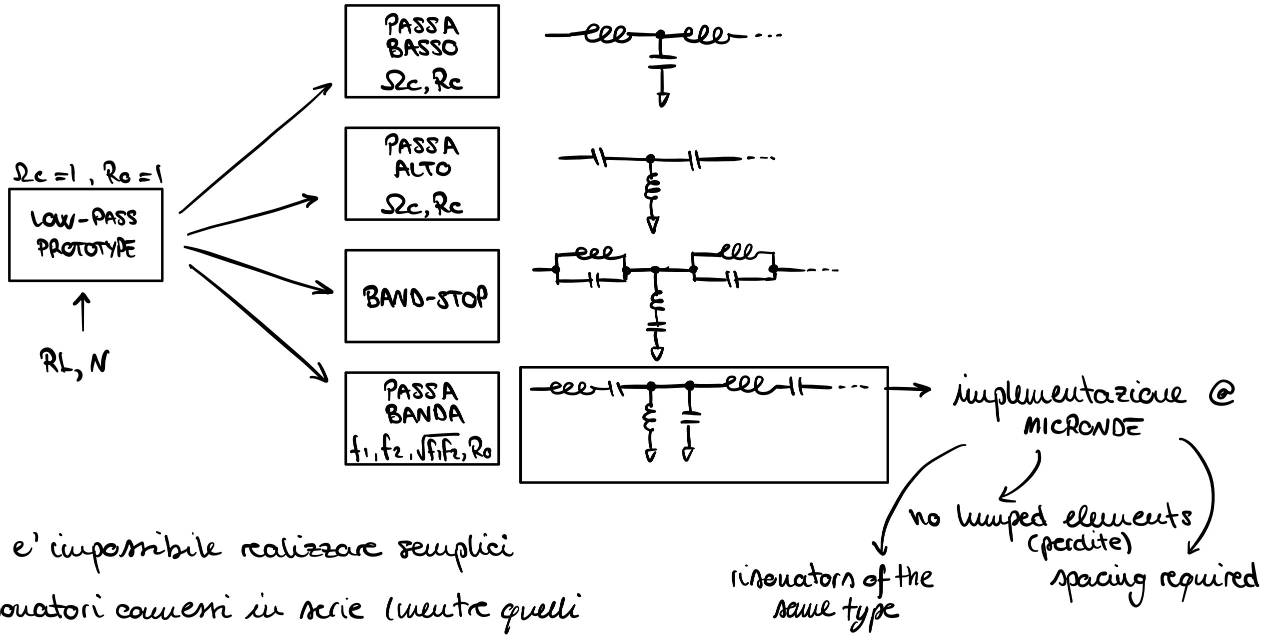
$R_o, f_1, f_2, R_L, \begin{cases} A_{s1} \text{ @ } f_{s1} \\ A_{s2} \text{ @ } f_{s2} \\ \dots \end{cases}$

⇓

$1, \; \Omega_{s1}, \Omega_{s2}, \dots, \; R_L$ ⇒



DESIGN DI FILTRI



→ e' impossibile realizzare semplici risonatori connessi in serie (mentre quelli di parallelo sono ok)

→ la soluzione migliore per una implementazione a microonde e' tramite l'utilizzo di elementi distribuiti connessi ad una distanza non trascurabile fra loro.

↓

anzi, molto spesso la connessione fra gli elementi puo' essere parte integrante del filtro stesso

FILTRO USANDO GLI "INVERTITORI"

si parla di invertitori d'impedenza, che sono reti a 2-porte senza perdite che quando e' presente sulla porta 2 un carico Z_L lo trasforma in un carico con impedenza $\frac{K^2}{Z_L}$, dove K e' il parametro di inversione (impedenza reale $[\Omega]$); si parla anche di invertitori d'ammettenza che trasformano Y_L in $\frac{J^2}{Y_L}$, dove J e' un'ammettenza reale $[\Omega^{-1}]$

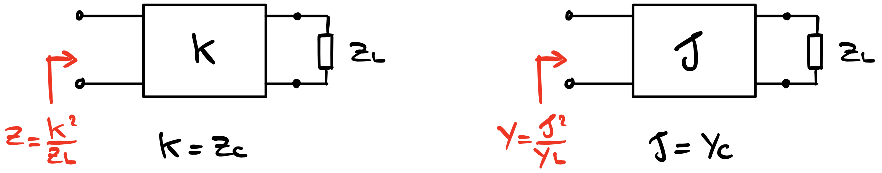
l' esempio piu' semplice e' una sezione di linea di tx di impedenza Z_c e lunghezza $\frac{\lambda}{4}$

invertitore d'impedenza:

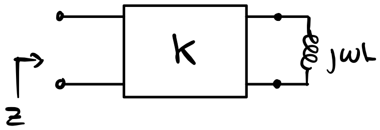
invertitore d'ammettenza:

→ permettono di cambiare la topologia:

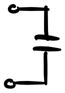
Quindi ho che :



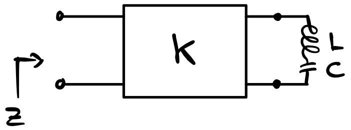
e se metto un carico induttivo ho che diventa capacitivo:



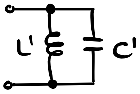
$$Z = \frac{K^2}{j\omega L} = -j\frac{K^2}{\omega L} \Rightarrow \boxed{C = \frac{L}{K^2}} \Rightarrow$$



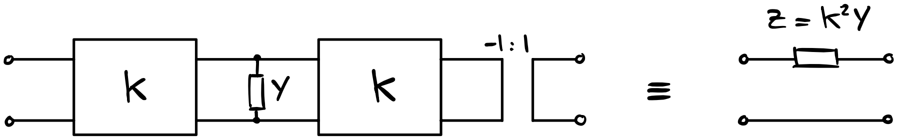
se invece metto una serie LC diventa un parallelo:

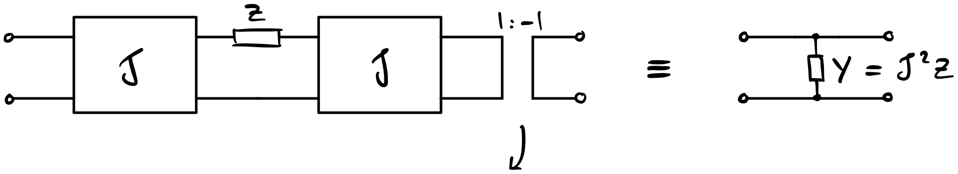


$$Z = \frac{K^2}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega K^2}{1 - \omega^2 LC} \Rightarrow$$



$$\boxed{\begin{aligned} L' &= CK^2 \\ C' &= \frac{1}{\omega_0^2 L} \end{aligned}}$$





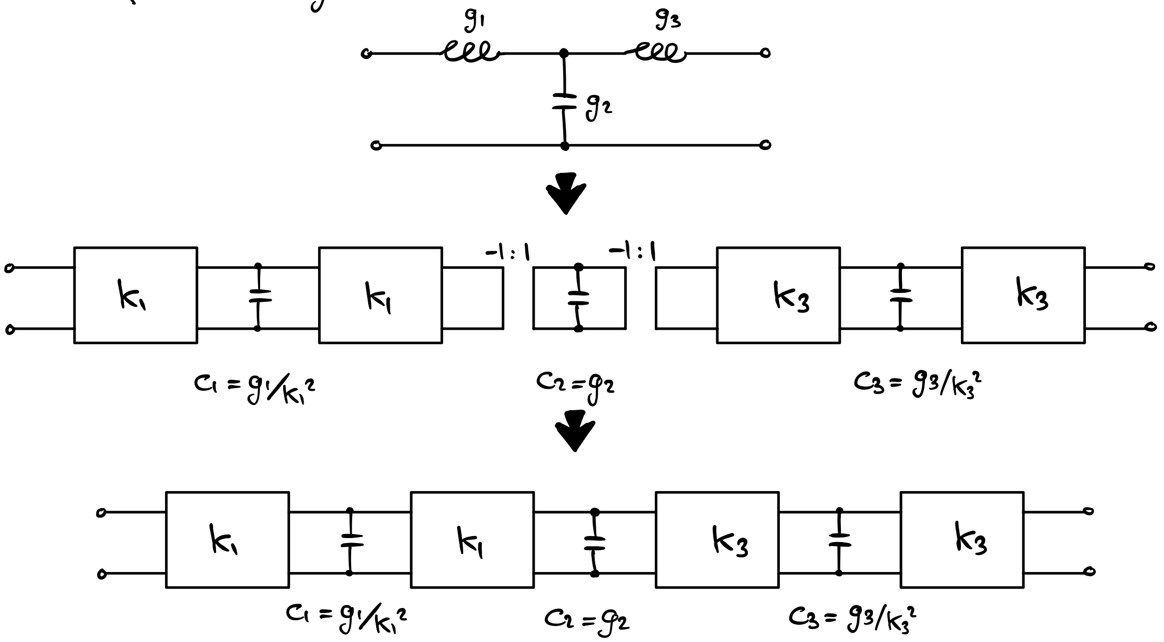
il trasformatore 1:-1 alla fine cambia solo la fase dei parametri di scattering $\underline{\underline{T}}_{trasf} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

l'equivalenze sopra si dimostrano tramite le matrici ABCD:

imp: $\underline{\underline{T}}_{inv} = \begin{bmatrix} 0 & jK \\ j/K & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{T}}_{series} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

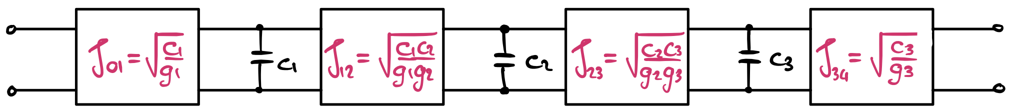
ammet: $\underline{\underline{T}}_{inv} = \begin{bmatrix} 0 & j/J \\ jJ & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{\underline{T}}_{shunt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$

Grazie a quanto detto possiamo sostituire il prototipo del filtro passa-basso in una nuova forma in cui non sono più presenti elementi in serie, come fatto di seguito:



in questo modo riesco a realizzare anche impedenze che sarebbero costituite da componenti ingombranti o troppo piccoli

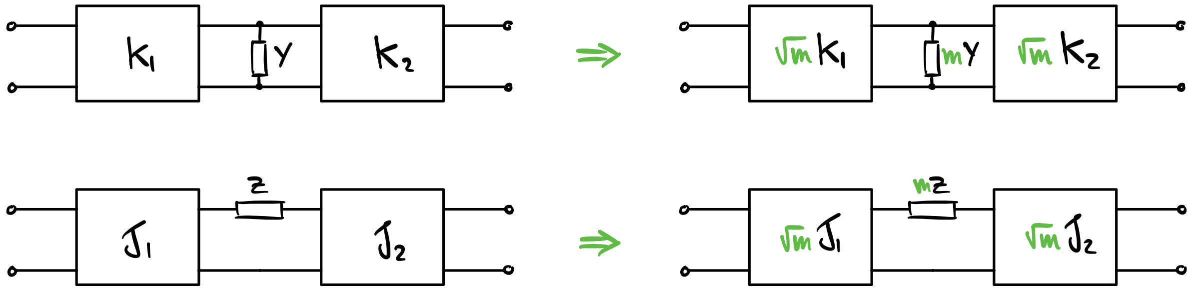
Possiamo usare anche invertitori d'ammettenza: (C_1, C_2, C_3 arbitrari)



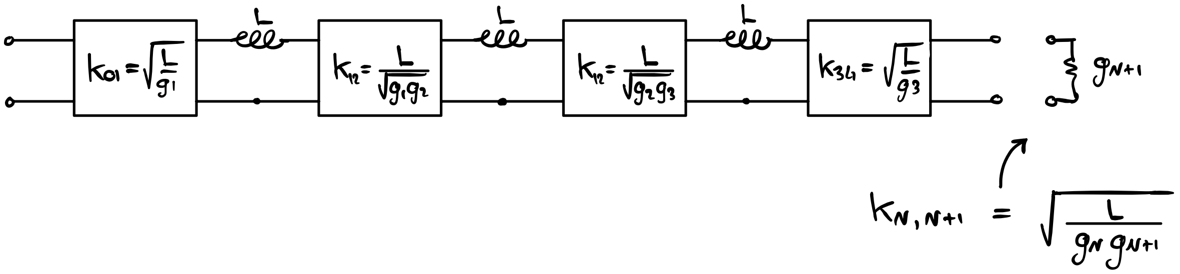
→ ho realizzato tutti risonatori paralleli !

→ usare un invertitore d'impedenza k e' del tutto equivalente ad usare un invertitore d'ammettenza con $J = \frac{1}{k}$

→ per effettuare lo scaling basta moltiplicare per m le capacita' e per $\sqrt{m}$ gli invertitori (d'impedenza o ammettenza)



Consideriamo anche il carico finale g_{N+1} (come esempio uso L anziche' C):



Pero' non ha molto senso fare cosi', ma e' piu' conveniente scalare tutti i valori in modo che il circuito finale sia fatto da condensatori (induttori) unitari e da sorgente e carico unitari e di invertitori che hanno valori:

$$K_{01} = \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}} \qquad J_{01} = \frac{1}{\sqrt{g_0 g_1}}$$

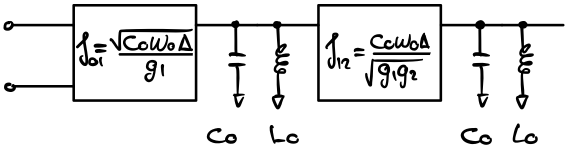
$$K_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} \qquad J_{i,i+1} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

$$K_{N,N+1} = \frac{1}{\sqrt{g_N g_{N+1}}} \qquad J_{N,N+1} = \frac{1}{\sqrt{g_N g_{N+1}}}$$

(spesso $g_0 = 1$)

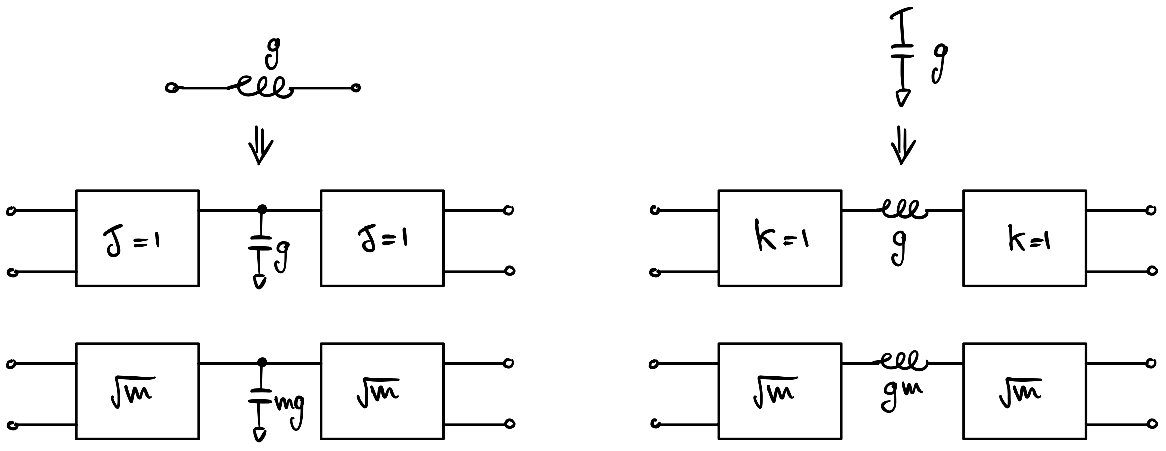
con $i = 1, 2, \dots N-1$

Vediamo ora qual e' il circuito equivalente per un filtro passa-banda con tutti gli elementi in parallelo:

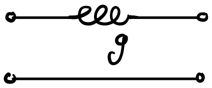


→ e' analogo a prima, cambia solo serie o parallelo di L e C del prototipo

RICAPITOLANDO



Riusciamo a calcolare la matrice d'impedenza di:

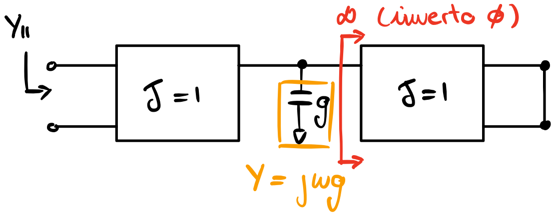


$Z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$ → non riesco a calcolarla!

Posso calcolare la matrice d'ammettenza però?:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{V_1}\Big|_{V_2=0} = \frac{1}{j\omega g}$$

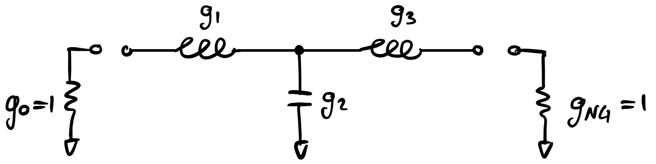
Proviamo a fare la stessa cosa sul circuito equivalente:

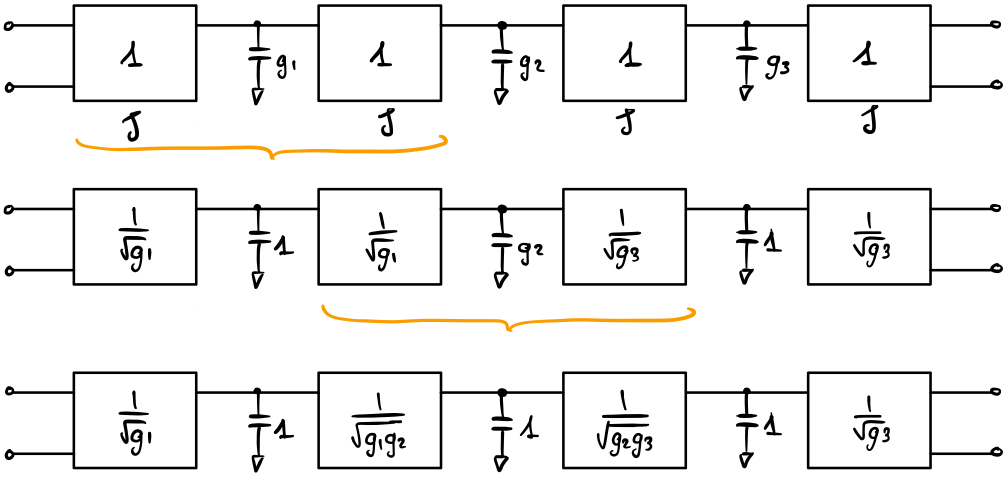


$$\Rightarrow \quad Y_{11} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{j\omega g}$$

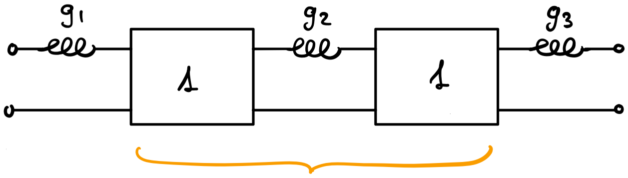
→ l'impedenza è la stessa (ovviamente... non so proprio cosa fare a lezione...)

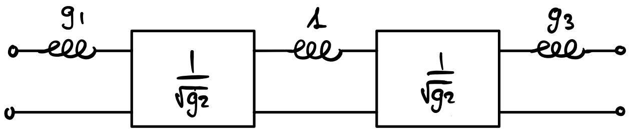
Trasforniamo in tutto-parallelo il seguente circuito:

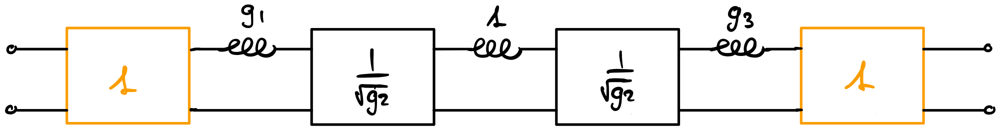




facciamo lo stesso supponendo di voler tutti elementi in serie (a volte è comodo)

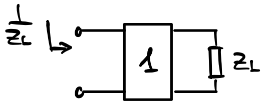






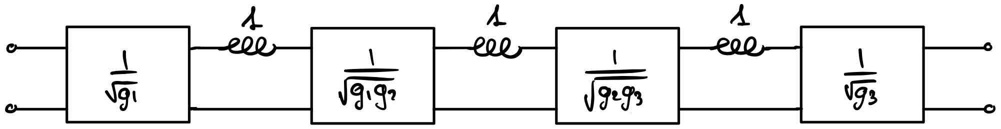
aggiungo due invertitori unitari

Vario l'impedenza e vario la fase del coefficiente di riflessione, ma non vario il suo modulo



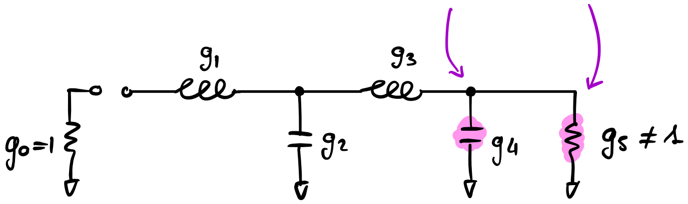
non cambio i parametri di scattering

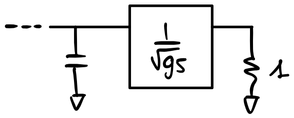
$|\Gamma(Z_L)| = |\Gamma(1/Z_L)|$



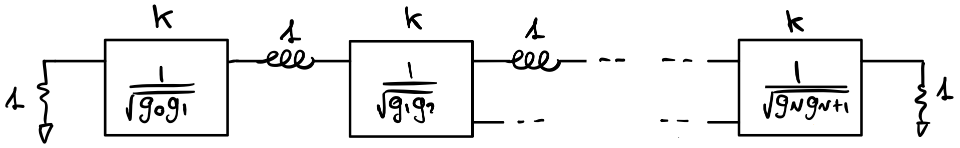
→ ho ottenuto un circuito equivalente a quello di partenza (ho gli stessi valori per gli invertitori che avevo nel caso parallelo)

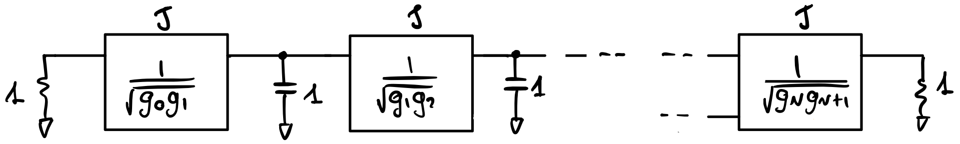
Supponiamo di avere anche g_4 e $g_5 \neq 1$ aggiunti al circuito di prima:





Quindi ho due nuovi prototipi di filtro passa-basso:

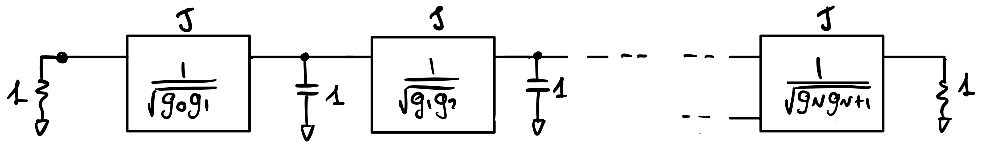




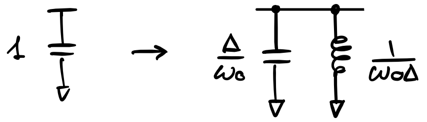
→ le strutture diventano simmetriche (sia per filtri di ordine pari, che dispari)

DA FILTRO PASSA-BASSO A PASSA-BANDA

parto dal modello passabasso che avevo prima:

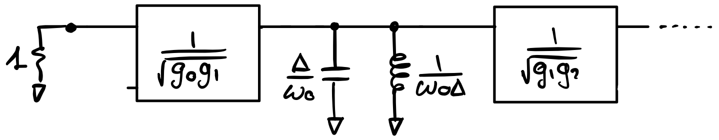


e converto le capacita' con risonatori in //:

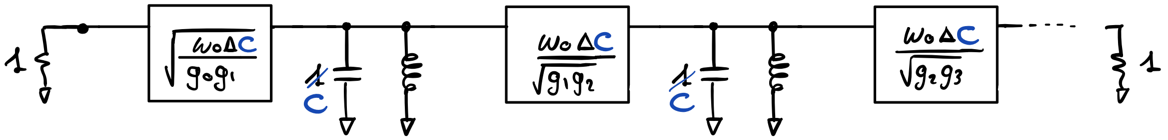


$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$ scelto C, L e' tale da generare risonanza in ω_0

e ottengo:



normalizzando:



⇒ se ho C, devo mettere C anche negli invertitori
se ho 1, ho uno dentro agli invertitori

TUTTI IN PARALLELO

$J_{01} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta C}{g_0 g_1}}$

$J_{i,i+1} = \frac{\omega_0 \Delta C}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$

$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta C}{g_N g_{N+1}}}$

con $C = 1$
con $C \neq 1$

TUTTI IN SERIE

$K_{01} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta \ell}{g_0 g_1}}$

$K_{i,i+1} = \frac{\omega_0 \Delta \ell}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$

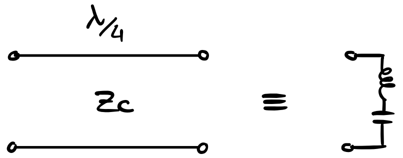
$K_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\omega_0 \Delta \ell}{g_N g_{N+1}}}$

con $\ell = 1$
con $\ell \neq 1$
↓
parametro di slope per

TRANSMISSION LINE RESONATOR

→ una possibile soluzione per implementare un risonatore e' usare una linea di trasmissione a $\frac{\lambda}{4}$ o a $\frac{\lambda}{2}$:

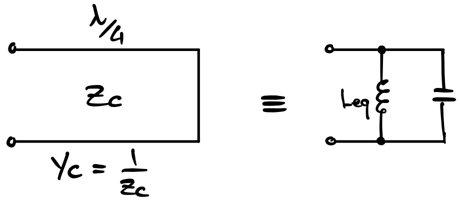
1)



$L_{eq} = \frac{Z_c}{8f_0} = \frac{\pi Z_c}{4\omega_0} \Rightarrow X_{eq} = \omega_0 L_{eq} = \frac{\pi}{4} Z_c$

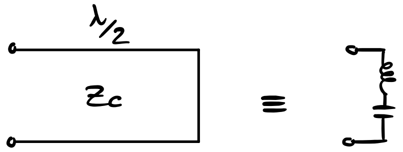
↳ l'altro parametro lo trovo sempre dalla condizione di risonanza $L_{eq}C_{eq} = \frac{1}{\omega_0^2}$

2)



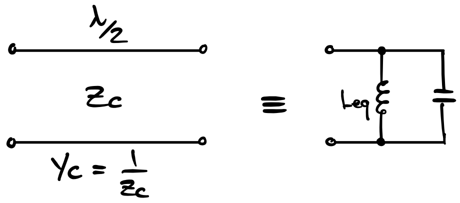
$C_{eq} = \frac{Y_c}{8f_0} = \frac{\pi Y_c}{4\omega_0} \Rightarrow B_{eq} = \omega_0 C_{eq} = \frac{\pi}{4} Y_c$

3)



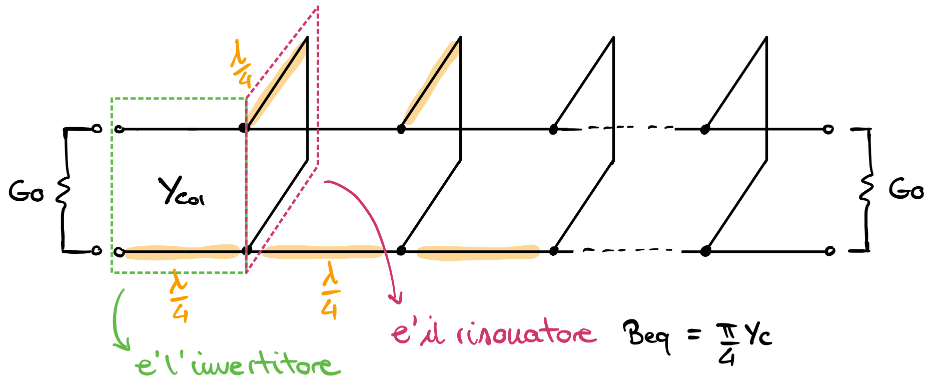
$L_{eq} = \frac{Z_c}{4f_0} = \frac{\pi Z_c}{2\omega_0} \Rightarrow X_{eq} = \frac{\pi}{2} Z_c$

4)



$C_{eq} = \frac{Y_c}{4f_0} = \frac{\pi Y_c}{2\omega_0} \Rightarrow B_{eq} = \omega_0 C_{eq} = \frac{\pi}{2} Y_c$

Filtro con risonatori $\frac{\lambda}{4}$ e con invertitori $\frac{\lambda}{4}$ (tutti in parallelo)



$B_{eq} = \frac{\pi}{4} Y_c$

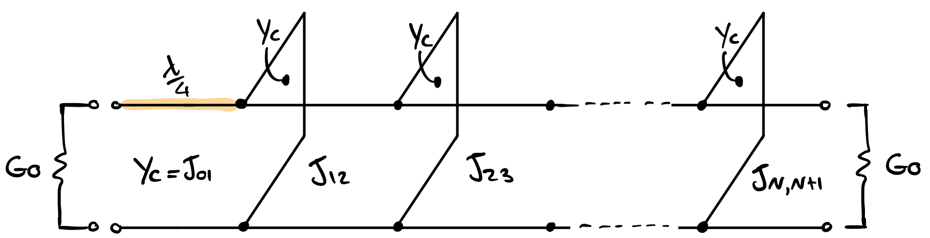
$$J_{01} = \sqrt{\frac{w_0 \Delta C}{g_0 g_1}} = \sqrt{\frac{w_0 \Delta C_{eq}}{G_0\, g_0 g_1}} \Rightarrow J_{01} = \sqrt{\frac{w_0 \Delta C_{eq} G_0}{g_1}} = \sqrt{\frac{\Delta G_0 B_{eq}}{g_1}}$$

$$J_{i,i+1} = \frac{w_0 \Delta C}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} = \frac{w_0 \Delta C_{eq}}{G_0 \sqrt{g_i g_{i+1}}} \Rightarrow J_{i,i+1} = \frac{w_0 \Delta C_{eq} G_0}{\sqrt{g_i g_{i+1}}} = \frac{\Delta B_{eq}}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

sostituisco $B_{eq} = \frac{\pi}{4} Y_c$

$$\left.\begin{aligned} J_{01} &= \sqrt{\frac{\Delta G_0 \pi Y_c}{4 g_1}} \\ J_{i,i+1} &= \frac{4\pi Y_c}{4\sqrt{g_i g_{i+1}}} \\ J_{N,N+1} &= J_{01} \end{aligned}\right\}$$ set di ammettenze caratteristiche che connettono i vari risonatori

$$\Downarrow$$



N $15\,\Omega < Z_c = \frac{1}{Y_c} < 130\,\Omega$ → Y_c ha poca variabilita' e questo potrebbe rappresentare un problema in alcuni casi; inoltre l'ammettenza caratteristica degli invertitori e' proporzionale alla larghezza di banda relativa (Δ) o alla sua radice e ciò implica che filtri con banda molto stretta potrebbero non essere realizzabili a causa dell'ammettenza caratteristica necessaria troppo grande:

$$Y_{c01} = \sqrt{\Delta \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{-o Y_{cr}}{g_0 g_1}}$$

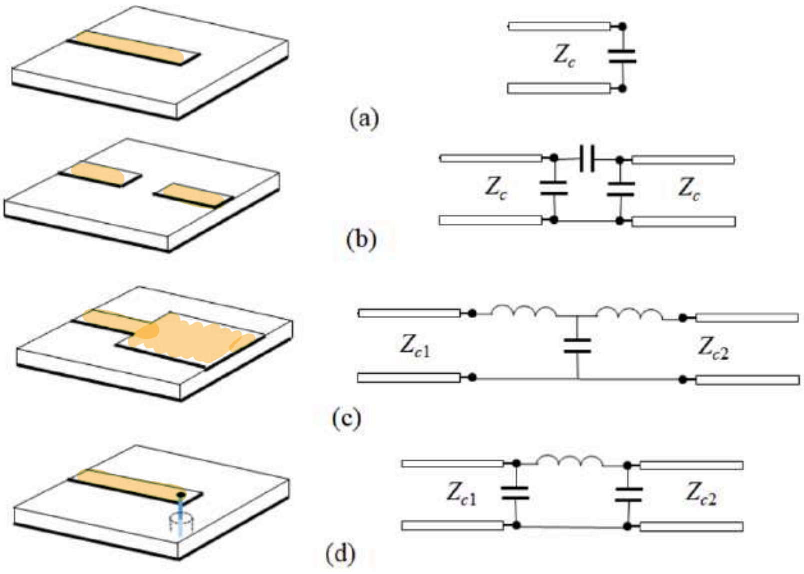
$$Y_{ci,i+1} = \Delta \frac{\pi}{4} \frac{Y_{cr}}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

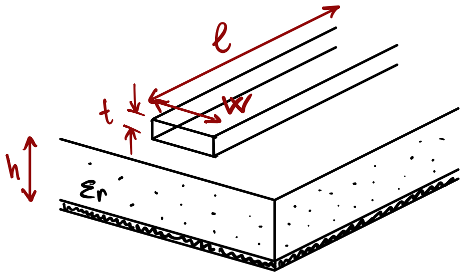
di solito $G_0 = \frac{1}{50}\,[\Omega^{-1}]$

$$Y_{cN,N+1} = \sqrt{\Delta \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{G_0 Y_{cr}}{g_N g_{N+1}}}$$

IMPLEMENTAZIONE IN MICROSTRISCIA

Un modo per implementare le linee di trasmissione e' tramite microstrisce (microstrip) anche se queste introducono effetti capacitivi (ai bordi) non sempre (anzi, quasi mai) trascurabili. Inoltre, anche le giunzioni introducono effetti reattivi che vanno considerati (vedi schema successivo)



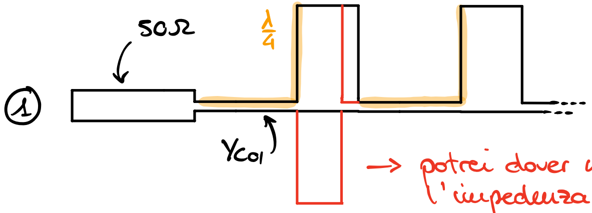


$\varepsilon_r, t, h, \ell, w$ sono i parametri caratteristici per una microstriscia (alcuni possono essere gia' assegnati, altri sono modellabili per la realizzazione del filtro)

→ di solito ε_r, h e t sono assegnati

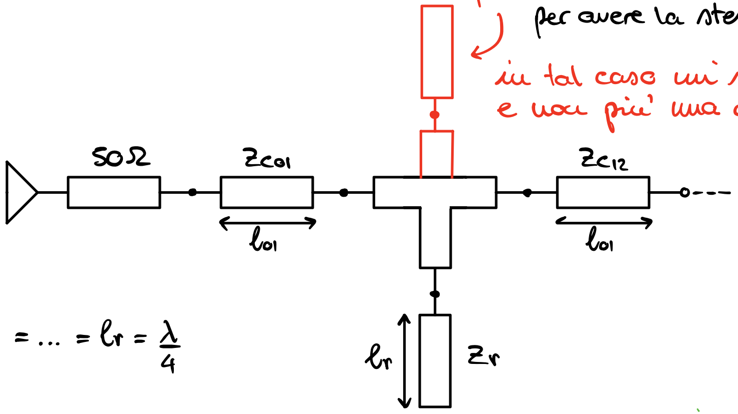
→ e ℓ e w vanno scelti ($\ell \rightarrow \frac{\lambda}{4}$ e $w \rightarrow Z_c$ bene o male...)

Di seguito una possibile implementazione in microstriscia e il relativo modello usato nella simulazione del circuito



→ potrei dover usare un doppio stub, se ad esempio l'impedenza e' molto bassa (in questo caso anche piu' stretta per avere la stessa slope parameters ou Beq del risonat.

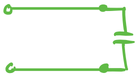
in tal caso mi serve una giunzione a croce e non piu' una a T



→ modello della simulazione

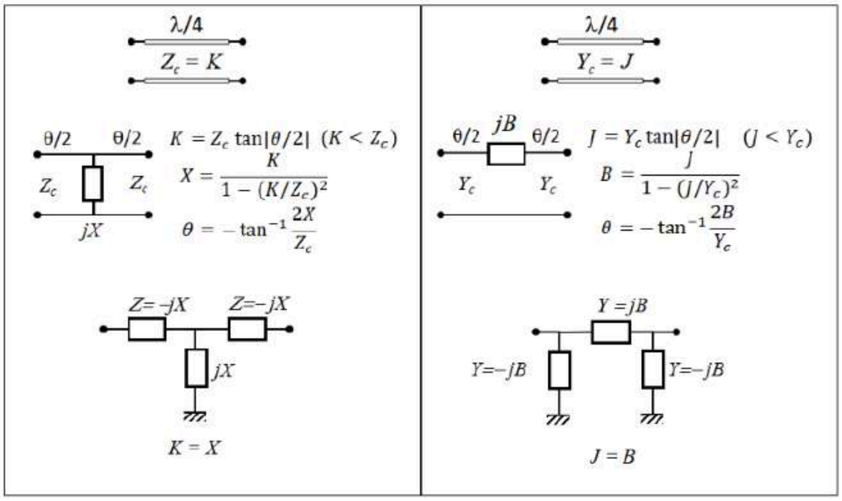
$l_{01} = \dots = l_r = \frac{\lambda}{4}$

↳ non e' un circuito aperto ideale ma e' presente un effetto capacitivo

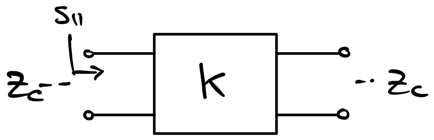


→ la simulazione viene svolta eseguendo un modello del comportamento elettro-magnetico del circuito

Come faccio ad implementare un invertitore? Ho almeno 3 modi rappresentati di seguito:



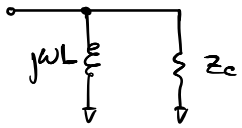
Inoltre, data l'impedenza di sorgente e di carico Z_c, qualsiasi circuito 2-porte simmetrico senza perdite che fornisce un coefficiente di riflessione S_{11} reale si comporta come un invertitore di impedenza pari a K:



$$S_{11} = \frac{\frac{K^2}{Z_c} - Z_c}{\frac{K^2}{Z_c} + Z_c} = \frac{\frac{K^2}{Z_c^2} - 1}{\frac{K^2}{Z_c^2} + 1}$$

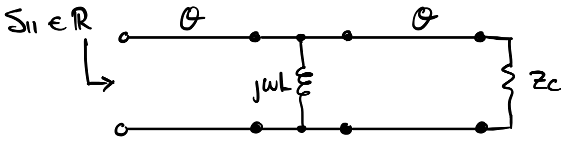
$$\Rightarrow K = Z_c \sqrt{\frac{1+S_{11}}{1-S_{11}}}$$

ad esempio, consideriamo un parallelo tra L e il carico:



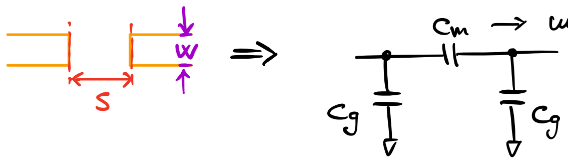
→ l'impedenza che vediamo e' complessa

→ posso aggiungere una linea tx prima e dopo l'impedenza complessa in modo tale che quando chiudiamo sul carico Z_c dall'ingresso vediamo valori reali del coefficiente di riflessione → e' sempre possibile farlo (anche se alcuni circuiti funzionano meglio di altri)



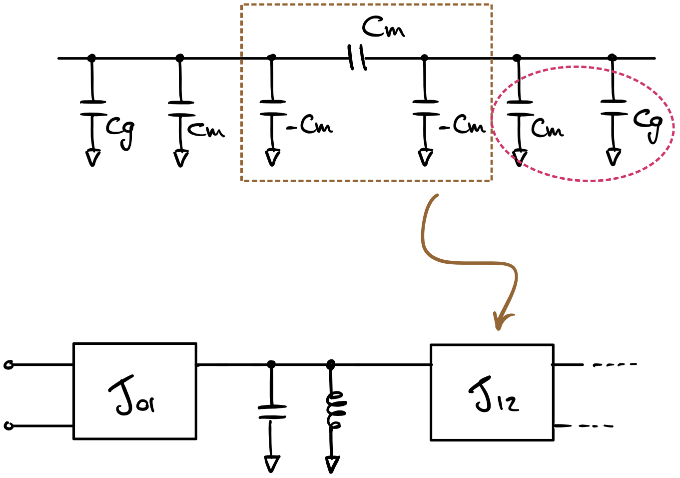
→ un filtro che sfrutta questo concetto e' l'end-coupled resonator filter:

→ insomma... meglio variarlo un poco:



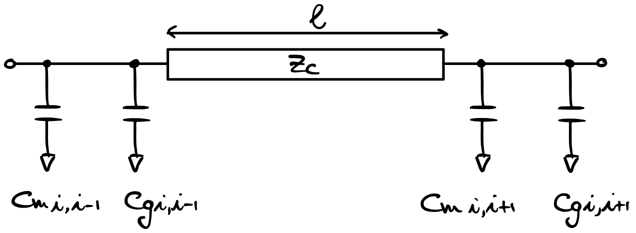
C_m → mutual capacitance (modella l'accoppiamento)

C_g → capacita' verso ground (modellano gli effetti del bordo verso massa) inverter con parametro $J = \omega C_m$



agisce per aumentare la lunghezza del risonatore
capacita' verso GND: $C_g + C_m$

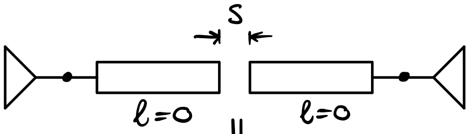
⇒ quello che ho e':



→ voglio trovare s e ℓ

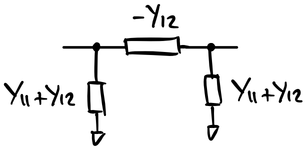
N.B.: i parametri sono legati perche' variando s, vario Cg e Cm e variando Cg vario anche il risonatore oltre all'inverter
↓
entrambi quelli interessati al gap!

La prima cosa da fare e' trovare i parametri di scattering tramite la even-odd mode analysis



⇓

calcolo l'ammettenza $\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$



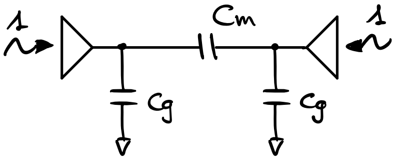
$$\begin{cases} -Y_{12} = j\omega C_m \\ Y_{11} + Y_{12} = j\omega C_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_m = j\dfrac{Y_{12}}{\omega_0} \\ C_g = \dots \end{cases}$$

⇒ $J = \omega_0 C_m = -B_{12}$ ⇒ trovo il valore di Cm che mi fornisce il giusto invertitore

⇒ la stessa cosa faccio con Cg

⇒ posso procedere come segue

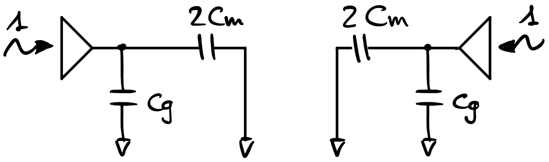
Se la struttura e' eccitata da una eccitazione uniforme, nella capacita' reciproca non c'e' caduta di tensione, quindi il coefficiente di riflessione del modo pari e' dovuto solo a C_g:



$$S_{even} = S_{11} + S_{12} = \frac{\frac{1}{j\omega C_g} - Z_c}{\frac{1}{j\omega C_g} + Z_c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega C_g} = Z_c \frac{1 + S_{even}}{1 - S_{even}}$$

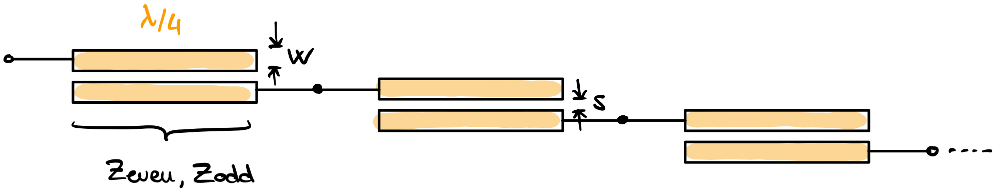
Per trovare C_m eccito la struttura in modo dispari: in tal caso la capacita' C_m puo' essere divisa in una serie di due capacita' $2C_m$ con punto centrale messo a ground



$$S_{odd} = S_{11} - S_{12}$$

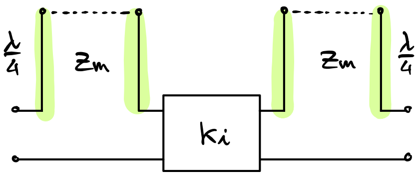
$$\Rightarrow \frac{1}{j\omega C_g + j\omega 2C_m} = Z_c \frac{1 + S_{odd}}{1 - S_{odd}}$$

Un'altra tipologia di filtri e' detta **edge-coupled microwave filter** e sono formati da sezioni di linea accoppiate che realizzano invertitori e risonatori; lo schema e' il seguente:



→ il progetto deve valutare i valori di w e s da usare per il filtro richiesto

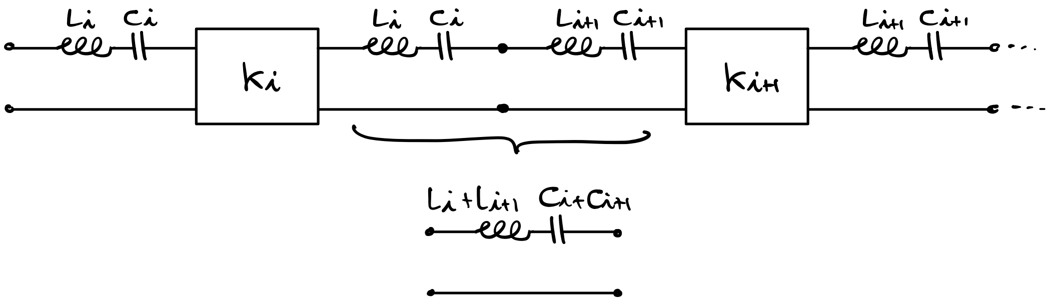
→ il circuito equivalente di una sezione e':



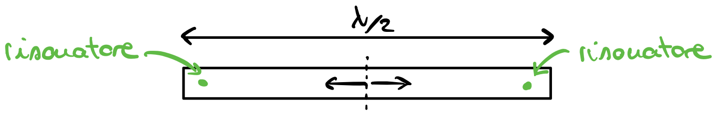
impedenze caratteristiche dei modi pari e dispari delle linee accoppiate

$$Z_m = \frac{Z_{even} + Z_{odd}}{2} \simeq Z_c$$

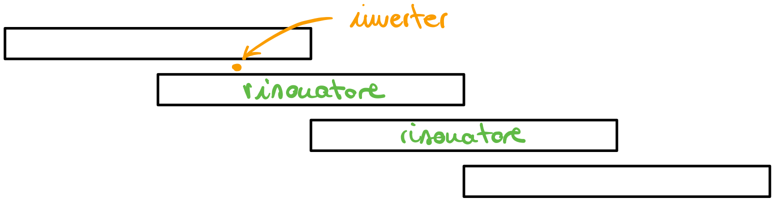
$$K = \frac{Z_{even} - Z_{odd}}{2}$$



per ciascuna sezione di linee accoppiate c'e' un risonatore aggiuntivo collegato all' ingresso e all' uscita

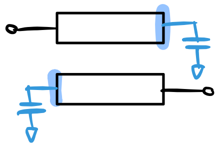


⇒ vedo due risonatori

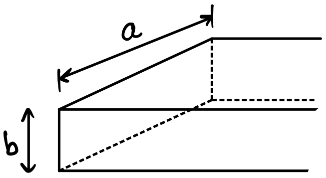


→ semplicemente, posso trascurare la sua presenza e poi correggere la progettazione mediante una "post-elaborazione".

→ inoltre ho i soliti effetti capacitivi



FILTRI A GUIDA D'ONDA



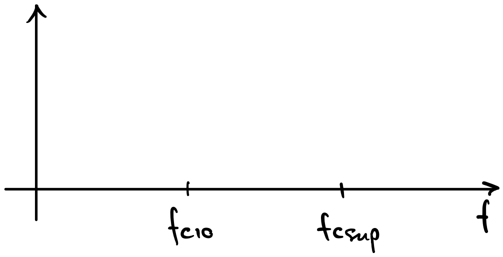
TE10 mode

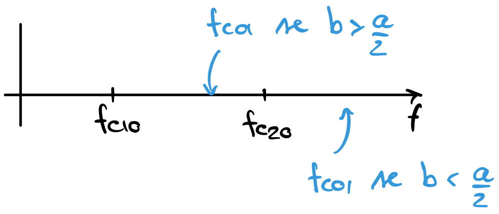
TE_{01} $b \geq \frac{a}{2}$

TE_{20} $b \leq \frac{a}{2}$ } di solito $b = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow f_{csup} = 2 f_{c10}$

per massimizzare la banda





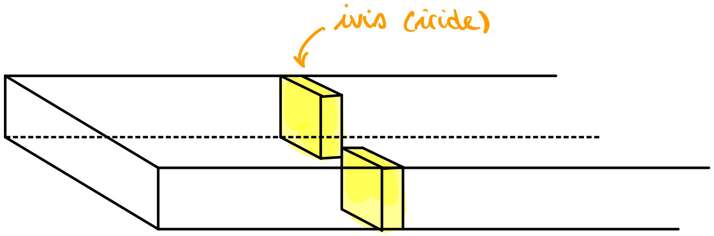
→ le perdite dipendono da b (maggiore e' b, minore sono le perdite)

fissiamo $b \overset{\text{e' una scelta comune}}{=} \frac{a}{2}$, e quindi $f_{c,sup} = 2 f_{c10}$, allora ho che f_0, freq. centrale tra f_{c10} e $f_{c,sup}$ vale:

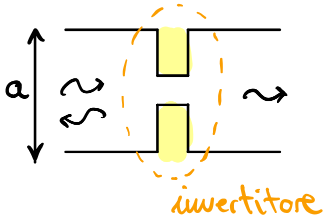
$$f_0 \simeq \frac{3}{2} f_{c10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{v}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{4 f_0}{3 v}}$$

consideriamo una struttura che riflette l'onda e usiamola come un invertitore (in questo caso nella guida d'onda)

↳ $\boxed{K}$



dall' alto:



→ per conoscere i valori progettuali dell' inverter bisogna fare una simulazione EM per l'iris

Facciamo un richiamo sulle equazioni base sulla propagazione nelle guide d'onda rettangolari:

→ ho un modo dominante: il TE_{10}

→ la costante di propagazione vale $\boxed{\beta = k\sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = kF}$

dove ho che: $k = \frac{\omega}{v}$

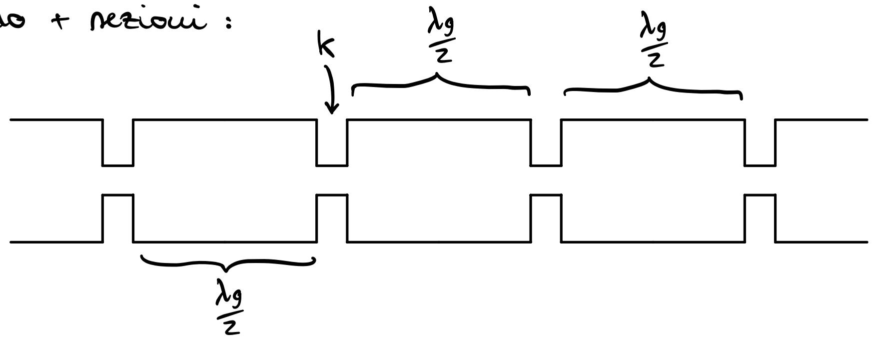
$f_c = \frac{v}{2a}$ e' la frequenza di taglio della guida rettangolare

$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

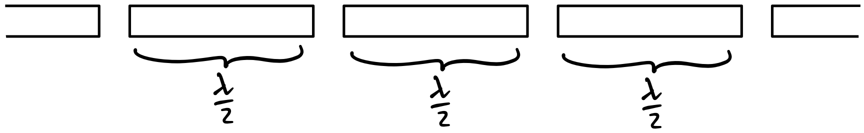
→ il waveguide factor e' definito come: $F = \sqrt{1-\left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

→ la lunghezza d'onda nella guida e' $\boxed{\lambda_g = \frac{\lambda}{F}}$ e quindi $\lambda_g > \lambda$

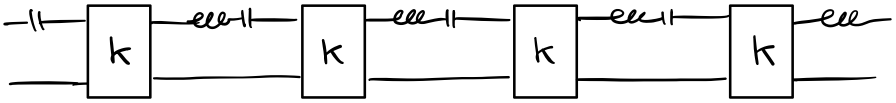
Considerando + sezioni:



che e' equivalente alla microstriscia:

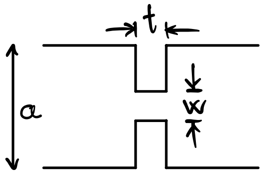


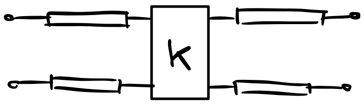
e quindi a un circuito del seguente tipo:



N.B.: visto che l'iris agisce come un quasi cortocircuito, allora il circuito che devo utilizzare e' quello con tutti gli elementi in serie + k (e non quello con //)

Adesso bisogna trovare i parametri di scattering dell'iris (S_{11} e S_{21}):



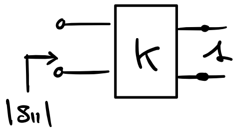


ho che $k < 1$ e che

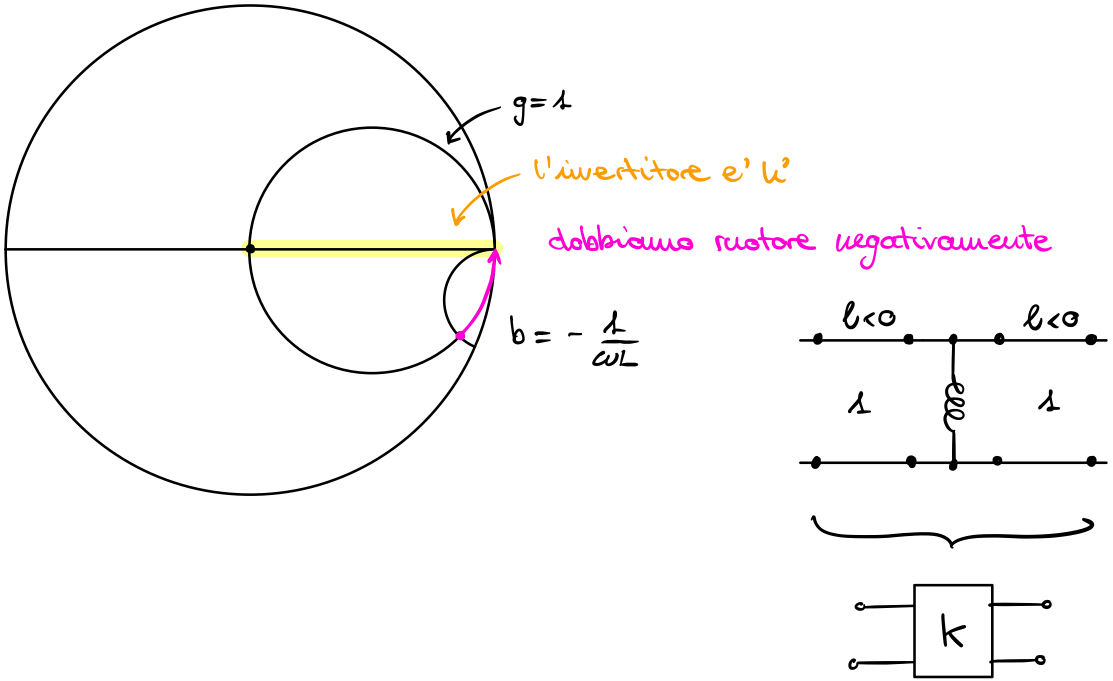
$$|S_{11}| = \left| \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \right| \qquad S_{11} = -|S_{11}|$$

da cui ricavo che

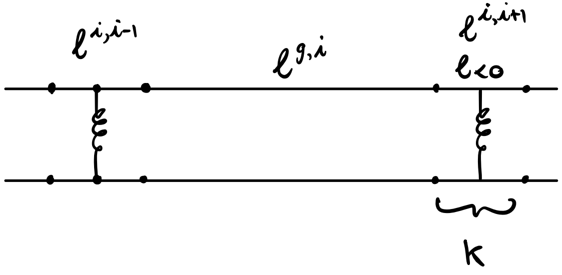
$$k = \sqrt{\frac{1 - |S_{11}|}{1 + |S_{11}|}}$$



usiamo la carta di Smith:



e quindi ho che



Quindi per una guida d'onda di lunghezza l_g con due irises ai termini avrò:

$$l_{g,i} + l_{i,i+1} + l_{i,i-1} = \frac{\lambda_g}{2}$$

Per trovare i valori dell' iride dobbiamo simulare:

$$L_{eq} = \frac{1}{2}\frac{dX}{d\omega} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}\left(\tan \frac{\omega}{v} \ell\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \beta \ell}\left(\frac{F\ell}{v} + \frac{\omega \ell}{v} \cdot \frac{dF}{d\omega}\right)\Big|_{\omega_0} = \frac{\ell}{2vF_o}$$

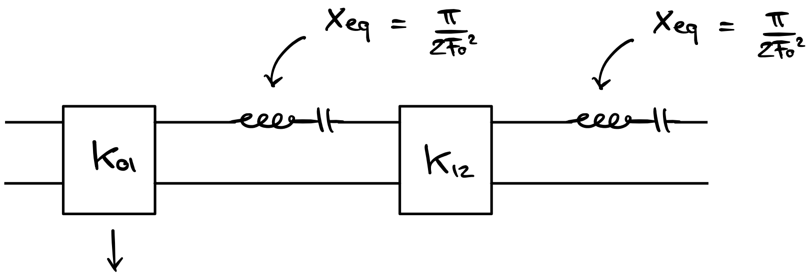
Come step finale dobbiamo trovare i parametri di slope del risonatore in serie:

$Z = j\tan \beta \ell = j X_{in}$ e' l' impedenza d'ingresso normalizzata

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} L_{eq} &= \frac{1}{4f_o F_o^2} \\ X_{eq} &= \omega_0 L_{eq} = \frac{\pi}{2F_o^2} \end{aligned}}$$

puo' essere anche scritto come $L_{eq} = \dfrac{\left(\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_o}\right)^2}{4f_o}$

e cosi' ho tutto per il design del filtro



$K_{01} = \sqrt{\Delta}\sqrt{\frac{X_{eq}}{g_1}}$ e $K_{i,i+1} = \frac{\Delta X_{eq}}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$

RISONATORI CILINDRICI

→ sono detti FILTRI A CAVITA' e vengono usati nella parte più alta dello spettro delle microonde perché hanno Q molto buono e basse perdite

↳ in questo filtro le cavità (vuote) sono accoppiate da piccole aperture sulle pareti laterali

↳ svolgono il ruolo di INVERTER

Per questo genere di filtri usiamo un approccio più generale che si basa sul concetto di coefficiente di accoppiamento:

ipotizziamo un insieme di cavità con frequenza angolare di risonanza ω_0 e scriviamo le equazioni ottenute precedentemente dal prototipo passa-banda:

$$J_{0,1} = \sqrt{\frac{\Delta r \, B_{eq,1}}{g_0 g_1}} \qquad \text{con } B_{eq} = \omega_0 C_{eq}$$

$$J_{i,i+1} = \Delta r \sqrt{\frac{B_{eq,i} B_{eq,i+1}}{g_i g_{i+1}}} \qquad i = 1, \dots N-1$$

$$J_{N,N+1} = \sqrt{\frac{\Delta r \, B_{eq,N}}{g_N g_{N+1}}} \qquad \text{(i parametri sono tutti normalizzati)}$$

→ introduciamo il coupling coefficient $k_{i,i+1}$ tra il risonatore i e $i+1$:

$$\boxed{k_{i,i+1} = \frac{J_{i,i+1}}{B_{eq}} = \frac{J_{i,i+1}}{\omega_0 C_{eq}}}$$

→ è un numero puro e ci permette di semplificare la descrizione nel caso di + risonatori...

↓

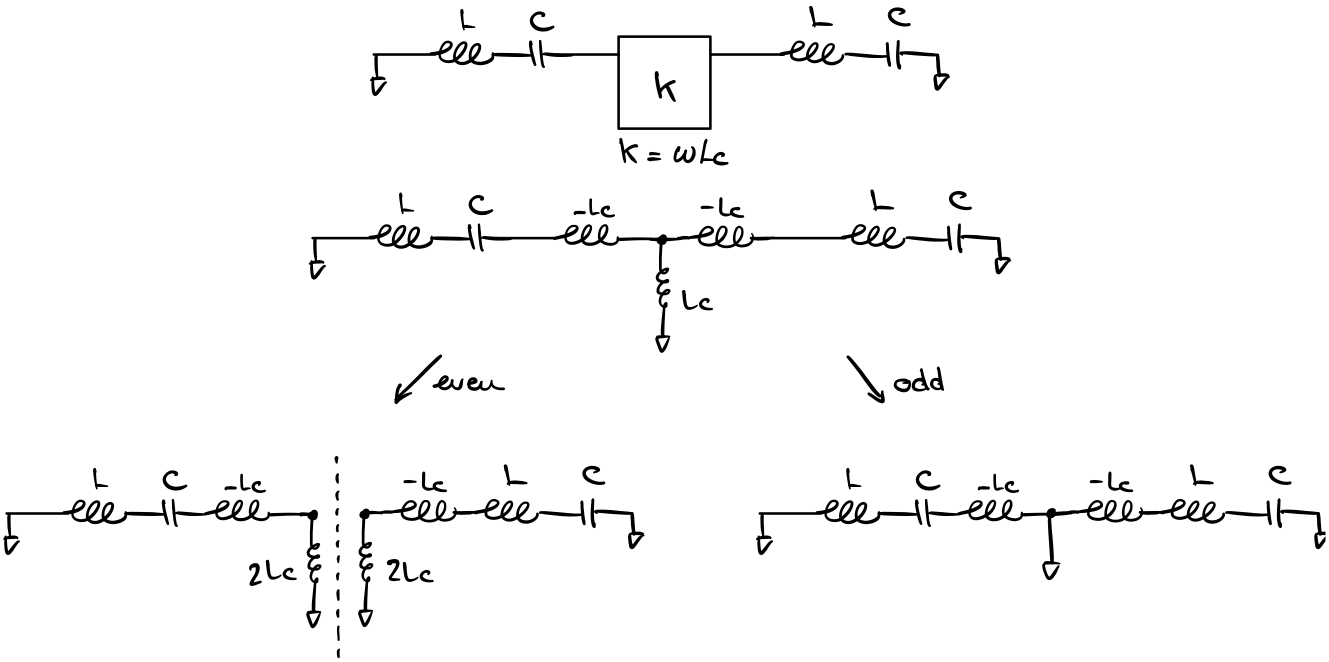
inoltre è indipendente dall'alimentazione

oppure, usando un prototipo passa-banda all-series:

$$\boxed{k_{i,i+1} = \frac{K_{i,i+1}}{eq} = \frac{K_{i,i+1}}{\omega_0 L_{eq}}}$$

esso è una misura di quanto i due risonatori sono accoppiati fra loro

Consideriamo un circuito con due coupled resonators :



se $K = 0$ (non abbiamo accoppiamento) allora $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

se $K \neq 0$ allora dobbiamo fare un'analisi dei modi dispari e pari:

$$f_{even} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L+L_c)C}} \overset{L_c>0}{\overset{\downarrow}{<}} f_0 \qquad f_{odd} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(L-L_c)C}} \overset{L_c>0}{\overset{\downarrow}{>}} f_0$$

usando la definizione posso calcolare k:

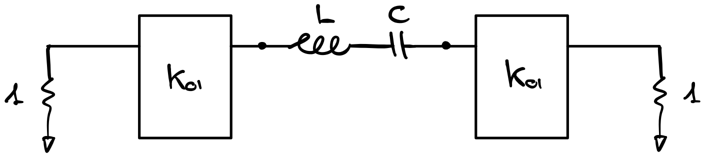
$$k = \frac{K}{\omega_0 L} = \frac{L_c}{L} = \dots = \frac{f_{even}^2 - f_{odd}^2}{f_{even}^2 + f_{odd}^2}$$

e da qui ottengo che:

$$k_{i,i+1} = \left(\frac{f_{even}^2 - f_{odd}^2}{f_{even}^2 - f_{odd}^2}\right)_{i,i+1} = \frac{\Delta v}{\sqrt{g_i g_{i+1}}}$$

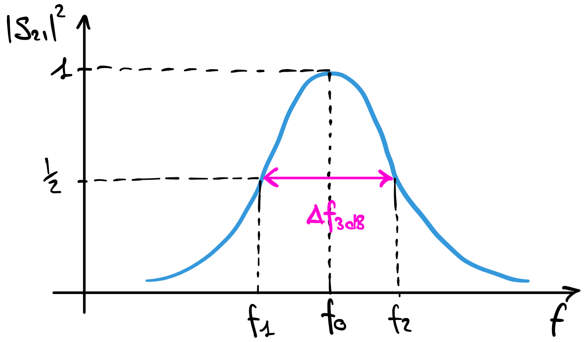
→ avrei ottenuto lo stesso risultato considerando il circuito shunt

Rimane da capire il comportamento dell'accoppiamento INPUT/OUTPUT e studiamo il circuito equivalente (sono dei trasformatori):



ho che:

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{2 K_{01}^2} = \frac{f_0}{\Delta f_{3dB}}$$



$$\Rightarrow \boxed{K_{01}^2 = \frac{\omega_0 L}{2 f_0} \Delta f_{3dB}}$$

$$K_{01} = \sqrt{\frac{\Delta r \cdot \omega_0 L}{g_0 g_1}}$$

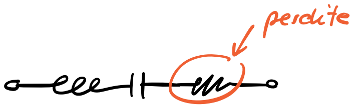
$$\frac{\Delta r \cdot \cancel{\omega_0 L}^{1}}{g_0 g_1} = \frac{\cancel{\omega_0 L}^{1}}{2 f_0} \Delta f_{3dB} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f_{3dB}}{2 f_0} = \frac{\Delta r}{g_0 g_1}}$$

e' un metodo iterattivo! { questi parametri di design li trovo dalla simulazione EM che mi fornisce $|S_{12}|^2$ e quindi Δf_{3dB} e f_0

PERDITE

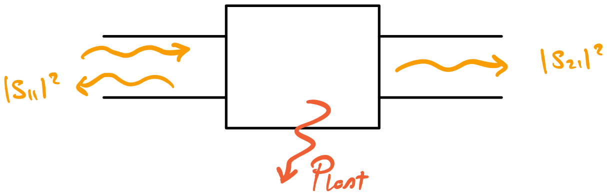
le perdite tendono ad "addolcire" la curva e quindi sono dannose per larghezze di banda relative molto piccole → posso avere dei problemi con l'insertion loss IL e quindi possono "rompere" la maschera del progetto ai bordi della banda

Consideriamo il fattore di qualita' $Q = \omega \frac{L}{R}$

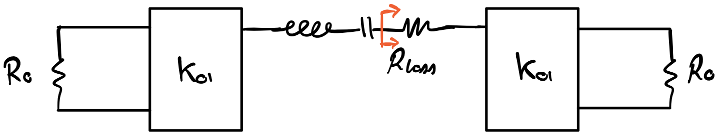


→ dispositivo LOSSLESS: $|S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2$

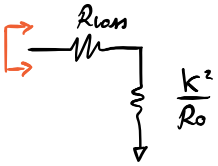
→ dispositivo LOSSY: $|S_{21}|^2 < 1 - |S_{11}|^2$



→ minore e' la banda e maggiori sono le perdite perche':



=> da qua vedo



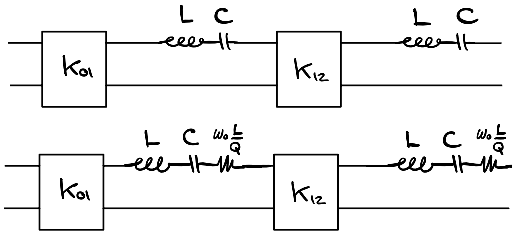
=> $k \sim \sqrt{\Delta r}$
↓
minore e' la banda minore e' k e minore e' la resistenza

=> R_{loss} ha + impatto sulla serie se la banda e' piccola!

ad esempio potrei avere:

- RL > 18dB
- IL < 1 dB in banda

e conosco il filtro (senza perdite):



$Q = \omega \frac{L}{R}$ => $R = \omega \frac{L}{Q}$

↳ se non rispetto IL devo aumentare il fattore di qualita' => questo ha un impatto sul filtro che scelgo

- TX-LINE RESONATORS hanno $Q = 50 \div 500$ → molto ottimistico
- WAVEGUIDES hanno Q nell'ordine di alcune migliaia
- CAVITY RESONATORS hanno Q nell'ordine di decine di migliaia