MEMS (Webex) 13 Settembre 2021

Lezione di presentazione (4 giorno da Romiseda)

Lezione 1 (Soffitto)

TECNICHE PER LA CREAZIONE DEI DISPOSITIVI MEMS

Studiamo il processo di creazione per diversi motivi.
- Sapere come funzionano
- Sono fatti in silicio (perché sono stati usate le vecchie macchine usate nei CMOS poi il silicio è un ottimo materiale elastico ed è facile isolare i layer con l'ossido di silicio ed è anche un ottimo conduttore

Il processo limita molto le dimensioni dei sensori MEMS. (dimensioni minime)
MEMS: mettiamo i sensori in dei pakage molto piccoli (micrometri)

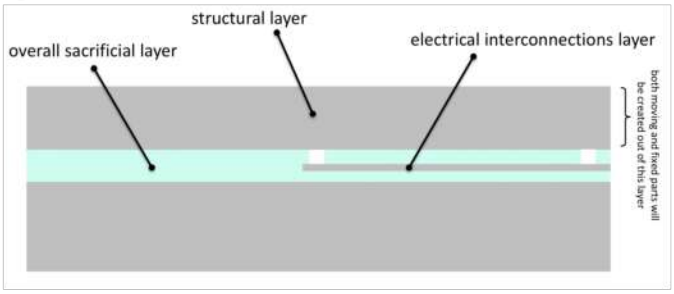
Ci sono 3 parti fondamentali nella creazione di un MEMS

- Layer strutturale (fatto in silicio e parzialmente libero di muoversi)
- Layer per portare le grandezze elettriche (interconnection layer)
- Sacrificial layer

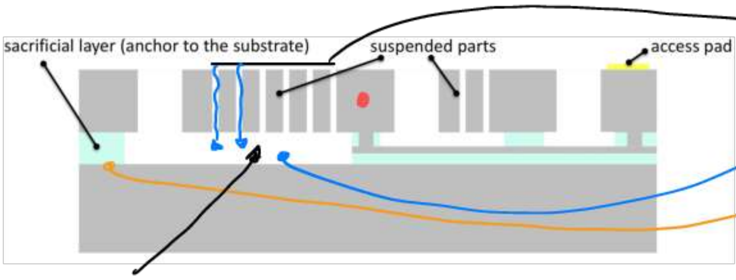
Prima cosa: Creare un layer che è non conduttivo (facciamo un layer di ossido di silicio) per fare ciò scaldiamo il silicio in un ambiente ad alto contenuto di ossigeno

Poi depositiamo un layer sottilissimo per portare le interconnessioni (lo mettiamo solo dove ci serve). Rifacciamo poi un secondo layer di silicio e rimuoviamo l'ossido di silicio dove vogliamo collegarci con il layer conduttivo.

Costruiamo adesso il layer strutturale (l'altezza di questo layer è tipicamente 20-100µm) abbastanza tanto rispetto agli altri layer.



Andiamo poi a fare un etching del silicio del piano strutturale utilizzando una mask e del piano sacrificale intero.
Eliminare tutto il layer sacrificale con i gas di etching è molto difficile, per questo sulle masse sospese sono messi dei buchi che permettono al gas di etching di entrare e rimuovere il layer sacrificale.



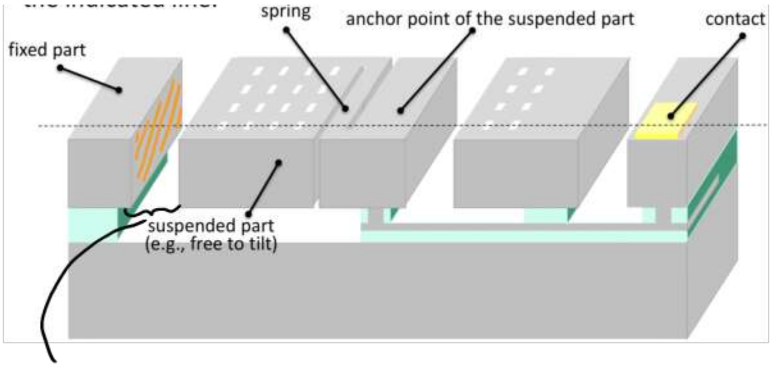
I BUCHI CHE DICEVO PRIMA.

DOVE ARRIVA LA CORRENTE

Qui è scomparso il layer sacrificale

RIMANGONO TUTTAVIA DELLE PARTI CHE NON SONO TOLTE LA GRANDEZZA DIPENDE DA QUANTO LASCIAMO LÌ IL GAS DI ETCHING

OVVIAMENTE QUESTA PARTE NON È CHE FLUTTUA MA È CONNESSA AL PUNTO



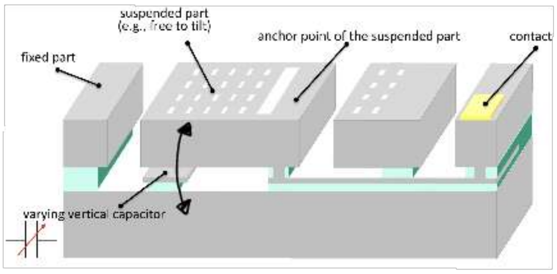
In pratica abbiamo questo

Se ad esempio muoviamo questo coso la parte sospesa connessa con una molla si muove

Come misuriamo questo movimento?

Qui ci sono 2 facce conduttive quindi abbiamo un condensatore che varia in base ai movimenti. (più precisamente sull'accelerazione)

e se volessimo misurare i movimenti nell'altra direzione? Cambiamo un attimo struttura



Questi sensori devono lavorare in assenza di polvere, perciò vengono incapsulati e viene fatto in modo che la pressione sia la stessa di quando incapsulo il sensore.
Solo i pad di connessione non sono incapsulati.
Dato che abbiamo pressione e quindi aria dentro il cap allora abbiamo anche attrito, teniamo conto di questo con il fattore b. ricordiamo poi inoltre che abbiamo una massa ed un fattore della molla K. (useremo infatti lo spring mass damper model)

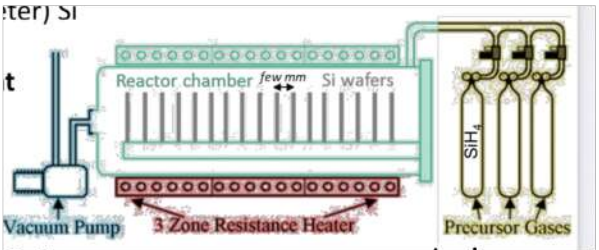
In un singolo wafer posso mettere 1000 mems circa.

LAYER STRUTTURALE

Noi vogliamo farlo alto così la massa è più grande e va meglio con i movimenti. Lo facciamo alto e non lungo perché in lunghezza ci occuperebbe + spazio sul wafer.
Cosa importante è che la grandezza sia uniforme.
Per depositare questo alto layer come si può fare?

Chemical vapor deposition (CVD)

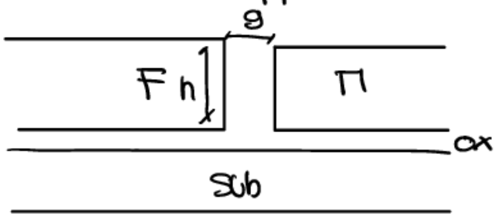
era usato ma per fare layer piccoli (~1µm)



Abbiamo una camera a temperatura controllata, poi facciamo fluire il gas SiH_4 che è un gas precursore che tramite processo chimico fa crescere il silicio
il problema di questa tecnica è che l'accrescimento è di nm al minuto. Che è molto poco
Allora la tecnica è stata modificata. Epitaxial growth
Non è una tecnica che crea la sovrapposizione dei cristalli perfetta però anche se abbiamo la struttura non regolare andiamo molto velocemente.
Aumentiamo la pressione e altre cose andiamo a livelli di ≈0,5-1µm/min.
il vantaggio di velocità vale sia in termini di costi e sia sul fatto che andando più veloci la probabilità che lo spessore sia circa uguale è + alta.

Con queste tecniche possiamo anche per crescere silicio drogato, noi vogliamo fare questo perché noi vogliamo che ci sia poca caduta nel path conduttivo fino al condensatore.

La minima distanza tra una parte fissa e una mobile è chiamata minimum gap (g), l'altezza del layer è chiamata h.
Viene poi chiamato rapporto di forma il rapporto h/g.

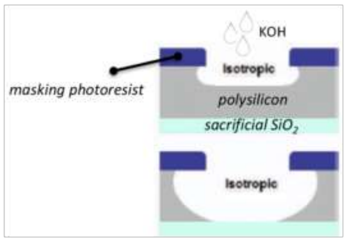


Tipicamente il minimum gap è 1µm questo perché è difficile fare l'etching del silicio in una unica direzione

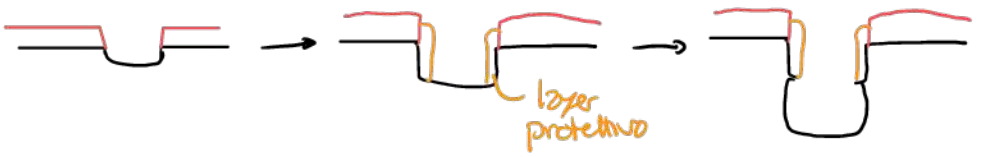
esiste anche la grandezza minima di una parte sospesa (che è circa 3µm)

Wet etching

Usiamo un liquido (KOH) che però mangia il silicio in modo isotropico, non fa i tagli verticali. infatti ad oggi è scarsamente utilizzato.

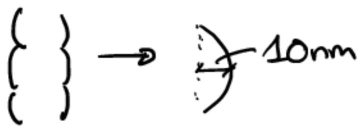


Ci si è spostati su un etching con il gas che è un etching isotropico.
Con un layer di photoresist facciamo un mask delle parti che non voglio che siano eliminate.
In pratica noi con il gas iniziamo facendo un piccolo etching e poi in qualche modo proteggiamo il muro laterale e avanti.



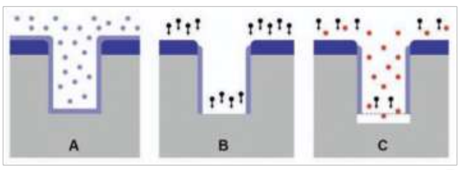
→ e via così

Si crea un buco che ha forma del tipo



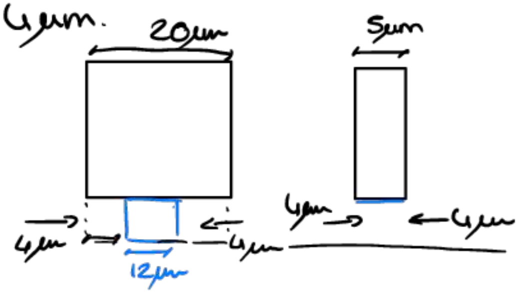
Come possiamo fare ciò?
Facciamo una combinazione di plasma etching e chemical etching.

Facciamo una passivazione (layer protettivo dell'etching) anche e poi con cannoni a elettroni lo togliamo dove lo vogliamo. Poi con il plasma facciamo l'etching e poi si continua ancora



Questo ci permette di avere aspect ratio più grandi (e questo è moolto buono).

Per l'etching del layer sacrificale noi facciamo sempre un etching gassoso.
Questo etching ci limita la massima larghezza di un elemento sospeso.
Infatti il gas ha ad esempio una releasing distance di es: 4µm perciò rimane roba fino a 4µm.



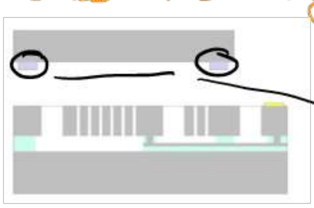
Noi sappiamo che una struttura più grande del doppio della releasing distance non consuma tutto l'ossido. Per fare strutture così grandi dobbiamo mettere i buchi come detto prima.

MEMS PACKAGING

1) Abbiamo parti che si devono muovere → non dobbiamo avere polvere
2) Alcuni sensori usano a pressioni bassissime → se abbiamo gas dentro lo vogliamo inerte (sicuro no ossigeno). La pressione è fondamentale per il fattore di qualità. In questi sensori abbiamo anche il rumore

Bonding del Cap (si differenziano in base al materiale che usiamo sul bordo per unire il cap)

- Glass frit bonding: va bene perché ha temperatura di fusione bassa, lato negativo è che sciogliendosi va ad allargarsi (non deve andare sopra il mio sensore)



questo è il bonding

- Termo compression bonding (Eutectic bonding): utilizziamo pressione + temperatura (non altissima, meno della fusione di materiali) allora si fondono. Il vantaggio è che si espandono poco ma costa di più.

Facendo questi tipi di bonding posso fare + sensori che usano 2 pressioni diverse sullo stesso chip.

Possiamo disegnare sullo stesso chip MEMS e il circuito integrato? Sì, possiamo ma abbiamo un lato negativo. Infatti il processo del MEM limita quello dell'elettronica, allora le aziende hanno deciso di separare i 2 chip e vengono messi uno sopra l'altro e vengono uniti con il bonding.
Il lato positivo di questo è che se ho il MEMS che non è top ma ho l'elettronica top, allora posso nella prossima generazione migliorare solo il MEMS tenendo la stessa elettronica

Lezione 2

Kinematica della parte sospesa e della molla: è un sistema smorzatore-molla
Ci sono anche degli effetti di forze elettrostatiche che possono rompere

Sistemi di riferimento

- An **inertial reference frame** (system) is a frame where the **first Newton's law applies**: an object moves at a constant velocity, if not perturbed by an external force.
  - all inertial reference frames are in a state of constant, rectilinear motion one another (they are not accelerating).

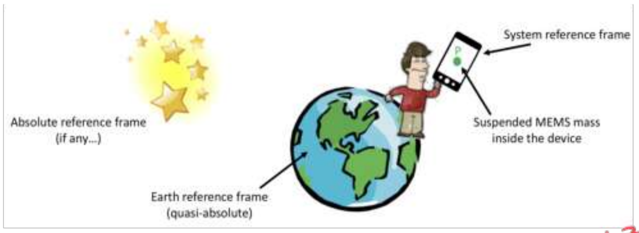
Se abbiamo 2 sistemi e questi sono a inertial reference allora sono sempre in uno stato di movimento relativo a velocità costante.
Le leggi della fisica nei 2 sistemi sono uguali

- In a **non-inertial reference frame** the laws of physics depend upon the particular frame of reference, and **the usual physical forces must be supplemented by *"fictitious"* or *"apparent"* forces.**
  - the measurement of such fictitious forces will provide the information we need on the quantity to be measured.

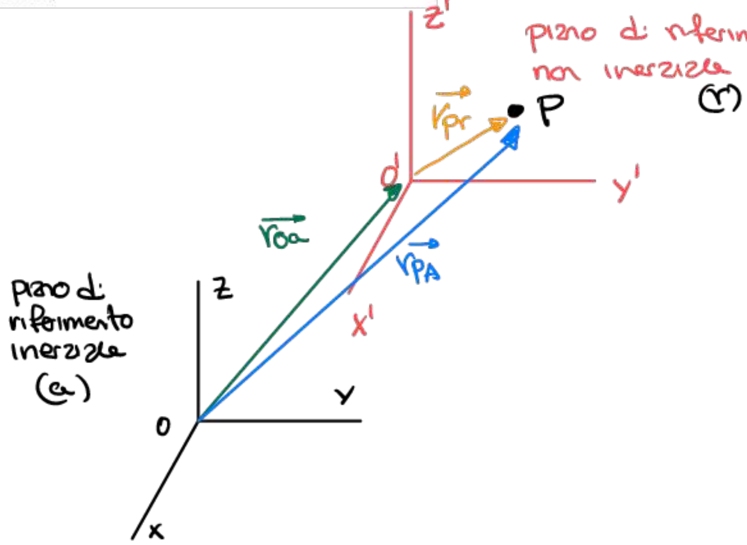
Quando ho un riferimento non inerziale ho che uno dei 2 sistemi sta ruotando oppure sta accelerando.
Le regole della fisica cambiano dobbiamo considerare ciò con delle forze apparenti.

Queste forze apparenti sono quelle che andiamo a misurare

Per semplicità prendiamo la terra come sistema inerziale.



il telefono è il sistema di riferimento non inerziale
P rappresenta la massa sospesa del device MOS (x semplicità la consideriamo volante senza vincoli)



il vettore $\vec{r}_{O'a}$ ci dice la distanza tra i 2 centri di riferimento

r_{Pr} descrive la posizione del punto P vista dal sistema non inerziale

r_{Pa} vettore che da la posizione di P sul piano inerziale

il sistema relativo può accelerare o ruotare rispetto al centro del piano inerziale
$\vec{a}_{O'a}$, $\vec{\Omega}_{O'a}$ ← (rotazione)
Sappiamo che

$$\vec{r}_{Pa} = \vec{r}_{Pr} + \vec{r}_{O'a} \qquad \text{(ed è facile)}$$

ma la velocità del punto P nel sistema di riferimento inerziale è ?

$$\vec{v}_{Pa} = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{O'a}$$

non basta perché se il sistema non inerziale sta ruotando sul posto e P non si muove con questa formula l'osservatore inerziale vede che P si muove cosa che non succede, allora

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{Pr} + \vec{v}_{O'a} + (\Omega_{O'a} \times r_{Pr})$$

Allora possiamo scrivere l'accelerazione

$$\underbrace{\vec{a}_{Pa}}_{\substack{\text{l'accelerazione}\\ \text{newtoniana}\\ \text{(quella "vera")}}} = \underbrace{\vec{a}_{Pr}}_{\substack{\text{accelerazione}\\ \text{vista da O'}}} + \underbrace{\vec{a}_{O'a}}_{\substack{\text{accelerazione}\\ \text{di O'}}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{O'a} \times (\vec{\Omega}_{O'a} \times \vec{r}_{Pr})}_{\text{accelerazione centripeta}} + \underbrace{(\vec{\Omega}'_{O'a} \times \vec{r}_{Pr})}_{\text{accelerazione angolare}} + \underbrace{2(\vec{\Omega}_{O'a} \times v_{Pr})}_{\substack{\text{Coriolis accelerat.}\\ \text{(credo)}}}$$

Tipicamente sono molto piccoli quindi non li consideriamo

Con i nostri mems noi vogliamo misurare queste 2 quantità

The goal is:

- to measure the motion of *O'x'y'z'* (i.e. of our non-inertial system) with respect to *Oxyz* (i.e. the reference frame);
- to do it, we exploit the motion $r_{Pr}(t)$ of the MEMS mass P relative to *O'x'y'z'*, described through *fictitious* forces.

Fino ad ora abbiamo supposto P che fluttua in aria ma la massa sospesa in realtà è collegata con una molla al sistema ed in più l'aria del sistema smorza il tutto.

- Forza Elastica $F_{el} = -K \cdot r_{pr}$
- Forza di damping $F_{damp} = -b \cdot v_{pr}$

Sistema molla smorzatore

Moltiplichiamo per m la formula dell'accelerazione calcolata prima

$$m\vec{a_{pa}} = m\vec{a_{pr}} + m\vec{a_{o'a}} + 2m(\vec{\Omega_{o'a}} \times v_{pr})$$

Ho considerato solo una componente dei vettori (quella dove avremo avere movimento).

$$\underbrace{m\ddot{x}_{pa}}_{} = m\ddot{x}_{pr} + m\vec{a_{o'a}} + 2m(\vec{\Omega_{o'a}} \cdot \dot{y}_{pr})$$

Questa è la forza nel punto

$$-b\dot{x}_{pr} - Kx_{pr} = m\ddot{x}_{pr} + ma_{o'a} + 2m\vec{\Omega_{o'a}} \cdot \dot{y}_{pr}$$

Adesso tutte le posizioni sono relative al sistema di riferimento non inerziale e questo va bene

Possiamo non scrivere più i pedici delle posizioni

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = \overbrace{-ma_{o'a} - 2m\Omega_{o'a} \cdot \dot{y}_{ra}}^{F_{inertial}}$$

* Questi indicano la posizione rispetto al piano di riferimento non inerziale e se noi misuriamo la capacità misuriamo esattamente quello

* Questi sono quelli che vogliamo calcolare (quando vogliamo fare un accelerometro facciamo in modo che la componente $2m\Omega_{o'a}\dot{y}_{ra}$ sia nulla e viceversa con un oscilloscopio)

The Linear spring-mass-damper equation

Facciamo la trasformata di laplace della formula di prima

$$ms^2X(s) + bsX(s) + KX(s) = F_{ext}(s)$$

$$X(s)(ms^2 + bs + K) = F_{ext}(s)$$

La FDT è $T_{XF} = \dfrac{X(s)}{F_{ext}(s)} = \dfrac{1}{ms^2 + bs + K} = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}}$

Scriviamo questa FDT e esprimiamo la frequenza di risonanza e il fattore di qualità.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad Q = \frac{\omega_0 \cdot m}{b}$$

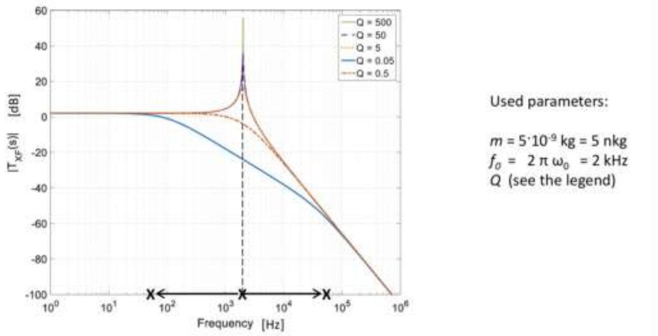
allora posso scrivere la FDT come:

$$\boxed{T_{XF} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_0 s}{Q} + \omega_0^2}}$$

Sanurzmo l'andamento dell'equazione in frequenza.
Dal valore del fattore di qualità sappiamo il tipo dei poli

Modulo

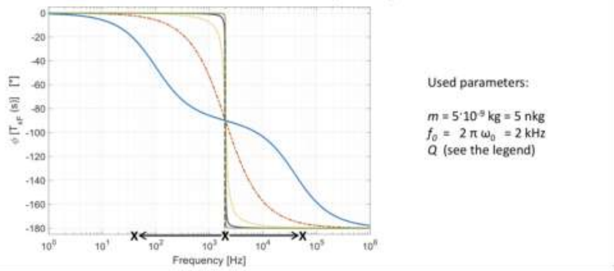
$$|T_{XF}(j\omega)| = \left|\frac{X(j\omega)}{F_{ext}(j\omega)}\right| = \left|\frac{1/m}{\left(\omega_0{}^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)}\right| = \frac{1/m}{\left|\left(\omega_0{}^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\right|} = \frac{1/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$$



Fase

The phase decreases by 180°, as the system is characterized by two poles. The **phase shift at** the **resonance** frequency is exactly **90°**.

$$\varphi[T_{XF}(j\omega)] = arctan\left|\frac{Im(T_{XF}(j\omega))}{Re(T_{XF}(j\omega))}\right|$$

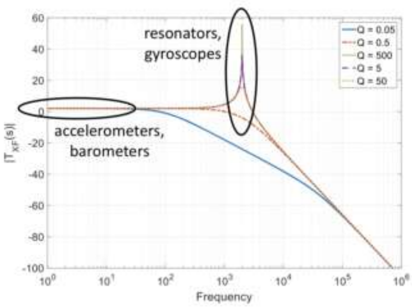


Se sono alla freq di risonanza il displacement è in quadratura rispetto al movimento (−90°)

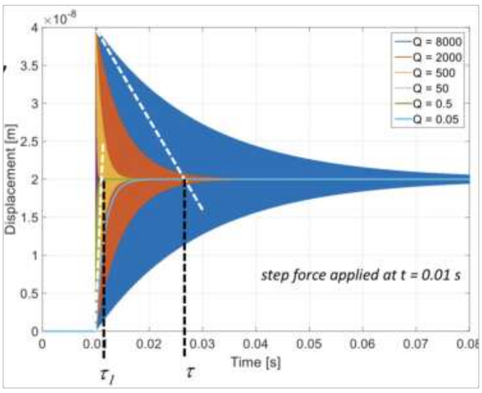
Zona di funzionamento dei MEMS

MEMS devices operate in different regions of the transfer function:

- **accelerometers, microphones** and **pressure sensors** typically operate under forces occurring far **before resonance**; as we will see, they usually have **relatively low Q factors** (typically < 10, or even < 1); ← Non significa che il fattore di qualità sia piccolo
- **resonators** (including the gyroscopes drive) operate **at resonance** (few tens kHz to few MHz) and require **high quality factors** (typically few thousand to ten thousand);
- other **sensors** (gyroscopes, magnetometers…) operate **slightly before** the **resonance** frequency (off-resonance or mode-split operation), due to a modulation in frequency of the applied forces;
- no devices operate beyond the resonance frequency.



Risposta all'impulso in base a diversi fattori di qualità

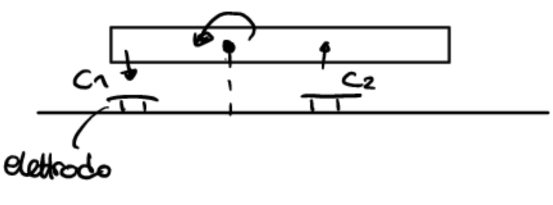


Dove τ è $\tau = \dfrac{Q}{\pi f_0}$

dobbiamo tenere conto di questi comportamenti quando lavoriamo con i sensori e prendiamo dei colpi ecc..

Torsional spring-mass-damper system

Sistemi dove la massa può tiltare



Al posto della massa abbiamo il momento d'inerzia I, il corrispondente del damping è il torsional damping coefficient (b_θ), il corrispondente della stiffness è la torsional stiffness

Allora:

$I\ddot{\vartheta} + b_\vartheta \dot{\vartheta} + K_\vartheta \vartheta = \Gamma_{ext}$ (è la stessa formula di prima)

← è la torque

Forze Elettrostatiche

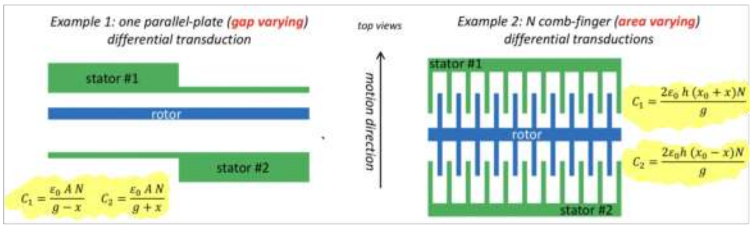
Alle volte le vogliamo alle volte no
Nelle formule viste prima avevamo visto solo le forze non elettrostatiche.
Alle volte usiamo queste forze per mettere in movimento le masse.
Queste forze si formano ai capi del condensatore, un condensatore può essere

The used **variable capacitance** can be of
- **area-varying** (comb-finger) type or
- **gap-varying** (parallel-plate).

$$C = \frac{\varepsilon_0 A N}{g}$$

air (vacuum) electrical permittivity

number of sensing cells



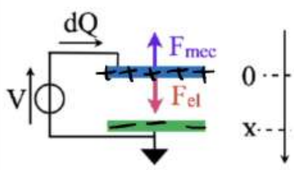
esempi di questi 2 tipi di condensatori.
Questi sono condensatori differenziali

Quali sono le forze generate?
Consideriamo una parte fissa (verde) e quella blu libera di muoversi

Let us consider a single-ended parallel-plate capacitor. Let us **assume a DC voltage applied to its plates**. Using the **principle of virtual works**, we can evaluate the value of the electrostatic force:
- in equilibrium conditions, **electrostatic forces balance the mechanical force**

La forza elettrostatica tenta sempre di attrarre le 2 facce, perché cariche opposte si attraggono

Any variation in the energy E_c stored in the capacitor should be given by the work W done by the mechanical or electrical forces.



$$dE_C = dW_{mech} + dW_{elec}$$

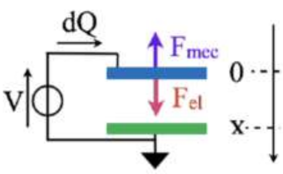
← La variazione dell'energia nel condensatore è data dalla somma del lavoro meccanico o quello elettrostatico

If a voltage is applied, a charge Q arises on the capacitor plates, as Q=CV.

Charges of opposite sign on the plates generate an electric field and thus an electrostatic force which is always attractive.

(Abbiamo questa forza ogni volta che applichiamo una tensione, anche per leggerlo)

- **Single-ended** configuration



$$dE_C = dW_{mech} + dW_{elec}$$

electrostatic energy stored in a capacitor $dE_C = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{V^2}{2}dC$

work done for a displacement dx $dW_{mech} = -F_{mech}dx$

electrostatic work done to change the voltage over a capacitor $dW_{elec} = VdQ = Vd(CV) = V(CdV + VdC) = V^2dC$

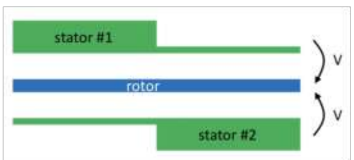
Lavoro per mettere le cariche sulle facce del condensatore

$$\frac{V^2}{2}dC = -F_{mech}dx + V^2dC \longrightarrow \boxed{F_{mech}dx = \frac{V^2}{2}dC}$$

$$F_{mech}dx = \frac{V^2}{2}dC = -\frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2}dx \qquad \boxed{F_{elec} = -F_{mech} = \frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2}}$$

Aggiungiamo anche il termine riferito alle forze elettrostatiche → $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext} + F_{elec}$

Configurazione differenziale



The situation can be easily extended by considering the differential configuration with opposite forces:

$$F_{elec} = \frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2} - \frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g+x)^2} \qquad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext} + F_{elec}$$

Note that the applied force **is a function of the displacement** itself, both in single-ended and in differential configurations. We will see in the next class one drawback of this result.

In ogni caso questa configurazione differenziale riduce l'effetto di queste forze e inoltre aiuta anche con la common mode

Lezione 3 — Accelerometro

Usati principalmente in automotive (all'inizio, per gli airbag)
Fare design degli accelerometri in modo efficiente e allo stato dell'arte è difficile

- Acceleration range: massima accelerazione che l'accelerometro può tenere (per applicazioni costumer ho 16 g)
- Bias Voltage: 2-3 V
- Corrente in Mode normale: 100-50 μA
- Temperatura di operazione −40, +85 °C (per applicazioni commerciali)
- Noise Density $\simeq 120\ \mu g/\sqrt{Hz}$ (poi integriamo la noise density per la banda e abbiamo l'accelerazione minima)

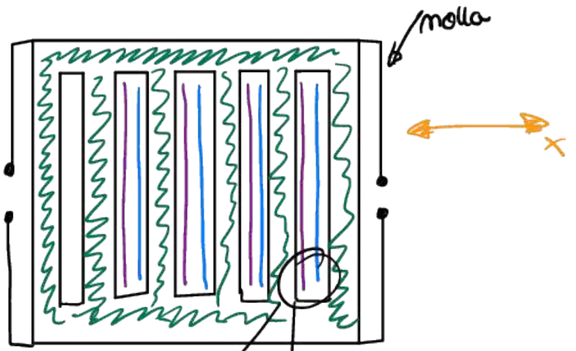
Tipicamente l'accelerazione minima $\simeq 1/1000$ g

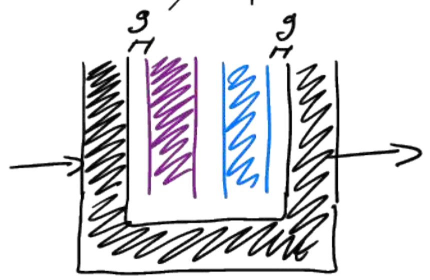
- Non Linearità: noi vorremo una funzione Lineare tra accelerazione e uscita di tensione, ci può essere una non Linearità che manda tutto a puttane.

Gli accelerometri possono anche essere usati per controllare le parti delle macchine che si stanno per rompere.

ARCHITETTURA DI UN ACCELEROMETRO A PIANO PARALLELO

PARTE SOSPESA
ELETTRODI





Quando la massa sospesa si muove la distanza g va a variare

Abbiamo usato uno schema differenziale perché sotto alcune ipotesi la capacità variabile può essere linearizzata

Come facciamo a misurare la capacità differenziale? Dobbiamo studiare l'elettronica e la corrente che si forma in questi tipi di condensatori.

Per semplicità consideriamo che la frequenza delle accelerazioni è più piccola di quella di risonanza dell'accelerometro

Allora sotto questa ipotesi (frequenze piccole) posso dire anche che le sue derivate sono piccole e quindi trascurarle.
Ottengo quindi che la formula è

$$\cancel{m\ddot{x}} + \cancel{D\dot{x}} + Kx = m a_{ext} + F_{elec}$$

Com'è la corrente che scorre in un condensatore variabile?
Sappiamo che la corrente è la derivata della carica, allora posso scrivere:

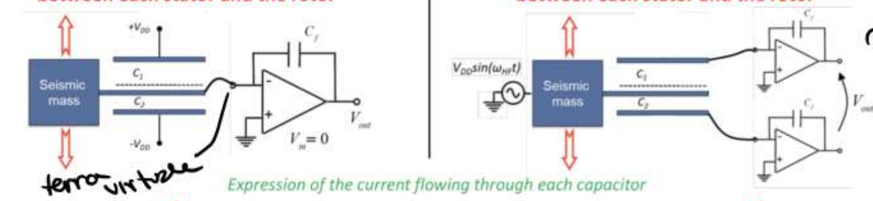
$$\boxed{i_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C\frac{dV}{dt} + V\frac{dC}{dt}}$$

Non c'è quindi un solo modo per leggere gli accelerometri

Le 2 opzioni per leggere queste capacità sono:

Applichiamo una tensione DC costante tra i 2 elettrodi. Visto che la tensione è costante la derivata della tensione va a ∅. Come risultato abbiamo la derivata della capacità, per ricavare il valore vero di C uso l'opamp come integratore

application of a constant DC voltage ±V_{DD} between each stator and the rotor | **application of a modulated AC voltage between each stator and the rotor**



Expression of the current flowing through each capacitor

$$i_{C_i} = \frac{dQ_i}{dt} = \cancel{C_i\frac{dV_i}{dt}} + V_i\frac{dC_i}{dt} = V_i\frac{dC_i}{dt}$$

This term is proportional to the capacitance derivative: not to lose the stationary (DC) value of the acceleration, **we need to integrate the signal**. The feedback impedance is capacitive.

$$i_{C_i} = \frac{dQ_i}{dt} = C_i\frac{dV_i}{dt} + \cancel{V_i\frac{dC_i}{dt}} = C_i\frac{dV_i}{dt}$$

This term dominates for very-high-frequency AC signals (the derivative is indeed proportional to the AC frequency). Any feedback impedance is okay.

in questo caso teniamo i 2 elettrodi a massa virtuale e applichiamo una tensione AC all'elettrodo del rotore. Se la frequenza della tensione è molto alta possiamo garantire che la sua derivata sia >> di quella dei condensatore e allora posso approssimare la formula

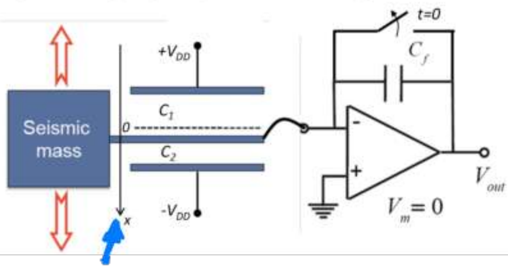
Per semplicità noi iniziamo studiando il primo metodo.

Assume that the accelerometer is **initially in the rest position** and that **C_f is initially discharged** (e.g. via a switch, as shown):

$V_m = 0$ $\quad C_1 = \frac{\varepsilon_0 A N}{g + x}$ $\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A N}{g - x}$ $\quad Q_F = 0$

If the position changes by a quantity x, we have **opposite changes in the value of the differential capacitances**

- for x > 0 (as in the figure) → C_1 decreases and C_2 increases



Abbiamo che la formula della carica è

$$Q_1 = -C_1 \cdot V_{DD}$$
$$Q_2 = C_2 \cdot V_{DD}$$

quando abbiamo uno spostamento del rotore otteniamo che c'è una differenza di carica

$$\Delta Q_m = C_2 V_{DD} - C_1 V_{DD} = V_{DD}\Delta C$$

ma da dove arriva questa carica? Arriva dal condensatore di feedback e di conseguenza ho una ddp ai capi di Cf, dove

$$\Delta V_{out} = \frac{\Delta Q_m}{C_f} = V_{DD} \cdot \frac{\Delta C}{C_F}$$

Possiamo ora esporre in modo specifico la variazione della carica dato lo spostamento

- Detailed calculation of ΔQ_m as a function of x:

Definizione delle capacità

$$\Delta Q_m = -C_1 V_{DD} + C_2 V_{DD} = V_{DD}\Delta C_{diff} = V_{DD}\left(-\frac{\varepsilon_0 A N}{g+x}+\frac{\varepsilon_0 A N}{g-x}\right) = V_{DD}\underbrace{\frac{\varepsilon_0 A N}{g}}_{C_0}\left(\frac{-1}{1+x/g}+\frac{1}{1-x/g}\right)$$

C_0: capacità all'equilibrio

$$\Delta Q_m = V_{DD}C_0\left(\frac{-1}{1+x/g}+\frac{1}{1-x/g}\right) = V_{DD}C_0\left[\frac{-1+x/g+1+x/g}{1-(x/g)^2}\right] = \boxed{V_{DD}C_0\left[\frac{2\,x/g}{1-(x/g)^2}\right]}$$

è una funzione non lineare

Se supponiamo che il displacement x sia << rispetto alla dimensione del gap, allora x/g è molto piccolo e trascurabile se sottratto a 1, allora sotto queste approssimazioni

$$\Delta Q_m = 2V_{DD}C_0\frac{x}{g} \qquad \text{e che} \qquad \Delta C_{diff} = 2C_0\frac{x}{g}$$

Come calcoliamo ora la tensione di output in funzione del displacement

$$\boxed{\Delta V_{out} = \frac{\Delta Q_m}{C_f} = \frac{\Delta C_{diff}V_{DD}}{C_f} = 2\frac{V_{DD}}{C_f}\frac{C_0}{g}x}$$

displacement to capacitance (X2C) gain

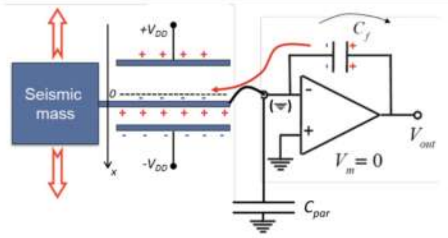
capacitance to voltage (C2V) gain

GUADAGNO DELL'OPAMP.

Sotto le approssimazioni fatte prima abbiamo che la tensione d'uscita è un eq lineare della capacità.

Capacità parassite

Ci sono molte fonti di effetti parassiti (vedere slide)
Queste capacità rompono le balle in lettura?



Even if C_{par} is very large, **there is no charge flow through this capacitance** (and thus no loss of signal), because it is **continuously kept between ground and** another fixed potential (**virtual ground**). In other words, the charge on C_{par} never changes.

In realtà anche no, infatti grazie alla massa virtuale ho che ho sempre ∅ ai capi di Cpar.

le capacità C_0 dell'accelerometro sono circa 100fF – 1pF e stessa roba su C_f.

Effetti della forza elettrostatica

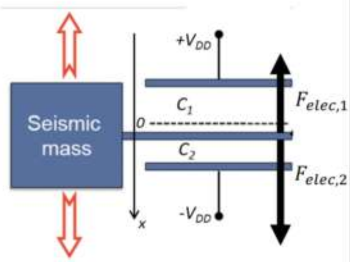
Ricordiamo che le forze sono sempre attrattive

We saw in the last class that the **application of a voltage for the readout** generates **unavoidable electrostatic forces**, which should be considered in the force balance of the motion equation.

$$F_{elec,1} = -\frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g+x)^2}$$

$$F_{elec,2} = +\frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2}$$

$$F_{elec} = \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2} - \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g+x)^2}$$



Queste sono le 2 forze che dobbiamo considerare.
ricordiamo che

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx = ma_{ext}+F_{elec}$$

Assumiamo inizialmente che non ci sia nessuna accelerazione e che la frequenza delle accelerazioni sia bassa tale da poter semplificare le derivate di x allora l'equazione totale si riduce a

$$K\cdot x = F_{elec} \rightarrow K\cdot x = \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2} - \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g+x)^2}$$

Posso ricavare x da questa equazione sapendo K e Felec

The **questions now** are:

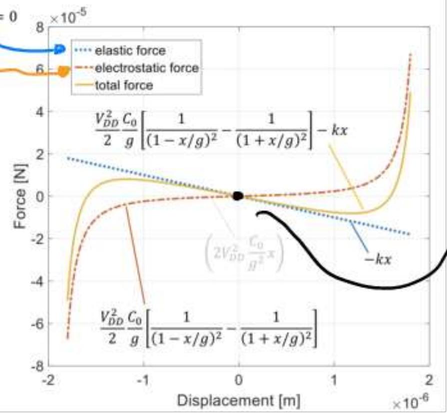
- **Is it relevant** for our purposes?
- Under **which conditions** can we **anyway** use our **accelerometer**?
- Which **effects** does it have on **linearity**?

Risolviamo graficamente l'equazione che abbiamo calcolato sopra e studiamo le risposte a queste domande

$$\frac{V_{DD}^2}{2}\frac{C_0}{g}\left[\frac{1}{(1-x/g)^2}-\frac{1}{(1+x/g)^2}\right]-kx=0$$

Typical numbers:
- k = few N/m;
- m = few to 10 nkg;
- V_{dd} = few V;
- C_0 = few hundred fF;
- g = few µm.

Used numbers
- k = 3 N/m;
- m = 5 nkg;
- V_{dd} = 3 V;
- C_0 = 200 fF;
- g = 2 µm.



Ogni volta che la curva gialla tocca l'asse dello zero allora lì ho una soluzione. Vogliamo anche sapere se questi punti sono punti di equilibrio stabile

Punto centrale è un punto stabile perché una forza positiva da una forza negativa che lo fa tornare in equilibrio

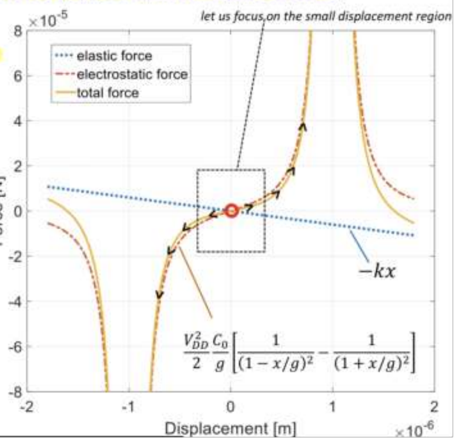
Al contrario gli altri 2 punti non sono di equilibrio

Se facciamo delle piccole variazioni allora la situazione potrebbe drasticamente cambiare

The equilibrium conditions **can significantly change if** one tries to:
- **increase** the facing **area** (thus the total capacitance at rest);
- **decrease** the **gap** between plates (e.g. 1 µm in the figure below);
- **decrease** the **stiffness**;
- **increase** the **bias voltage**.

Once a certain condition (which one?) is reached, there is **no longer any stable equilibrium point**!

The system undergoes **an instability known as pull-in**: the rotor plates snap onto the stator ones.



In questi casi la forza elettrostatica ha cambiato il suo valore tanto che la pendenza della forza attorno al punto di zero centrale è contraria (e quindi non è più stabile)
Questo significa che appena accendo l'accelerometro allora la massa va a destra o a sinistra a causa della forza elettrostatica
La massa va ad attaccarsi ad uno degli elettrodi

Come determiniamo le condizioni limite tra un device che funziona e uno che non lo fa.
Dobbiamo eguagliare la forza elastica e quella elettromagnetica attorno al punto di equilibrio perché abbiamo visto che l'equilibrio si perde quando il segno della forza cambia al centro.

$$Kx = \frac{V_{DD}^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 A N}{(g-x)^2} - \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{(g+x)^2} = \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A N}{g^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{x}{g})^2}-\frac{1}{(1+\frac{x}{g})^2}\right)$$

Allora

rest capacitance

$$K_x = \frac{V_{DD}^2}{2}\cdot\frac{C_0}{g}\cdot\left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{g}\right)^2-2\frac{x}{g}} - \frac{1}{1+\left(\frac{x}{g}\right)^2+2\frac{x}{g}}\right)$$

$\left[\left(\frac{x}{g}\right)^2 \text{ trascurabile}\right]$ small displacements

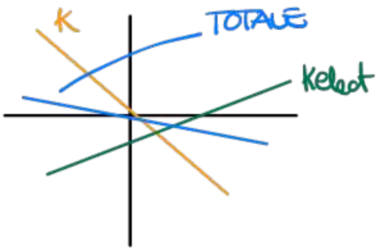
$$K_x = \frac{V_{DD}^2}{2}\cdot\frac{C_0}{g}\left(\frac{1}{1-2\frac{x}{g}} - \frac{1}{1-2\frac{x}{g}}\right)$$

$$K_x = \frac{V_{DD}^2}{2}\cdot\frac{C_0}{g}\left(\frac{4x/g}{1-\underbrace{4x^2/g^2}_{\text{trascurabile}}}\right)$$

$$K_x = \frac{V_{DD}^2}{2}\,\frac{C_0}{g}\,\frac{4x}{g} \longrightarrow K_x = V_{DD}^2\cdot\frac{C_0}{g^2}\cdot 2\cdot x$$

Dato che $\frac{V_{DD}^2 C_0 \cdot 2}{g^2}$ ha la forma di una forza elastica, allora questa formula prende il nome di equivalent electrostatic stiffness $K_{elec} = -\frac{V_{DD}^2 C_0 \cdot 2}{g^2}$

Allora per essere sicuri di avere stabilità ci dobbiamo avere che la forza totale penda verso il basso a destra



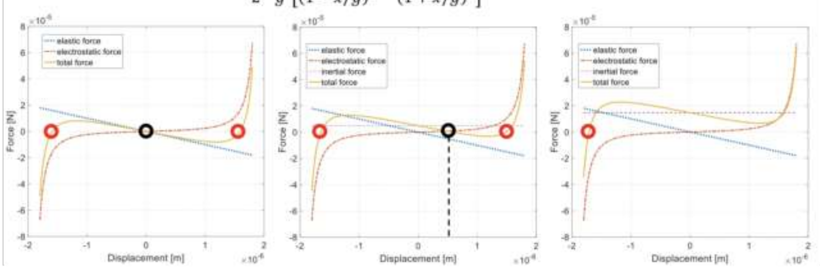
Cioè dobbiamo fare sì che $K > |K_{elec}|$

$$K > \frac{V_{DD}^2 C_0\, 2}{g^2}$$

Tutti sti conti ma abbiamo approssimato dicendo che non c'è accelerazione, ma questo è un fottuto accelerometro quindi deve esserci accelerazione.

- Our ultimate goal is to calculate an acceleration, so we remove now the hypothesis of non-zero acceleration, and assume $|k_{el}| << k$...
  - for **small accelerations**: **shift of the equilibrium point** (ok, this is the displacement we want to measure to recover the acceleration value);
  - **after a certain acceleration value** however, **no more stable point exists**! Too large accelerations can cause instability in PP MEMS accelerometers, even at biasing values lower than the pull-in voltage!

$$\frac{V_{DD}^2}{2}\frac{C_0}{g}\left[\frac{1}{(1-x/g)^2}-\frac{1}{(1+x/g)^2}\right]+ma_{ext}-kx=0$$



Anche un accelerometro stabile sotto grandi accelerazioni può diventare instabile.

Potremmo avere degli shock tipo cade il telefono che superano l'accelerazione massima, allora per evitare cortocircuiti si usano degli stopper meccanici sulla massa sospesa

Sensitività dell'accelerometro

Vogliamo relazionare il displacement con l'accelerazione

We now **solve the stationary condition**, for small displacements, to find out the **output voltage vs the input acceleration**, i.e. the overall axel **sensitivity**.

$$kx = ma_{ext} + 2V_{DD}^2 \frac{C_0}{g^2} x$$

ω_0 is a key parameter in determining the sensitivity!

$$x = \frac{m}{\left(k - 2V_{DD}^2 \frac{C_0}{g^2}\right)} a_{ext} = \frac{m}{(k + k_{elec})} a_{ext} = \frac{m}{k_{tot}} a_{ext} = \frac{1}{\omega_0^2} a_{ext}$$

Note 1: the MEMS **resonance frequency changes as the elastic stiffness changes**! Indeed it is $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{tot}}{m}}$! This effect is named *electrostatic softening* or *tuning* of the resonance frequency.

- k_{elec} is always negative → resonance always decreases w.r.t. to its native value

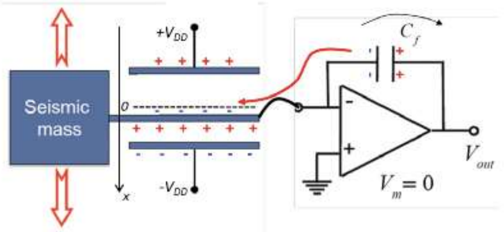
Note 2: a MEMS accelerometer is **well-designed** only if it effectively undergoes **small displacements** (<< than the gap value, see next class) even for accelerations corresponding to the full-scale value!

ω_0 è la frequenza di risonanza in operazione che la stiffness totale è la somma di $K + K_{elec}$. Dato che K_{elect} è sempre negativo allora $K_{tot} < K$ e quindi la frequenza di risonanza totale in operazione sarà sempre un po' più bassa di quella in stabilità.

By putting together the two found expressions below:

$$\Delta V_{out} = 2 \frac{V_{DD}}{C_f} \frac{C_0}{g} x$$

$$\boxed{x = \frac{1}{\omega_0^2} a_{ext}}$$



We can finally evaluate the overall sensitivity of a differential, parallel-plate MEMS axel readout through a charge amplifier:

$$\boxed{\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2 \frac{V_{DD}}{C_f} \frac{C_0}{g} \frac{1}{\omega_0^2}}$$

capacitance to voltage (C2V) gain

differential gain

displacement to capacitance dC/dx gain

physical quantity to displacement gain

$$\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2 \frac{V_{DD}}{C_f} \frac{C_0}{g} \frac{m}{\left(k - 2V_{DD}^2 \frac{C_0}{g^2}\right)} \left[\frac{V}{m^2}\right]$$

Note: this formula gives the sensitivity in V/(m/s²).

To pass to V/ĝ, just multiply by 9.8!

Note: you find a similar expression for the alternative readout topology discussed in slide

Lezione 4

Accelerometro parte 2

Andiamo a introdurre dei parametri degli accelerometri.
Ricordiamo l'ultima formula calcolata nella scorsa lezione

$$\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2 \frac{V_{DD}}{C_f} \frac{C_0}{g} \frac{m}{\left(K - 2V_{DD}^2 \frac{C_0}{g^2}\right)}$$

generalmente diciamo che maggiore è la sensitivity migliore è l'accelerometro, vediamo se è facile ottenere un'alta sensitività.

- Dato che $\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} \propto \frac{1}{g}$ allora se riduco g potrei aumentare la stabilità ma se riduco il gap devo ridurre anche la pulling voltage
- Possiamo aumentare la massa m, ma facendolo ridurremo la banda
- Potremo ridurre l'overall stiffness ma poi rischiamo sempre il pull-in e instabilità.
- Potremo aumentare la tensione di bias ma abbiamo sempre problemi di pull-in (la tensione di bias deve stare sotto quella di pull-in)

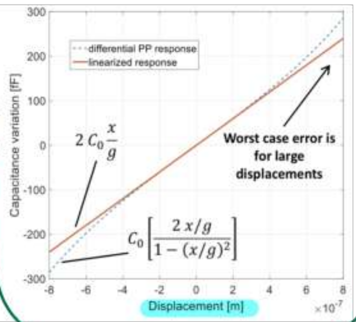
L'unico punto che non ha tradeoff è l'aumentare lo spessore del rotore, infatti abbiamo che in questo modo si aumentano la massa ma il fattore K si regola di conseguenza e non abbiamo perdite di banda.

Nella scorsa classe abbiamo calcolato la sensitività sotto l'ipotesi di small displacement ($x/g \ll 1$), cerchiamo di capire che errore stiamo commettendo

Two are the sources of nonlinearity in the axel response:

- the **nonlinear response** of differential **PPs**;
- **nonlinear** effects from electrostatic **forces**.

We consider only the first one, assuming a device which is quite safe from pull-in instabilities (low k_{elec}).



Le consideriamo molto minori rispetto alla prima non linearità

Come calcoliamo l'errore?

Possiamo scrivere l'errore percentuale come:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{\overbrace{2C_0\frac{x}{g}\left[\frac{1}{1-(x/g)^2}\right]}^{\text{valore reale}} - \overbrace{2C_0\frac{x}{g}}^{\text{valore linearizzato}}}{\Delta C_{FSR}} \cdot 100$$

Normalizzato sulla variazione della capacità di Full-range scale (è la massima capacità che abbiamo per la massima accelerazione che vogliamo misurare con l'accelerometro) [la max accelerazione corrisponde al massimo displacement allora posso scrivere ΔC_{FSR} come:]

$$= \frac{\cancel{2C_0}\frac{x}{\cancel{g}}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{g}\right)^2}\right] - \cancel{2C_0}\frac{x}{\cancel{g}}}{\cancel{2C_0}\frac{x_{MAX}}{\cancel{g}}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2}\right]} \cdot 100$$

$$= \frac{x\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{g}\right)^2}\right] - x}{x_{MAX}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2}\right]} \cdot 100$$

Come possiamo vedere dal grafico sopra l'errore più grande l'abbiamo per grandi displacement

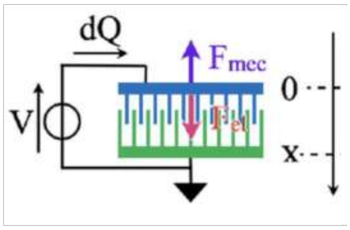
Perciò possiamo scrivere l'errore massimo come

$$\varepsilon_{\%_{MAX}} = \frac{x_{MAX}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2}\right] - x_{MAX}}{x_{MAX}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2}\right]} \cdot 100 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-\left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2}} \cdot 100 = \left(\frac{x_{MAX}}{g}\right)^2 \cdot 100$$

Capiamo che i tradeoff nel design degli accelerometri sono:

- Pull-in effects
- Non linearità

Per risolvere questi problemi di non linearità posso usare un accelerometro con "dita intrecciate"?



Se calcoliamo la differenza di capacità sulla distanza otteniamo che

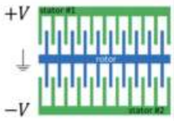
$$\frac{dC}{dx} = \frac{2\varepsilon_0 h N}{g}$$ che è lineare e non dipende dal displacement x

Sappiamo poi che la forza elettrostatica è calcolabile come

$$F_{elec} = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx} = \frac{V^2 \varepsilon_0 h N}{g}$$ che è sempre indipendente da x

Quindi se usiamo una configurazione differenziale di questo tipo di struttura e polarizziamo i 2 statori a tensioni uguali ma di segno opposto, allora otteniamo che le 2 forze elettrostatiche sono uguali e opposte

So, in a differential configuration, the force is null even in presence of displacements!

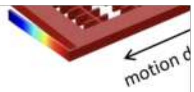


$$\boxed{|F_{elec,1}| = |F_{elec,2}| = \frac{V^2\,\varepsilon_0 h\,N}{g}}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ma_{ext} = F_{ext} + \cancel{F_{elec}}$$

Tuttavia questa configurazione è poco usata.
Possiamo calcolare la sensitività senza fare approssimazioni considerando i soliti 3 contributi

Quick steps for the sensitivity calculation:



- evaluate the displacement per unit acceleration
- evaluate the single-ended capacitance variation per unit displacement
- evaluate the output voltage per unit differential capacitance variation

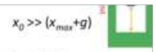
$$\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2\frac{dV}{dC}\frac{dC}{dx}\frac{dx}{da} \qquad \frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2\frac{V_{DD}}{C_f}\frac{C_0}{x_0}\frac{1}{\omega_0^2}$$ *(linear with NO approximations!)*

$\frac{C_0}{x_0}$ perché

$$\frac{dC}{dx} = \frac{2\varepsilon_0 h N}{g} = \underbrace{\frac{2\varepsilon_0 h N}{g}\cdot x_0}_{= C_0} \cdot \frac{1}{x_0}$$

Vantaggi e svantaggi di questa configurazione

- Advantages:
  - the **electrostatic force is not a function of the displacement**. There is thus **no electro-static stiffness**. In turn, there is no electro-static softening. **No risk of pull-in exists.**
  - ideally, **there is no nonlinearity in the capacitive readout**. No trade-off exists between sensitivity and full-scale.
- Drawbacks:
  - for the same resonance, gap, and voltage, **the number of fingers that one can fit in a given area does not allow to reach the same *dC/dx* as for PP devices.** About a factor 5-10, as a rule of thumb, due to:
    - $x_0 \gg g$ (to avoid fringe effects)
    - for the same available area, $C_{0,CF} < C_{0,PP}$



Banda dell'accelerometro e regione di funzionamento

Qual'è la risposta dell'accelerometro per frequenze che si avvicinano a quella di risonanza?
Sappiamo che in base al quality factor abbiamo diverse forme della FDT.
In generale noi vogliamo che l'accelerometro lavori nella parte piana, perciò noi facciamo un design del sistema per far sì che anche alla massima accelerazione/frequenza noi stiamo in quel punto.

ATTENZIONE! Quando noi cambiamo la frequenza di risonanza del sistema non cambiamo solo la locazione dei poli ma anche il guadagno in continua. 46:37

The Fourier domain transfer function modulus can be indeed written as below, by combining the formulas of previous classes:

$$|T_{VA}(j\omega)| = \left|\frac{X(j\omega)}{F_{ext}(j\omega)}\right|\left|\frac{V(j\omega)}{X(j\omega)}\right|\left|\frac{F_{ext}(j\omega)}{A(j\omega)}\right| = m\,\frac{2\,V_{DD}}{C_f}\frac{C_0}{g}\,\frac{1/m}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{2\,V_{DD}}{C_f}\frac{C_0}{g}\,\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(\omega_0{}^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}_{\text{complete frequency-domain expression instead of m/k}}$$

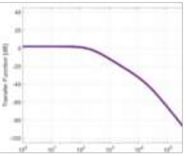
a basse frequenze ($\omega \ll \omega_0$) allora torniamo alla formula standard

Altro parametro importante è il quality factor

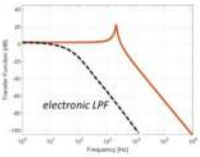
Dato che la Q non ha effetto sul gain in DC non ha troppo senso abbassare troppo il Q perché questo mi splitta i poli e mi abbassa la banda
Quindi il Q deve essere $\geq 0{,}5$, ma che valore prendiamo?
Se prendiamo Q molto alti e l'accelerometro è soggetto a shock istantanei allora l'accelerometro comincerà a sbatacchiare calando in ampiezza come un esponenziale con costante di tempo $\tau = \frac{Q}{\pi f_0}$ (Q più grande allora mi serve + tempo per stabilizzarsi)

noi vogliamo τ basso perché è solo un rumore.
Perciò apparentemente il Q ottimo è 0,5.

For $Q \leq 0.5$:
- just take the -3dB bandwidth value (first pole)
  → Q = 0.5 seems the best choice to maximize the bandwidth, all other things being equal…



For $Q \geq 0.5$:
- take the minimum between the -3dB bandwidth and one over 2π the ringdown time, $\frac{1}{2\pi\tau} = \frac{f_0}{2Q}$ → **Q = 0.5** is the best choice to maximize the bandwidth, all other things being equal… (or use electronic LPF!)



Thermo-mechanical noise in MEMS

FLUCTUATION FORCE: come abbiamo detto prima abbiamo un oscillazione decrescente avere un oscillazione decrescente significa perdere energia. Possiamo vedere la perdita di energia come una perdita di temperatura.
Nel package avremo delle particelle di gas che si muovono e questo fa sì che la massa tremi, vediamo questo tremore come rumore
Per studiare la power spectral density consideriamo l'equazione molla-massa considerando solo la fluctuation force
Scriviamo la solita eq massa smorzatore in Laplace

$$mXs^2 + bXs + KX = F_n(s)$$

so che $sX = v$ (velocità)

$$mVs + bV + \frac{KV}{s} = F_n(s)$$

$$V(s)\left(ms + b + \frac{K}{s}\right) = F_n(s) \longrightarrow \frac{V(s)}{F_n(s)} = \frac{1}{ms + b + K/s}$$

Passiamo ora in Fourier ($s = j\omega$)

$$\frac{V}{F_n}(j\omega) = \frac{1}{mj\omega + b + \frac{K}{j\omega}} = \frac{1}{b + j\left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)}$$

ricaviamo la power spectral density

$$S_{V_n} = \left|\frac{V}{F_n}(j\omega)\right|^2 \cdot S_{F_n}$$

Perciò

$$S_{vn} = \frac{1}{b^2 + \left(m\omega - \frac{K}{\omega}\right)^2} S_{Fn} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{1+\left(\frac{m\omega}{b} - \frac{K}{\omega b}\right)^2} S_{Fn}$$

Sappiamo che $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ e che $Q = \omega_0 \frac{m}{b} = \frac{K}{\omega_0 b}$ ← (controllare)

Allora:

$$S_{vn} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{1+\left(\underbrace{\frac{m\omega\omega_0}{b\omega_0}}_{Q} - \underbrace{\frac{K\omega_0}{\omega\omega_0 b}}_{Q}\right)^2} S_{Fn}$$

$$= \frac{1}{b^2} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}Q - \frac{\omega_0}{\omega}Q\right)^2} S_{Fn}$$

La velocità media al quadrato sarà

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty S_{vn}\,df = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty S_{vn}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{b^2} \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \cdot S_{Fn}(\omega)\,d\omega$$

Lo supponiamo indipendente da ω (rumore bianco)

$$= \frac{S_{Fn}\,\omega_0}{2\pi b^2} \int_0^\infty \frac{1}{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \frac{d\omega}{\omega_0}$$

Moltiplichiamo e dividiamo per ω_0

Ora ci dobbiamo fidare della matematica che ci dice che l'integrale risulta:

$$\bar{v}^2 = \frac{\omega_0 \cdot S_{Fn}}{2\pi b^2} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\omega_0 S_{Fn}}{4 b^2 Q}$$

sappiamo che $b = \frac{\omega_0 \cdot m}{Q}$

$$= \frac{S_{Fn}}{4 b m}$$

Possiamo poi scrivere l'energia cinetica come

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{S_{Fn}}{4 b \cdot \cancel{m}} = \frac{1}{2} K_b T$$

energia termica

costante di boltzmann

Perciò possiamo scrivere che $\boxed{S_{Fn} = 4 b K_B T}$ ← Vale per qualsiasi sistema molla smorzatore

Noise equivalent acceleration density

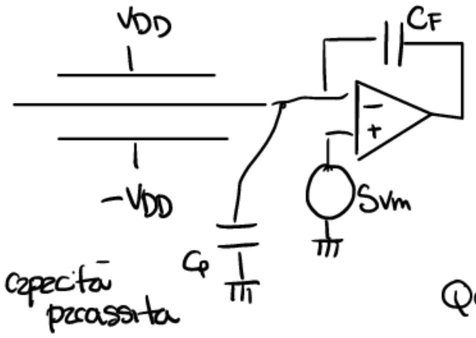
$$S_{An} = \frac{S_{Fn}}{m^2}$$

La Noise Equivalent Acceleration Density considerando solo i contributi aerodinamici è quindi

$$NEAD = \sqrt{S_{an}} = \sqrt{\frac{4 k_b T b}{m^2}} = \sqrt{\frac{4 k_b T \omega_0}{m Q}} \quad \left[\frac{m/s^2}{\sqrt{Hz}}\right] \quad \text{per } \frac{g}{\sqrt{Hz}} \text{ dividere per } 9.8$$

Notiamo che per Q piccoli abbiamo più rumore (trade off rispetto al Q di 0.5 che dicevamo prima

C'è anche il rumore dell'elettronica però. Bisogna considerarlo.

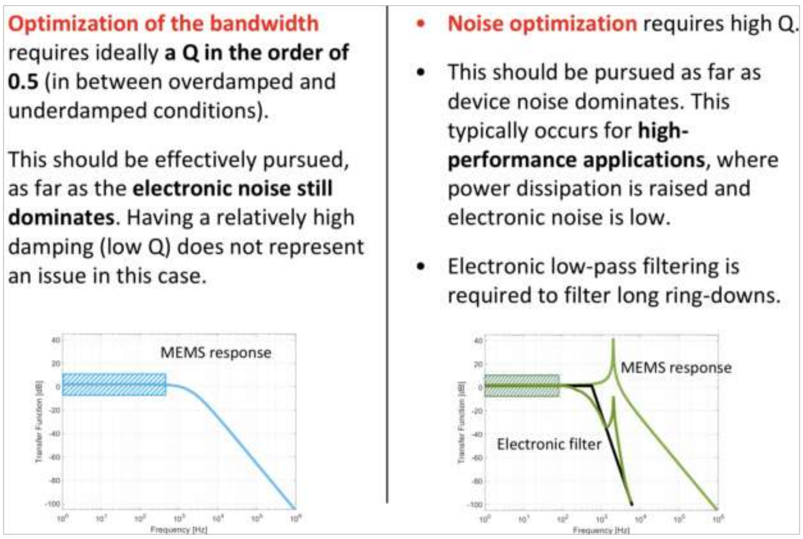


abbiamo detto che la capacità parassita non ha effetti ma forse ne ha sul rumore.

$$S_{vn,out} = S_{vn}\left(1 + \frac{Z_F}{Z_{IN}}\right)^2 = S_{vn}\left(1 + \frac{C_P}{C_F}\right)^2$$

Quindi Cp ha un impatto sul rumore.

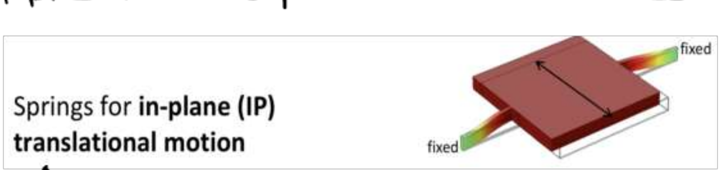
Se il rumore dell'elettronica è dominante posso calare il Q fino a 0.5, al contrario se il rumore termomeccanico è dominante dobbiamo aumentare Q, in questo caso dobbiamo usare un filtro elettronico per "eliminare" la risonanza, allora la banda sarà limitata da questo filtro elettronico



Lezione 5 22/09/2021

Elastic stiffness

La stiffness K è uno dei parametri fondamentali dei MEMS.
Tipi di molle che possiamo avere in un device



Sono le 2 più usate

Abbiamo visto che la stessa struttura può avere più modi di movimento quindi ci possono essere diverse frequenze di risonanza. (dobbiamo fare in modo che le altre modalità di movimento oltre a quella voluta non disturbino)

Possiamo vedere la molla come una semplice trave dove noi gestiamo solo le misure di lunghezza e larghezza dato che l'altezza è data dallo standard.
Un lato della trave è attaccato al substrato (fixed end) l'altro è libero di muoversi.

YOUNG'S MODULUS E

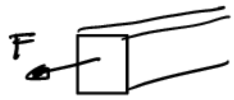
Definisce l'elasticità di un materiale (cioè quanto è possibile piegare un materiale senza avere deformazioni permanenti.
È definito come rapporto tra lo stress σ applicato in modo ortogonale ad un materiale e il reversible strain ε (deformazione relativa)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad \varepsilon = \frac{X}{L}$$

X ← differenza di lunghezza

Potremo calcolare la stiffness di questa trave quando una forza agisce sull'asse della trave

$$K = \frac{F}{x} = E \cdot \frac{A}{L} = E \frac{wh}{L}$$

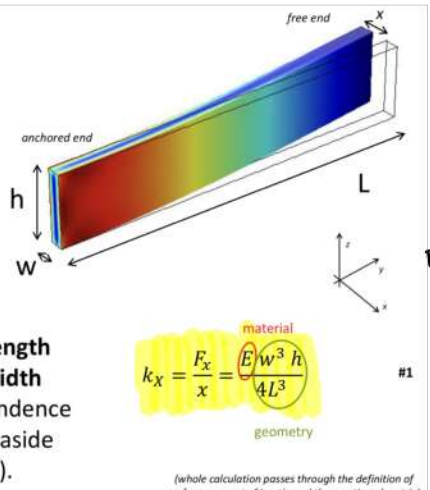


Cose diventano molto più complesse quando la forza non segue l'asse della trave.
Definiamo una matrice con tutti i valori di K per ogni verso di forza.
Noi non ricordiamo la matrice ma prendiamo solo i valori di K che ci servono

Free end beam.

This configuration is named in-plane **clamped beam**, and analyzes a beam clamped at one end only to the substrate, with the second end free to move in any directions.

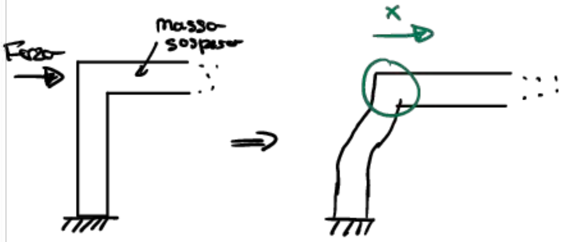
As one intuitively can expect, the **stiffness decreases with the beam length** and **increases with beam width and height**. The exact dependence is described by the formula aside (in red in the previous table).



$$k_x = \frac{F_x}{x} = \frac{E\, w^3 h}{4L^3}$$

(whole calculation passes through the definition of surface moment of inertia and the mentioned matrix)

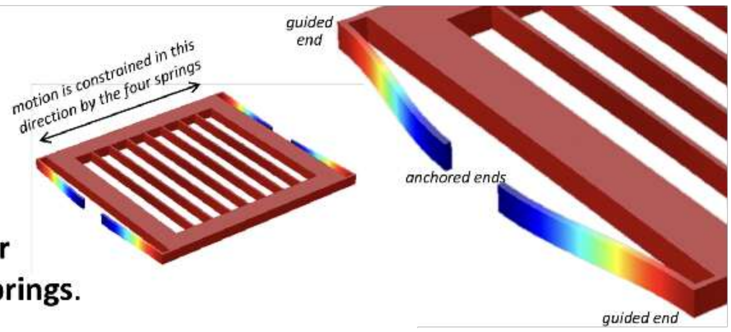
cioè una trave fissa su un lato e libera di muoversi dall'altro. La forza avrà direzione x
La formula di Kx ricavata qua sotto non è abbastanza. Infatti nei nostri casi abbiamo che



Notiamo che abbiamo avuto un displacement solo nella direzione x e non anche nella y come avremo avuto nel caso libero

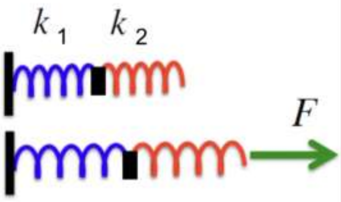
Nella realtà noi abbiamo una "trave guidata". Come facciamo adesso a calcolare K di questa struttura?

It is e.g. the case of **any device suspended by an even number of symmetric springs.**



Per fare i conti dobbiamo definire il concetto di molle in serie
Come calcoliamo la stiffness equivalente di 2 molle messe in serie?

Let us assume **two springs** with arbitrary stiffness k_1 and k_2. The springs are connected in series and subject to a force F.



$$x_1 = \frac{F}{k_1} \qquad x_2 = \frac{F}{k_2}$$

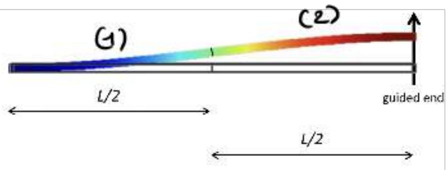
$$x = x_1 + x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right) = \frac{F}{k_x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k_x} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

(springs behave like "capacitors")

$$k_x = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

le stiffness si comportano come condensatori messi in serie

Abbiamo introdotto questa serie perché nel nostro caso reale la trave guidata può essere vista come la serie di 2 free end beams.



The stiffness calculation can be easily done by assuming that the spring is **formed by the series of two identical free-end springs**, having half the length L each.

$$k_1 = k_2 = \frac{E w^3 h}{4 (L/2)^3} = 2\frac{E w^3 h}{L^3}$$

$$k_x = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{2} k_1 = \frac{1}{2} 2 \frac{E w^3 h}{L^3} = \overset{\text{material}}{E}\, \underset{\text{geometry}}{\frac{w^3 h}{L^3}}$$

dividiamo perciò la trave nelle sue 2 sottocomponenti.

Possiamo poi calcolare il K come detto precedentemente.

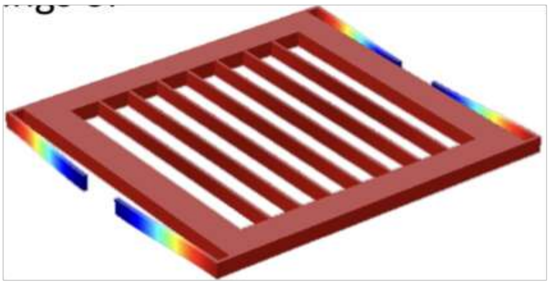
Visto che poi abbiamo 4 molle in parallelo dobbiamo anche introdurre il concetto di molle in parallelo che è il duale di quello visto adesso

Stiffness parallelo:

$$K_x = K_1 + K_2$$

Perciò la stiffness totale di un accelerometro è

$$K_x = 4 \cdot \frac{E w^3 h}{L^3}$$

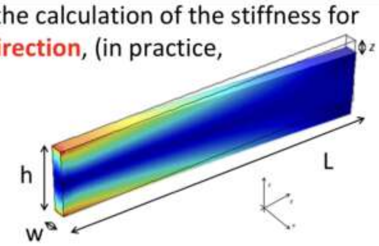


ricordiamo che si può gestire solo w e L e non h, mentre tutto il resto dei parametri sono fissi.

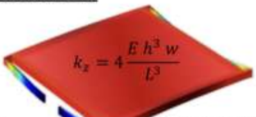
Supponiamo ora di avere la stessa configurazione ma di volere il displacement verticale

Identical considerations hold for the calculation of the stiffness for a force acting **along the vertical direction**, (in practice, you should exchange w and h).

$$k_z = \frac{F_z}{z} = \frac{E h^3 w}{4 L^3} \qquad k_z = \frac{E h^3 w}{L^3}$$



Note the **cubic dependence on h, a parameter you cannot act on** by design. This makes it difficult to obtain low stiffness values for z-axis devices based on this kind of spring (vertical translation).



Z-axis motion (PP readout are positioned beneath the device using the interconnections layer)

Using the same parameters as for the x-axis device we get a stiffness more than 100 times larger:

- L = **200 µm**, w = **1.5 µm**, h = **20 µm**, E = 150 GPa → k_{tot} = **900 N/m**
- the **resonance frequency grows and the sensitivity decreases**…

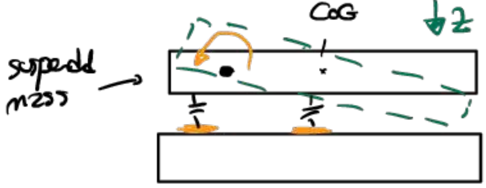
l'altezza è fissata dal processo e qui abbiamo una dipendenza cubica da questo.
Quindi abbiamo che K_{tot} è molto grande e quindi la sensibilità è decisamente molto piccola.

Capiamo quindi perché questa topologia è scarsamente utilizzata

Torsional springs.

- Come abbiamo detto abbiamo valori di K_z troppo grandi
- come è notabile abbiamo soltanto una misura di capacità, non posso farla differenziale

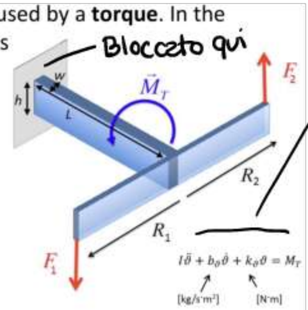
Un modo per misurare le variazioni di z è cambiare topologia (la suspended mass ruota)



Usiamo 2 elettrodi così possiamo anche qui avere capacitive sensing differenziale, infatti una C va diminuendosi mentre l'altra aumenta

Dobbiamo considerare la torsional motion equation

In general, an OOP rotation will be caused by a **torque**. In the course, we analyze only configurations similar to the one aside.



The torque M_T **will be the sum of the two individual torques**, each defined as the product of the distance from the rotation center and the applied force (so,in [N·m]).

$$M_T = R_1F_1 + R_2F_2$$

For the considered bar configuration, the torsional **stiffness** (in light blue in the main table) is given by:

- note the unit of torsional stiffness: [N·m];
- note the use of G (shear modulus, ~65 GPa in polySi), the «equivalent» of E for torsions.

$$k_\vartheta = G \frac{h\,w^3}{3\,L}$$

material — geometry — #2

come abbiamo fatto con l'equazione del piano non consideriamo i primi 2 termini

la torque massima è $F_1R_1 + F_2R_2$

G: è un parametro del materiale è tipo l'opposto dell'Young's modulus

Questa formula importante deriva dalla matrice

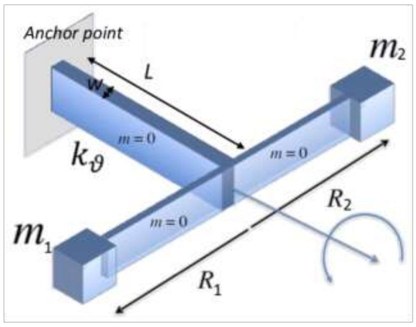
Tipicamente abbiamo 2 travi che sostengono la massa sospesa, quindi queste 2 saranno in parallelo e usiamo la formula per i casi in parallelo.

Noi sappiamo che possiamo scrivere la frequenza di risonanza come $\omega_0 = \sqrt{\frac{I}{K_\theta}}$ dove I è il momento d'inerzia. Perciò dobbiamo sapere come calcolare il momento d'inerzia.

Usiamo un caso semplificato.

il momento d'inerzia ci dice la capacità che ha un corpo di mantenere il suo stato di rotazione

+ distanti sono le masse dal centro maggiore è il momento d'inerzia



$$I_1 = \int_{m_1} r_1^{\,2}\,dm_1 = \int_0^{R_1} r_1^{\,2} s(r_1)\,h\,\rho\,dr_1 = \frac{R_1^3 s\rho h}{3} = \frac{R_1^2 m_1}{3}$$

the integral "weighs" the infinitesimal mass contributions accounting for their distance from the rotation center (higher rotational inertia = more mass far from the rotation axis)

$$I_2 = \frac{R_2^2 m_2}{3} \qquad I_{tot} = I_1 + I_2$$

Questa formula vale solo per la massa m_1 e poi bisogna farlo anche per m_2

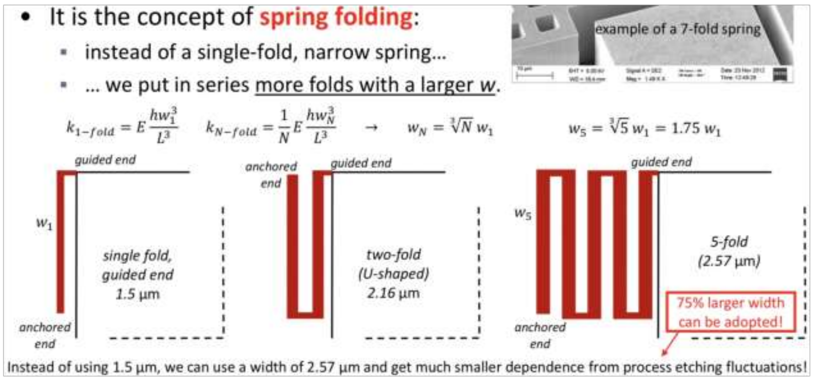
Effetti dei processi di produzione non uniformi sulle molle.

Se andiamo verso il limite inferiore delle dimensioni generabili con la nostra tecnologia (es 1,5µm) potremmo avere delle non uniformità di processo (±0,15µm)

Abbiamo che un 10% della variazione nella larghezza w va a prefissarsi come un ±30% di incertezza della stiffness. (e anche un ±15% della banda)

Per risolvere questo problema di processi di produzione potremmo fare w più grande (tipo il doppio) ma non è una grande idea dato che se non allunghiamo il design otteniamo che il fattore K aumenta di 8 (il cubo di w)

il modo reale di risolvere questo problema è sfruttare la serie di molle, infatti ci ricordiamo che la serie di 2 molle da come risultato un K minore



Facciamo la molla come piegamento di diversi elementi. Grazie all'effetto della serie posso aumentare la dimensione di w.

Accelerometro parte 4

24/09/2021

Ci possono essere degli offset nei MEMS (DC output non volute)

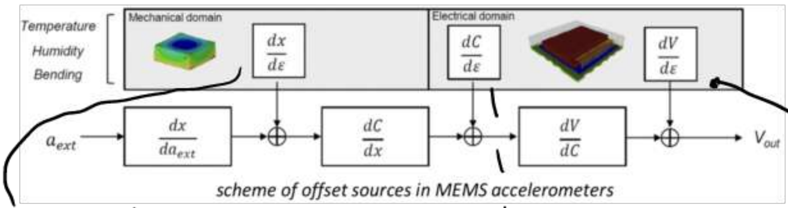


Grafico che ci rappresenta i diversi tipi di offset

errori di tensione (i soliti)

Dovuti a deformazioni meccaniche date tipo da umidità temperatura

Potremmo avere un gap tra i 2 elettrodi un po' più piccolo dell'altro

Offset meccanici

Nei datasheet vengono chiamati come zero-g offset.

Le maggiori cause di offset sono dovute al fatto che, o il gap tra i 2 piatti paralleli non è uniforme (non uniformità tra rotore e statore) oppure da stress meccanici residui, cioè forze interne alla struttura dovute al processo di fabbricazione ad alta temperatura che possono portare a deformazioni meccaniche.
In realtà il fatto di avere un offset non è un enorme problema, potrei fare delle calibrazioni se l'offset è costante. Il problema però è che l'accelerometro lavorerà a diverse temperature quindi l'offset comunque un po' varierà.

Il tipico zero-g offset è 1mg/K (se prendiamo l'intero range di temperatura di funzionamento −40, +85 °C allora ho 125mg su tutto il range di temperatura)
Questo non è bene, infatti se riprendiamo i valori tipici di un accelerometro, otteniamo che:

Let us recall the **typical numbers** used in the past class:

- assume C_0 = 200 fF;
- assume g = 2 µm;
- assume m = 5 nkg, k = 3 N/m;
- calculate f_0 = 3.8 kHz;
- → we derived a maximum linear FSR (0.5% error) in these conditions which was of about 8$\hat{g}$ (140 nm), with typical rms noise in the order of 1 m$\hat{g}$.

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 A N}{(g - x_{os})} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 A N}{(g + x_{os})}$$

Ricordiamo poi che

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

allora se noi consideriamo un offset x_{os}, allora posso ricavare una relativa a_{os}, infatti entrambe si legano alla frequenza di risonanza.

Se quindi suppongo un offset meccanico di 10nm ottengo una variazione di

$$a_{os} = X_{os}\,\omega_0^2 = 582\,m\hat{g}$$

che è tantissimo rispetto il minimo segnale che potremmo misurare (1g)
Inoltre questo offset che abbiamo sempre è comunque una buona parte del Full scale range, quindi abbiamo problemi anche lì.

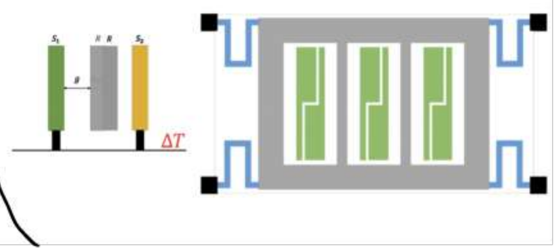
Ci sono modi per ridurre questo offset? Sì, vediamoli:

$$S = 2\frac{dx}{da_{ext}}\frac{dC}{dx}\frac{dV}{dC}$$ (SCALE FACTOR)

$$x_{max} = FSR \cdot \frac{dx}{da_{ext}}$$

TRADE-OFF: FSR vs ZGO_{Drift}

$$ZGO(T) = \frac{x_{os}(T)}{\frac{dx}{da_{ext}}}$$



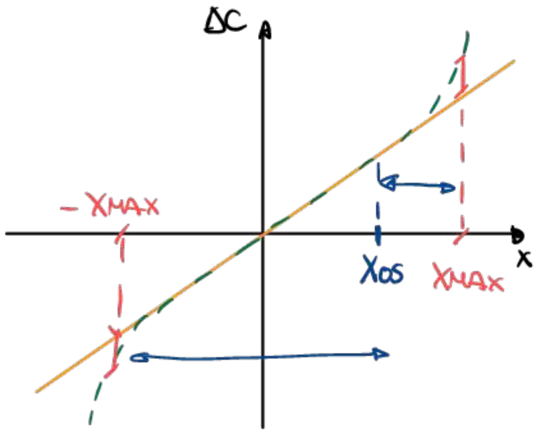
Zero g offset

è il conto fatto prima

Quando abbiamo fissato la linearità e il full scale range possiamo calcolare il massimo displacement.

Per ridurre il ZGO dovremmo aumentare il transduction factor ma questo va in trade off con il full scale range!

Gli offset meccanici inducono anche una non linearità in uscita.



Ricordiamo che avevamo definito il full-scale range come la variazione di x per avere massima variazione di C rispetto alla retta di un valore finito (es 5%)

Se abbiamo un offset meccanico molto grande succede che ho che X_{os} non si trova al centro della curva perciò X_{os} si trova più vicino a X_{MAX} che $-X_{MAX}$ e visto che siamo obbligati ad avere linearità tra accelerazioni positive e negative allora sono obbligato a ridurre il full scale range.

- the capacitance variation with no mechanical offset:

$$\Delta C_{diff} = 2C_0\frac{x}{g}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x}{g}\right)^2}\right]$$

- the capacitance variation in presence of a mechanical offset x_{os}:

$$\Delta C_{diff} = C_0\left(\frac{-1}{1+x/(g-x_{os})}+\frac{1}{1-x/(g+x_{os})}\right) \approx 2C_0\frac{x}{g}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{x-x_{os}}{g}\right)^2}\right]$$

NOTE: x_{os} is a constant here, and can be positive or negative

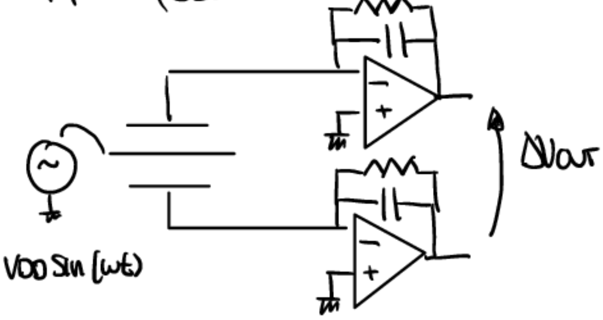
Calibrazione

Misuriamo gli offset e sempre con gli stessi elettrodi applichiamo una forza elettrostatica e ricaviamo la sensibilità.
Tutte queste informazioni le salviamo in un registro digitale e poi in funzionamento sottraiamo questi valori.
Possiamo anche fare queste misurazioni a diverse temperature e avere diverse compensazioni di offset a diverse temperature.

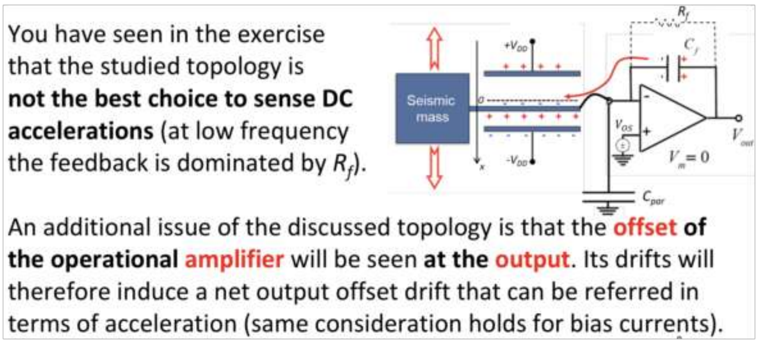
OFFSET ELETTRONICO

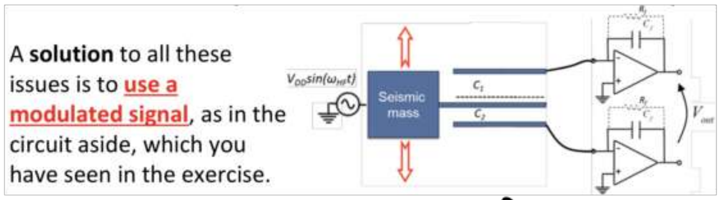
$$\frac{\Delta V_{out}}{a} = 2\frac{C_0}{g}\frac{V_{DD}}{C_F}\cdot\frac{1}{\omega_0^2}$$

Oppure posso fare



$$\frac{\Delta V_{out}}{a} = 2\frac{C_0}{g}\frac{V_{DD}}{C_F}\cdot\frac{1}{\omega_0^2}\sin(\omega_{HF}t)$$



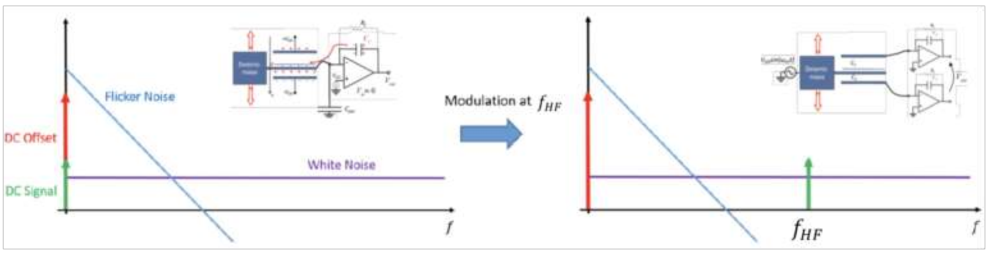


moduliamo il segnale ad alta frequenza e filtriamo tutto quello che c'è a bassa frequenza compreso l'offset di tensione dell'opamp

Se considero le equazioni della topologia con l'offset ottengo che

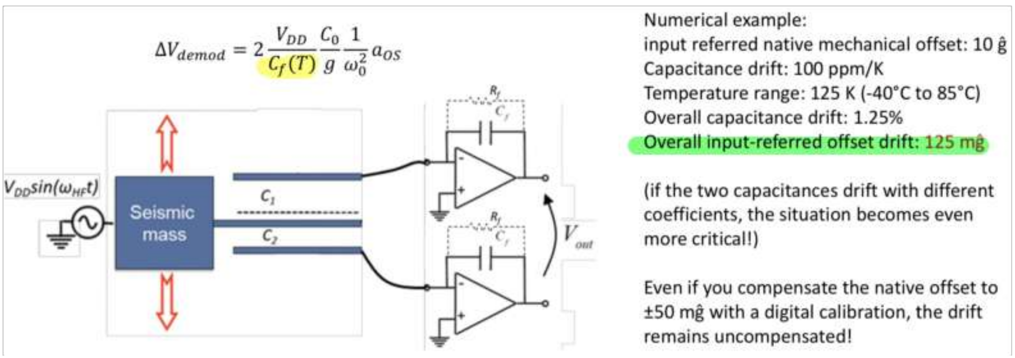
$$\Delta V_{out} = 2\frac{V_{DD}}{C_F}\frac{C_0}{g}\frac{1}{\omega_0^2}\sin(\omega_{HF}t)a_{ext} + V_{os}(T)$$

Però la differenza tra caso con configurazione in DC e in RF è che:



(tipicamente poi abbiamo anche il rumore 1/f)

Per demodulare facciamo una demodulazione coerente (in pratica un lock-in amplifier)
Tuttavia anche con questa tecnica c'è qualcosa che potrebbe dare offset.
Cosa succede infatti se le capacità di retroazione hanno quella di shiftare valore in funzione della temperatura? Anche se le 2 capacità cambiano allo stesso modo ho una variazione della tensione d'uscita.



ALTERNATIVE READ OUT TOPOLOGIES.

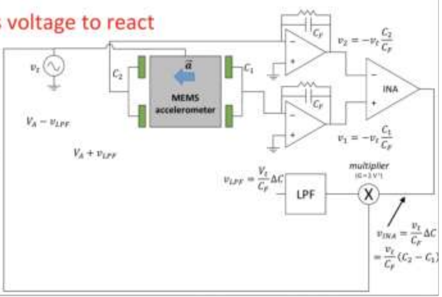
Force feedback

Let us follow the phase of the sinusoidal signals in the circuit below:

- assume a 0° reference phase for the sinusoidal signal $v_t = V_t \sin(\omega_{HF} t)$;
- assume that the inertial force pushes the mass leftwards;
- C_2 increases while C_1 decreases, thus the INA output is in phase with respect to v_t;
- the low-pass filter output after the demodulation is thus positive;
- thus far, this is our «standard» operation.

What if we exploit this voltage to react on the mass motion and keep it in the central position?...

- the LPF output is duplicated with opposite sign and sent to the new electrodes;
- they apply a force that reacts on the motion induced by a_{ext}!



l'idea è che al posto di avere un device che si sposta e noi leggiamo lo spostamento prendiamo un device che si può spostare ma noi facciamo un feedback che cerca di tenerlo fisso nello stesso posto.
La forza (quindi tensione) per tenere il dispositivo fermo sarà la nostra uscita.

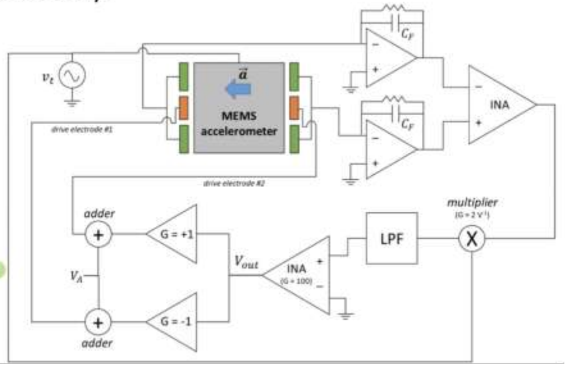
The electrostatic force applied by the right electrode is larger than the one applied by the left electrode.

The **loop gain is thus negative, as it reacts to the mass motion and tends to keep it in the central position**. If the loop gain is large enough, the electrostatic force will balance the inertial action. In this way we find the sensitivity:

$$F_{elec} = \left[\frac{(V_A + V_{out})^2}{2} - \frac{(V_A - V_{out})^2}{2}\right]\frac{C_{0d}}{g} = \frac{2V_A V_{out} C_{0d}}{x_0} = m\, a_{ext}$$

$$\frac{V_{out}}{a_{ext}} = \frac{m\, g}{2V_A C_{0d}} = \frac{k\, g}{\omega_0^2 2V_A C_{0d}}$$

- advantage: as the **MEMS is always close to the central position**, linearity and thus FSR are extended!
- drawback: **additional circuit blocks** mean larger consumption!



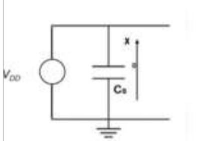
CHARGE CONTROLLED READOUT

Noi sappiamo che

$$\Delta Q = \Delta C \cdot V_{DD}$$

Allora la teoria è che noi non mettiamo il rotore a massa virtuale ma mettiamo solo delle tensioni di bias e regoliamo la carica che infondiamo nel sistema. La tensione che abbiamo sul rotore è in funzione della carica che abbiamo infuso. Per infondere carica intendiamo mandare impulsi di corrente (integriamo la corrente nel tempo dell'impulso e abbiamo la carica.

Let us start, for the sake of simplicity, from a **single-ended MEMS** capacitor. Let us see the **difference between voltage control and charge control** (C_S is a generic MEMS sense capacitance).

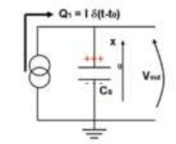


Voltage is the controlled quantity
Charge is the derived quantity

$$Q_1 = V_{DD} C_S$$

$$F_{elec} = \frac{V_{DD}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{(g-x)^2}$$

position dependent



Charge is the controlled quantity
Voltage is the derived quantity

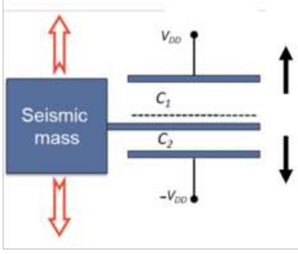
$$V_{out} = \frac{Q_1}{C_s}$$

$$F_{elec} = \frac{V_{out}^2}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{(g-x)^2} = \frac{Q_1^2}{2\,C_s^2}\frac{\varepsilon_0 A}{(g-x)^2} = \frac{Q_1^2}{2}\frac{1}{\varepsilon_0 A}$$

position independent

The electrostatic force **generated by a given charge quantity is independent of the position**.

If we use a differential charge-controlled system, as below, due to charge neutrality on the mass, we always have $Q_1 = Q_2$: so we can **ideally obtain a null electrostatic force on the suspended mass! No pull-in phenomena will thus occur in this situation**!



$$F_{elec,1} = \frac{Q_1^2}{2\varepsilon_0 A}$$

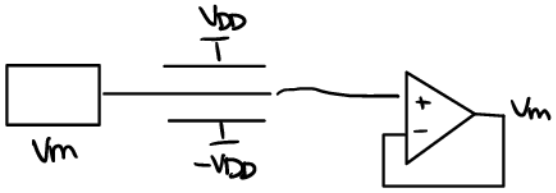
$$F_{elec,2} = \frac{Q_2^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{F_{elec,tot} = 0 \quad \text{if } Q_1 = Q_2}$$

NOTE: also voltage-controlled comb-finger capacitors led to this advantage. However in that situation we had an inherent sensitivity decrease.

Possiamo eliminare i problemi legati alla pulling instability.

Per leggere la tensione sul rotore possiamo fare:



$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$-C_1(V_{DD} - V_m) + C_2(V_{DD} + V_m) = 0$$

$$-\frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{g+x}(V_{DD} - V_m) + \frac{\cancel{\varepsilon_0 A}}{g-x}(V_{DD} + V_m) = 0$$

quindi

$$\frac{V_m}{g+x} + \frac{V_m}{g-x} - \frac{V_{DD}}{g+x} + \frac{V_{DD}}{g-x} = 0$$

$$V_m\left(\frac{1}{g+x} + \frac{1}{g-x}\right) - V_{DD}\left(\frac{1}{g+x} - \frac{1}{g-x}\right) = 0$$

$$V_m\left(\frac{g\cancel{-x}+g\cancel{+x}}{\cancel{g^2-x^2}}\right) - V_{DD}\left(\frac{\cancel{g}-x-\cancel{g}-x}{\cancel{g^2-x^2}}\right) = 0$$

e finalmte

$$V_m \cdot 2g + V_{DD}\, 2x = 0 \longrightarrow V_m = -V_{DD}\frac{x}{g}$$

è un metodo molto bello e semplice. Ma c'è un grande lato negativo!! Quello delle capacità parassite.

Esercitazione

PROBLEM DESCRIPTION AND QUESTIONS

You are a young MEMS designer and your supervisor asks you to redesign a consumer-grade accelerometer and to give some forecasts on the electro-mechanical performance of the sensor. The bounded geometrical parameters are reported in Table 1. Additionally, the accelerometer must ensure a full scale range $FSR = \pm 16\ \hat{g}$, and the parallel plates can be polarized at $V_{DD} = \pm 3\,\mathrm{V}$.

1. Given that the maximum acceptable linearity error, ϵ_{lin}, is equal to 1%, calculate the maximum capacitance variation.
2. Calculate the mechanical sensitivity [fF/ĝ] and the resonance frequency during the operation of the accelerometer.
3. Evaluate the contribution of the parallel plates in terms of electrostatic stiffness and choose the geometry of the springs.
4. Calculate the needed quality factor, Q, to guarantee a NEAD $= 25\ \frac{\mu\hat{g}}{\sqrt{\mathrm{Hz}}}$.

	Symbol	Value
Young's modulus	E	150 GPa
process tickness	h	24 µm
seismic mass	m	4.5 nkg
maximum spring length	l_{max}	200 µm
minimum spring width	w_{min}	1.7 µm
# diff PP cells	N_{PP}	10
length of PP	l_{PP}	300 µm
gap of PP	g_{PP}	2 µm

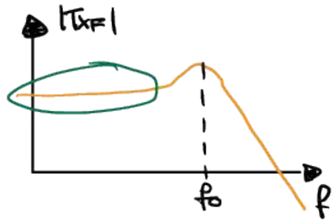
Table 1: fixed parameters.

Tipicamente il Full scale range è legato molto alla linearità del sistema.

• Punto 1) Dato il massimo errore di linearità ricavare la massima variazione di capacità.

Ricordiamo che

- $m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = ma + F_{elec}$



abbiamo la forza elettrostatica perché abbiamo un lettore di capacità differenziale. (K_{elec})

Useremo le folded springs per regolare il valore di K

b, il valore di damping è fortemente legato al rumore termico.

Continuiamo ora con l'esercizio punto 1:
Abbiamo non linearità perché le variazioni di capacità non sono lineari relativamente al displacement. Tuttavia abbiamo visto che è linearizzabile con un errore percentuale, allora:

$$\Delta C_{real} = \frac{\varepsilon_0 A N}{g - x} - \frac{\varepsilon_0 A N}{g + x}$$

$$= \underbrace{\frac{\varepsilon_0 A N}{g}}_{C_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{g}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{g}} \right)$$ Si vede che non è lineare

con conti fatti a lezione

$$\stackrel{!}{=} 2C_0 \frac{x}{g} \frac{1}{1 - \cancel{\left(\frac{x}{g}\right)^2}}$$

small displacement approximation $\to 0$ $\to$ $\Delta C_{linear} = 2C_0 \frac{x}{g}$

Questa approssimazione sarà l'errore.

Possiamo calcolare l'errore

$$\varepsilon_\% = \left(\frac{X_{MAX}}{g}\right)^2 \cdot 100 \longrightarrow X_{MAX} = g \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_\%}{100}} = 200 nm$$

è l'area (lunghezza parallel plate · altezza processo)

$$\Delta C_{MAX} = \Delta C_{real, MAX} \simeq \Delta C_{lin, max} = 2C_0 \cdot \frac{X_{MAX}}{g} = 2 \cdot \underbrace{\frac{\varepsilon_0 \, h \, L_{PP} \cdot N}{g}}_{C_0} \cdot \frac{X_{MAX}}{g}$$

$$= 64.4 \; fF$$

- Punto 2, Calcolare la sensitività meccanica $[fF/\hat{g}]$ e la frequenza di risonanza durante il funzionamento dell'accelerometro (questo perché dobbiamo considerare le forze elettrostatiche dato che l'accelerometro è acceso)

overall sensitivity: $S = 2 \cdot \frac{C_0}{g} \cdot \frac{V_{DD}}{C_F} \cdot \frac{1}{\omega_0^2}$ $[V/m/s^2]$

La sensibilità meccanica è

$$S_{mech} = 2 \cdot \frac{C_0}{g} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \quad [F/m/s^2]$$

Abbiamo tolto la componente relativa all'elettronica.

Abbiamo 2 incognite (S_{mech} e ω_0^2), se avessimo avuto K avremmo potuto calcolare cub

Abbiamo però il Full scale range acceleration e dal punto di prima sappiamo i risultati del punto precedente.
La massima variazione di capacità deve risultare nella massima accelerazione

$$S_{mech} = \frac{\Delta C}{\Delta a} = \frac{\Delta C_{MAX}}{\Delta a_{MAX}} = \frac{64{,}4\ fF}{16\ \hat{g}} = 4\ \frac{fF}{\hat{g}} = 0{,}4\ \frac{fF}{m/s^2}$$

visto che è solo sensitività meccanica lavoriamo con ΔC se avessimo avuto l'overall sensitivity avremmo usato la delta di tensione.
Posso adesso calcolare ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{2\frac{C_0}{g}\cdot\frac{1}{S_{mech}}}$$

in queste formule usare sempre i valori del sistema internazionale

$$= \sqrt{2\frac{\varepsilon_0 AN}{g^2}\cdot\frac{1}{S_{mech}}}$$

g è basta è gap, $\hat{g}$ è accelerazione

$$= \sqrt{2\underbrace{\frac{\varepsilon_0 AN}{g}}_{318\ fF}\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{S_{mech}}} = 4{,}5\ KHz\cdot 2\pi$$

• Problema 3
Dobbiamo calcolare l'effetto della forza elettrostatica e la geometria della molla.

$f_0 = 4{,}5\ KHz$ $\quad \omega_0 = 2\pi f_0$ $\quad$ questi sono i valori in operazione

Allora

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{TOT}}{m}} \qquad K_{TOT} = \omega_0^2\cdot m = 3{,}6\ N/m$$

So che ogni volta che applico una tensione al condensatore ho una forza

$$|F| = \frac{V_{DD}^2}{2}\cdot\underbrace{\frac{\partial C}{\partial x}}_{\frac{C_0}{g}} + \dots \rightarrow \text{small displacement} = 2\frac{C_0}{g^2}V_{DD}^2\cdot x$$

La forza è proporzionale al displacement, allora

$2\frac{C_0}{g^2}V_{DD}^2$ ho la stessa forma dell'elastic stiffness

Posso allora scrivere che

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (K - \underbrace{2\frac{C_0}{g^2}V_{DD}^2}_{K_{elec}}) = ma_{ext}$$

Capiamo che K_{TOT} è minore rispetto al K iniziale

Allora $K_{elec} = -2\frac{C_0}{g}V_{DD}^2 = -1{,}43\ N/m$

$$K = K_{TOT} - K_{elec} = 3{,}6 - (-1{,}43) \simeq 5\ N/m$$

Uno dei dati in tabella è la maximum spring lenght (e anche una minima)
la stiffness della molla si calcola come

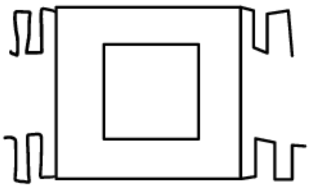
$$K_{GE} = E\, h \left(\frac{W_{GE}}{L_{GE}}\right)^3 \cdot 4 = 5\, N/m$$

Perché sono 4 molle in parallelo

Allora

$$W_{GE} = L_{GE} \cdot \sqrt[3]{\frac{5N/m}{E \cdot h \cdot 4}} = 200\mu m \sqrt[3]{\frac{5N/m}{150\, GPa \cdot 24\mu m \cdot 4}} \cong 1{,}4\mu m$$

che però è minore rispetto alla W_{MIN} $1{,}4\mu m \ll 1{,}7\mu m$.
Quindi non va bene.
Allora mettiamo più pieghe per abbassare K e poi allargare per tornare allo stesso K.



3-folded spring

$$K_{FOLD} = E \cdot h \left(\frac{W_{FOLD}}{L_{FOLD}}\right)^3 \cdot \frac{4}{N_{FOLD}} = 5\, N/m$$

noi imponiamo che $W_{FOLD} > 1{,}7\mu m$

$$W_{FOLD} = \sqrt[3]{\frac{5N/m \cdot N_{FOLD}}{E h \cdot 4}}\, L_{FOLD} > 1{,}7\mu m$$

l'unica incognita è N_{FOLD}

$N_{FOLD} > 1{,}8$ (allora 2, dato che sono un numero intero).

29.09.2021 Esercitazione

In this class we will learn how to design the readout electronics for an accelerometer similar to the design of E01. We will analyze the charge amplifier topology, identifying all noise contributions and their relative weight in the noise budget of the system. Finally, we will study the drawbacks of a DC-voltage based stage and we will discuss an alternative readout.

Problem description and questions

You work in the *R&D* laboratory af a MEMS company, and you have to design an electronic board in order to test a new capacitive accelerometer. The sensor application is vibration monitoring on an electrical engine. Vibrations (which are AC accelerations) are expected in a specific frequency range, from 40 Hz to 400 Hz. The MEMS sensor has a mass of 8 nkg, a mechanical stiffness of 5 N/m and a quality factor $Q = 2$. The capacitive sensing is performed through 5 cells of differential parallel-plate capacitors, each one with 200 µm-long stators. The gap between rotor and stators is 2.5 µm and the process height is 15 µm. The device readout is performed through a charge amplifier configuration, as represented in figure 1. The capacitance $C_P = 10\,\text{pF}$ accounts for capacitive couplings between the rotor (including its pad and interconnections) and the grounded substrate.

1. Considering the softening given by parallel plates biased at $V_{dd} = \pm 1.8\,\text{V}$, calculate the value of the feedback capacitor C_F in order to obtain a sensitivity of $6\,\text{mV}/\text{g}$.

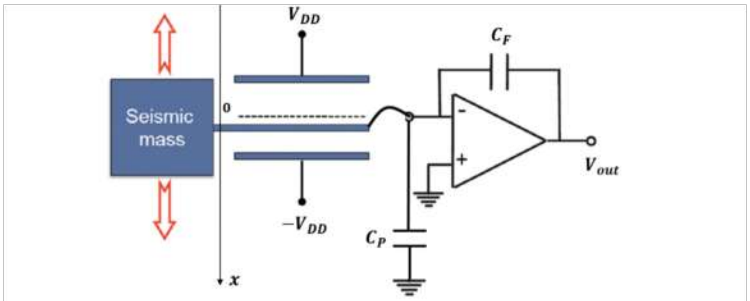
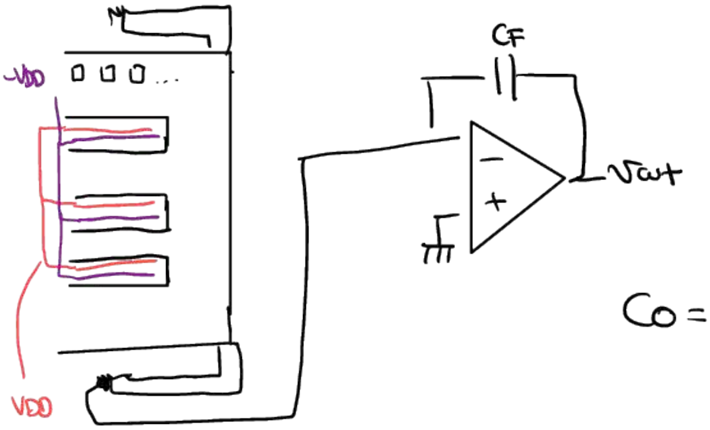


Figure 1: Schematic representation of the system.

2. Consider now the bias currents of the operational amplifier ($i_{bias} = 0.05\,\text{pA}$). Does this leakage affect the behavior of the stage? Modify the topology of the circuit in order to solve this issue.
3. Compare the device noise in terms of NEAD $\left[\frac{g}{\sqrt{Hz}}\right]$ and the front-end electronic noise in terms of $\left[\frac{g}{\sqrt{Hz}}\right]$. For the latter case evaluate three main contributions: the operational amplifier voltage noise $\left(S_{v,n} = \left(10\,\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2\right)$, the operational amplifier current noise $\left(S_{i,n} = \left(0.3\,\frac{fA}{\sqrt{Hz}}\right)^2\right)$ and the resistance thermal noise, providing reasonable approximations for the frequency range of interest.
4. Is this kind of readout suitable for a measurement of the absolute inclination of the electrical engine? If not, how can you modify the circuit to cope with this additional feature?

PUNTO 1)



$$S = 2 \cdot \frac{C_0}{g} \cdot \frac{V_{DD}}{C_F} \cdot \frac{1}{\omega_0^2}$$

Sappiamo tutto e perciò possiamo calcolare C_F — nº di piatti paralleli

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 L_p \cdot h \cdot N}{g} = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 200\mu \cdot 15\mu \cdot 5}{2{,}5\mu} \simeq 53\,fF$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{TOT}}{m}} \qquad K_{TOT} = K + K_{elec} \qquad K_{elec} = -2\,C_0 \cdot \frac{V_{DD}^2}{g^2}$$

$$= -2 \cdot \frac{53fF \cdot (1{,}8V)^2}{(2{,}5\mu m)^2} \simeq 0{,}05\,N/m$$

$|K_{elec}| << K = 5\,N/m$ perciò possiamo dire che $K_{TOT} \simeq K$

perciò la frequenza di risonanza in funzionamento non sarà molto diversa da quella naturale

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_{TOT}}{m}} \sim \sqrt{\frac{K}{m}} = 25\,K\frac{rad}{s}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 4KHz$$

siamo felici di questo perché il nostro segnale è da 40 a 400 Hz che è molto prima della frequenza di risonanza

Perciò $C_F = \underbrace{2\frac{C_0 V_{DD}}{g}\frac{1}{\omega_0^2}}\cdot\frac{1}{S} \longrightarrow C_F = 203\,fF$

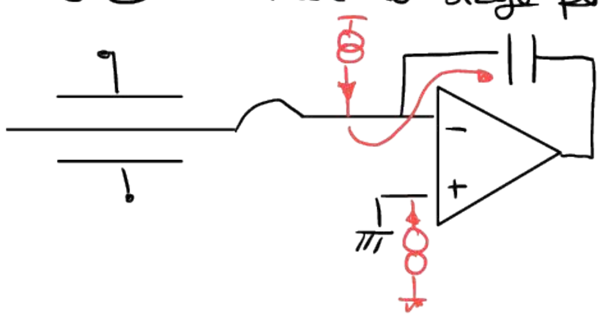
Se tutte queste sono nelle grandezze del sistema internazionale, allora devo mettere anche S in $mV/m/s^2$ $\longrightarrow S = \frac{6mV}{g} \rightarrow 0{,}6\frac{mV}{m/s^2}$

2)

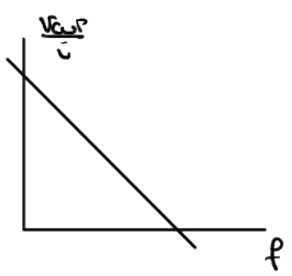
$i_{bias} = 0{,}05pA$ del OPAMP ← Queste correnti di leakage affliggono lo stage?

Queste correnti fanno sì che la corrente scorre nel condensatore e porterebbe l'output a $+\infty$.

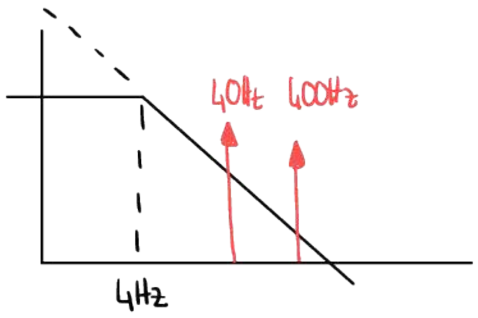
l'idea è di modificare lo stage per non far andare l'uscita a $+\infty$.



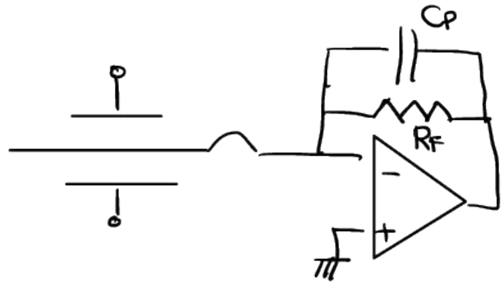
$$V_{OUT} = \frac{\int i_{bias}\,dt}{C_F} \longrightarrow \infty$$



Noi vogliamo mantenere l'azione derivativa del circuito tra i 40 e 400 Hz
Allora vogliamo che la FDT sia



Limitiamo il guadagno a frequenze vicine a DC. mettiamo il polo una decade prima del nostro segnale

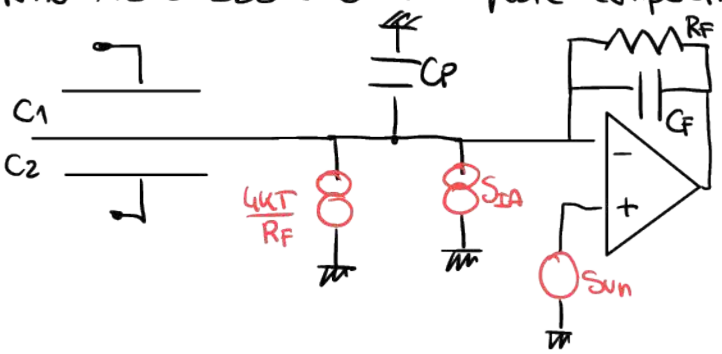


$$Z_F = R_F // C_F = \frac{R_F \cdot \frac{1}{sC_F}}{R_F + \frac{1}{sC_F}} = \frac{R_F}{1 + sC_F R_F}$$

impongo $\frac{1}{2\pi R_F C_F} = 4\text{Hz} \rightarrow R_F = \frac{1}{2\pi\, 203\text{fF} \cdot 4\text{Hz}} = 200\,\text{G}\Omega$

PUNTO 3)
Compariamo i vari rumori.

Tipicamente in un sistema MEMS abbiamo diverse sorgenti di rumore. In un grande sistema MEMS abbiamo che queste componenti sono molto simili.



Abbiamo anche la capacità Cp parassita che in pratica è in parallelo a C1 e C2

$C_P // C_1 // C_2 = 10p + 53f + 53f \simeq 10p$

Iniziamo calcolando la noise equivalent acceleration density

NEAD

$$S_{Fn} = 4K_BTb = 4K_BT\frac{\omega_0 m}{Q} \qquad S_{Am} = \frac{S_{Fn}}{m^2}$$

$$\sqrt{S_{A,1}} = NEAD = \sqrt{\frac{4K_BT\omega_0 m}{Q \cdot m}} = \frac{160\,\mu m/s^2}{\sqrt{Hz}} \frac{9,8}{9,8} \simeq \frac{16\,\mu g}{\sqrt{Hz}}$$

1g

Calcoliamo ora gli effetti della voltage noise

$$S_{Vout} = S_{vn}\left(1 + \frac{Z_F}{Z_I}\right)^2 = S_{vn}\left(1 + \frac{\frac{R_F}{1+sC_FR_F}}{\frac{1}{sC_F}}\right)^2$$

Nella nostra banda d'interesse sappiamo che $1 + sC_FR_F \simeq sC_FR_F$

Allora

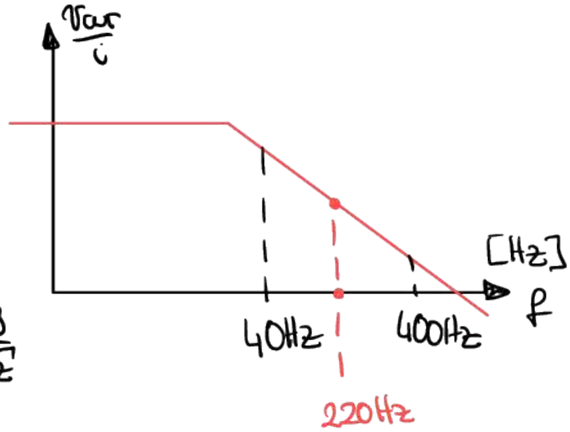
$$S_{Vout} = S_{vn}\left(1 + \frac{C_P}{C_F}\right)^2 \left[\frac{V^2}{Hz}\right]$$

è importante che teniamo la Cp più piccola che possiamo perché amplifica il rumore

$$\sqrt{S_{A,2}} = \frac{\sqrt{S_{vn}}\left(1+\frac{C_P}{C_F}\right)}{S} = \frac{\frac{10nV}{\sqrt{Hz}}\left(1+\frac{10p}{200fF}\right)}{6\frac{mV}{g}} =$$

Amplifier current Noise

$$S_{Vout,In} = S_{In}\cdot\left(\frac{1}{sC_F}\right)^2$$



$$\sqrt{S_{A,3}} = \frac{\sqrt{S_{I_i}}\cdot\frac{1}{2\pi\, 220Hz\, 200fF}}{6mV/g} = 180\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}$$

$$\sqrt{S_{A,4}} = \frac{\sqrt{\frac{4k_BT}{R_F}}\cdot\frac{1}{2\pi 220\cdot 200f}}{6\ mV/g} = 173\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}$$

anche il gen di corrente del rumore della resistenza ha lo stesso trasferimento dell'errore di corrente perché in pratica sono in parallelo.

$$\sqrt{S_A} = \sqrt{\left(16\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}\right)^2+\left(85\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}\right)^2+\left(180\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}\right)^2+\left(173\frac{\mu g}{\sqrt{Hz}}\right)^2} = 260\mu g/\sqrt{Hz}$$

Potremmo migliorare il rumore perché questo rumore non è dominante, quindi potremmo ridurre il valore di Q così questo rumore termico si alza ma il rumore totale diminuisca.

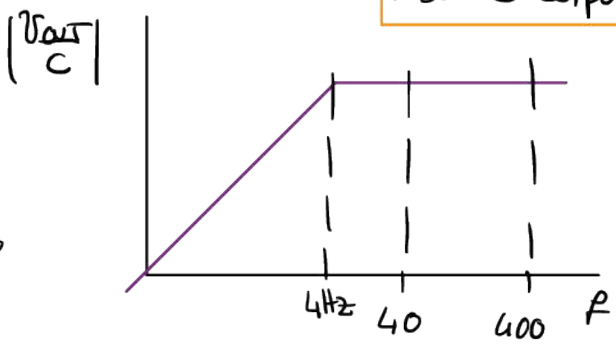
PUNTO 4)

è questo circuito adatto a misurare l'inclinazione assoluta della macchina? Questo è un segnale lentamente variabile, praticamente DC. Ma dobbiamo ricordare che noi abbiamo messo un polo a 4Hz

in pratica questa è la FDT del feedback e noi vogliamo lavorare in zona integrale

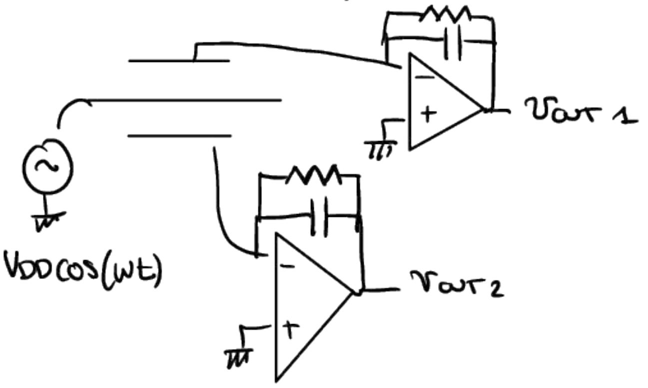
$i = V_{DD}\frac{dC}{dt}$

Questo è il vero trasferimento da variazione di capacità e tensione di output

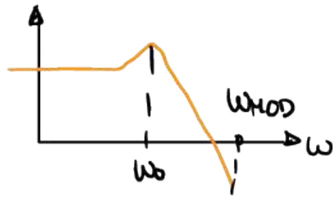


Notiamo che andando a $f\to 0$ il guadagno cala a $-\infty$

Per Per si di leggere la componente DC dovremo modulare il segnale nella zona integrale perciò al posto di fare un bias a VDD e -VDD i rotori metto un segnale AC al rotore e sugli statori attacco 2 opamp (charge amplifier)



Per evitare che la tensione alternata faccia un displacement del rotore metto una frequenza molto maggiore rispetto a quella di risonanza,



$\omega_{MOD} >> \omega_0$

trasformato della struttura meccanica

Scriviamo l'eq della corrente che scorre nel ramo di feedback

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial(CV)}{\partial t} = C(t)\frac{\partial V(t)}{\partial t} + \underline{V(t)\frac{\partial C(t)}{\partial t}}$$

Nei casi precedenti avevamo V fisso e quindi lo trascuravamo, adesso visto che ho V in AC lo consideriamo. Voglio che l'altro sia trascurabile

Devo vedere quando è trascurabile.

Supponiamo che $C(t) = C_0 + \Delta C\cos(\omega_a \cdot t)$

$V(t) = V_{DD}\cdot\cos(\omega_{MOD}\cdot t)$

supponiamo il caso peggiore $\omega_a = 400Hz\cdot 2\pi$. è il caso peggiore perché la derivata del coseno ho ω davanti e noi vogliamo $C(t)$ trascurabile quindi prendiamo il caso peggiore.

$$= -C_0 V_{DD}\omega_{MOD}\cdot\sin(\omega_{MOD}t) - \underline{[\Delta C\cdot\cos(\omega_a t)]\cdot V_{DD}\cdot\omega_{MOD}\cdot\sin(\omega_{MOD}t)} - \underline{[\Delta C\sin(\omega_a t)]\,\omega_a\, V_{DD}\cdot\cos(\omega_{MOD}\cdot t)}$$

Compariamo i 2 valori, allora notiamo che il secondo termine è trascurabile perché $\omega_a << \omega_{MOD}$, e quindi posso scrivere che

$$= \underbrace{[C_0 + \Delta C\cos(\omega_a t)]}_{C(t)}\, V_{DD}\,\omega_{MOD}\cdot\sin(\omega_{MOD}\cdot t)$$

Vediamo questo segnale nel dominio del tempo

Dato che abbiamo modulato i segnali a frequenze molto alte siamo sicuri che andiamo nella zona integrativa della curva

Con questa tecnica possiamo anche togliere offset in DC e rumore 1/f.

RISUONATORI MEMS

Ad esempio i giroscopi si basano sulla stabile oscillazione di una massa in risonanza.
Risuonatori: l'elemento che vibra
Oscillatore: tutto il sistema che sostiene il circuito

Possono essere usati per generare il clock (a frequenze di tipo 32KHz), oppure per fare la sincronizzazione per circuiti ad alta frequenza (es GHz).
Con i risuonatori posso anche fare dei sensori per grandezze fisiche e chimiche.

The basic idea to implement an oscillator based on a MEMS resonator is shown below:
- one **stator** (fixed electrode) to **actuate**;
- a **suspended resonant element**;
- one **stator** (fixed electrode) to **sense** the motion;

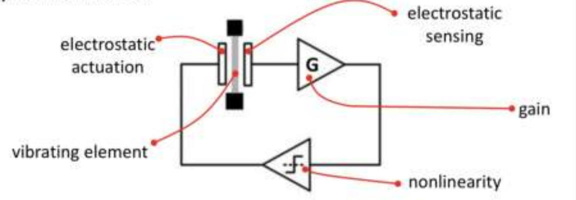
Not an inertial sensor! Mass should be minimized

Abbiamo bisogno di un elettronica di controllo che mi sostenga l'oscillazione.

- The <u>**characteristic parameters**</u> of the resonator are given by the already analyzed formulas:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$Q = \omega_0 \frac{m}{b} = \frac{k}{\omega_0 b}$$



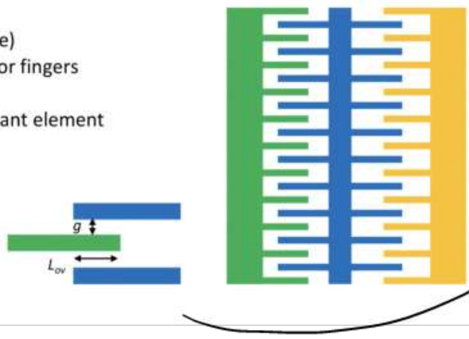
- The loop <u>oscillates (at **resonance**)</u> provided that it satisfies the **Barkhausen criteria** on gain and phase.

$$|G_{loop}(j\omega_0)| = 1$$
$$\measuredangle\left(G_{loop}(j\omega_0)\right) = 0°$$

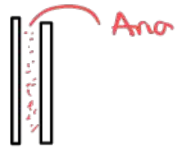
COMB-FINGER RESONATOR

Ha diversi vantaggi
- linearità a grandi displacement
- assenza dello "squeezed-film" (compressione e allargamento del piccolo film d'aria che c'è tra i 2 piani paralleli) questo permette di ricevere Q molto grandi

Definition of **parameters**
- N_{CF} = n. of rotor fingers (per side)
- g = gap between rotor and stator fingers
- L_{ov} = fingers overlap at rest
- m = effective mass of the resonant element
- k = effective stiffness
- b = damping coefficient
- h = process height
- $A = h \cdot L_{ov}$
- V_p = rotor voltage
- V_A = actuation voltage
- V_s = sensing voltage



Vediamo che con questo tipo di configurazione non abbiamo lo squeezed film che avremo con 2 piatti paralleli



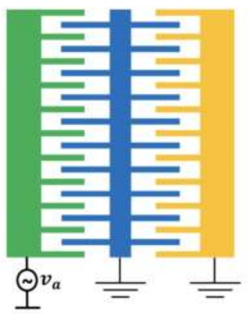
Eccitazione del risuonatore attraverso forze elettrostatiche.

Let us first calculate the **obtainable actuation force** applying only a **voltage signal at the device resonance frequency**:
- $V_p = 0\,V$
- $V_A = v_a \sin(2\pi f_0 t) = v_a \sin(\omega_0 t)$
- $V_s = 0\,V$

DERIVATA DI QUESTO

$$C_A = \frac{2\,\varepsilon_0\, h\,(x + L_{ov})N_{CF}}{g} \qquad dC_A = \frac{2\,\varepsilon_0 h N_{CF}}{g}dx$$

$$|F_{elec}| = \left|\frac{V_A^2}{2}\frac{dC_A}{dx}\right| = \frac{v_a^2\,\varepsilon_0 h\, N_{CF}}{g}\sin^2(\omega_0 t) = \frac{v_a^2\,\varepsilon_0 h\, N_{CF}}{g}\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}$$

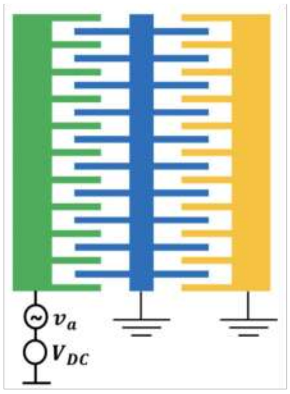


Due to the quadratic dependence between voltage and force, **we obtain an actuation at twice the resonant frequency**, which <u>will not</u> excite the MEMS at resonance... We need an **alternative approach**!

Vediamo che abbiamo un problema ma eccitiamo il circuito a ω0 e otteniamo una forza elettrostatica al doppio della frequenza di risonanza.

Per risolvere questo problema mettiamo oltre che la tensione alternata anche una componente continua.

Calcoliamo ora la forza elettrostatica in questo caso



$$F_{elec} = \frac{[V_{DC} + V_a \sin(\omega_0 t)]^2}{2} \cdot \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 h N_{CF}}{g} \cdot \left[V_{DC}^2 + V_a^2 \sin^2(\omega_0 t) + \underline{2 V_{DC} V_a \sin(\omega_0 t)} \right]$$

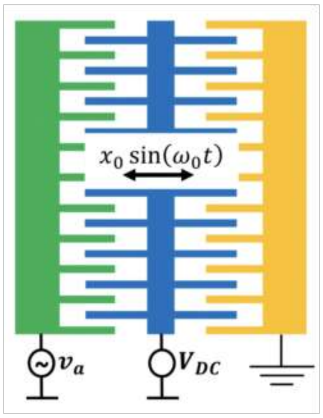
Se facciamo dominare questa quantità sulle altre 2 abbiamo che l'uscita è alla frequenza di risonanza.

Quindi $2V_{DC} \cdot V_a \gg \frac{V_a^2}{2} \rightarrow V_a \ll V_{DC} 4$

Sotto questa condizione possiamo approssimare il tutto come

$$F_{elec} \simeq \frac{\varepsilon_0 \ell N_{CF}}{g} \cdot \left[V_{DC}^2 + 2V_{DC} \cdot V_a \cdot \sin(\omega_0 t) \right]$$

Abbiamo una componente DC a V_{DC}^2 della forza, quindi abbiamo sempre una non simmetria, il rotore blu punta sempre verso quello verde, non è il massimo. Allora cambiamo, al posto di applicare la tensione DC allo statore l'applichiamo al rotore.

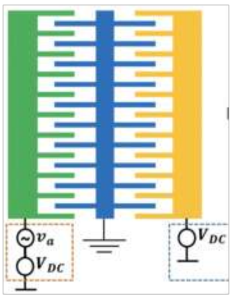


$$|F_{elec}| =$$
$$= \left| \frac{\varepsilon_0 h N_{CF}}{g} [(v_a \sin(\omega_0 t))^2 - 2V_{DC} v_a \sin(\omega_0 t) + V_{DC}^2 - V_{DC}^2] \right| =$$
$$\sim \frac{\varepsilon_0 h N_{CF}}{g} 2V_{DC} v_a \sin(\omega_0 t)$$

forza generata tra il rotore e lo statore giallo, è la nuova componente.

In questo modo eliminiamo le componenti continue.

Le 2 componenti sono uguali se i 2 rotori sono identici.



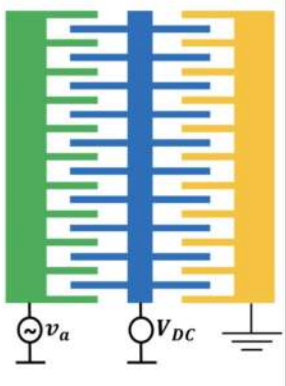
Funziona anche così ma non è il top perché di solito VDC è molto alto e se l'applichiamo solo al rotore ho poco consumo di potenza. Al contrario gli statori hanno anche circuiti di controllo che fanno consumare più potenza.

We can rearrange the terms in the found expression in the following way:

$$|F_{elec}| = \frac{2V_{DC}\, \varepsilon_0 h\, N_{CF}}{g} v_a = V_{DC} \frac{dC_A}{dx} v_a$$

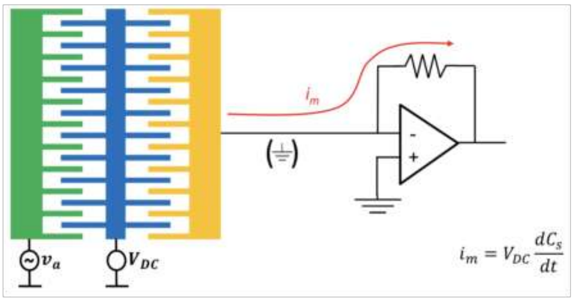
So that we can **define the so-called electromechanical transduction factor** η_A, which <u>**relates directly the applied small voltage signal and the electrostatic force**</u>.

- η_A is a **function** of the resonator **geometry** and **polarization**;
- the **higher** η_A, the **better** the "**actuation**" **capability** of my driving stator.



$$|F_{elec}| = \eta_A v_a \qquad \boxed{\frac{F_{elec}(s)}{V_a(s)} = \eta_A}$$

Come facciamo a leggere questa configurazione?



To readout the rotor displacement, so to **provide a feedback signal that can** generate v_a and **close the loop**, we need to **sense the current induced by the capacitance variation**, while keeping the ground potential at the sense node.

- this can be done e.g. **by means of a virtual ground of a transimpedance amplifier**, as depicted above (a charge amplifier could be used as well).

Vogliamo adesso risolvere l'equazione della corrente in funzione del displacement e della velocità.

We **re-arrange the expression of the current** by making use of the **relationship between displacement and velocity** for a sinusoidal motion:

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}(x_0 \sin(\omega_0 t)) = \omega_0\, x_0 \cos(\omega_0 t)$$

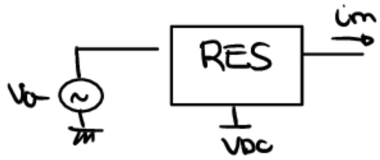
$$i_m = V_{DC}\frac{dC_s}{dt} = V_{DC}\frac{dC_s}{dx}\frac{dx}{dt} = V_{DC}\frac{dC_s}{dx}\dot{x}$$

We can define an **electromechanical transduction** factor also **for the sense port**, which has an **identical expression** as the one for the drive port. Here it **relates the velocity of the mass with the motional current** through the sense port:

- the **higher** η_S, the **better** the **"detection" capability** of my readout stator

$$i_m = V_{DC}\frac{dC_s}{dx}\dot{x} = \eta_S\,\dot{x} \qquad \boxed{\frac{i_m(s)}{sX(s)} = \eta_S}$$

Noi abbiamo una struttura del tipo:



Noi imponiamo una tensione AC e leggiamo una corrente perciò possiamo calcolare l'ammettenza equivalente.

Allora:

$$\frac{i_m}{V_a}(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{F_{elec}}{V_a}(s)\cdot\frac{X}{F_{elec}}(s)\cdot\frac{i_m}{X}(s)$$

$$= \eta_A \cdot \frac{1}{m}\,\frac{1}{s^2 + \frac{s\omega_0}{Q} + \omega_0^2}\cdot \eta_S \cdot s \qquad \eta_A = \eta_S$$

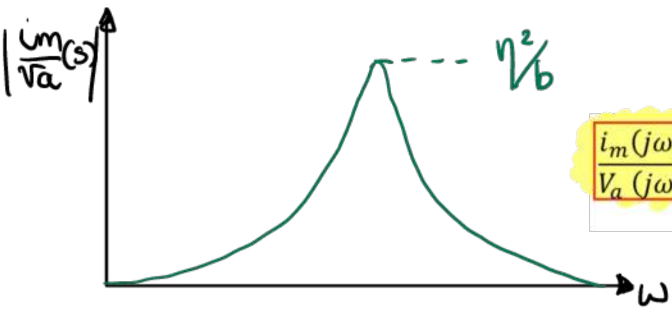
$$= \frac{1}{m}\cdot\frac{\eta^2 \cdot s}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$\omega \ll \omega_0 = s\,\eta^2/k$

$\omega = \omega_0 = \eta^2/b$

$\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{s}\frac{\eta^2}{m}$

perciò



Quando noi imponiamo VDC abbiamo che variamo η^2.

$$\boxed{\frac{i_m(j\omega_0)}{V_a(j\omega_0)} = \frac{\eta^2}{b}} \longrightarrow$$

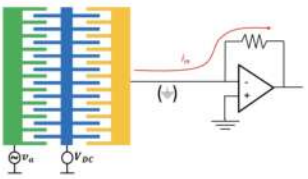
The admittance (inverse of impedance) at resonance is real and depends only on the damping coefficient (no dependence on m or k)! The motional current is thus in phase with the applied voltage.

Troviamo ora l'equivalente elettronico per calcolare questo sistema:

The analysis done so far suggests the resonator to be modeled by an electrical equivalent circuit. We have indeed noticed that the behavior **before**, **at** and **after resonance** can be described **in terms of** the following expressions, each of which reminds us of a **passive equivalent electrical component**:

	admittance	impedance	electrical equivalent
$\frac{i_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\eta^2}{k}s$ →	$\frac{1}{Z} = \frac{\eta^2}{k}s = sC_{eq}$	$Z = \frac{1}{sC_{eq}}$ →	$\boxed{C_{eq} = \frac{\eta^2}{k}}$
$\frac{i_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\eta^2}{b}$ →	$\frac{1}{Z} = \frac{\eta^2}{b} = \frac{1}{R_{eq}}$	$Z = R_{eq}$ →	$\boxed{R_{eq} = \frac{b}{\eta^2}}$
$\frac{i_m(s)}{V_a(s)} = \frac{\eta^2}{m}\frac{1}{s}$ →	$\frac{1}{Z} = \frac{\eta^2}{m}\frac{1}{s} = \frac{1}{sL_{eq}}$	$Z = sL_{eq}$ →	$\boxed{L_{eq} = \frac{m}{\eta^2}}$

Attraverso le quali possiamo calcolare che:



$$\frac{i_m(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{\left(\frac{m}{\eta^2}s + \frac{b}{\eta^2} + \frac{k}{s\eta^2}\right)} = $$

$$= \frac{1}{\left(L_{eq}s + R_{eq} + \frac{1}{sC_{eq}}\right)}$$

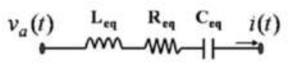
$$C_{eq} = \frac{\eta^2}{k}$$

$$R_{eq} = \frac{b}{\eta^2}$$

$$L_{eq} = \frac{m}{\eta^2}$$

*The **3-port resonator can be fully modeled by an electrical equivalent 2-port model (series RLC).***

*All the **parameters are a function of V_{DC}** which represents the **third (hidden) port**.*



06-10-2021 ESERCITAZIONE

You are asked to design a consumer-grade accelerometer for out-of-plane accelerations. In order to use the same electronic circuit discussed for the in-plane devices, the OP accelerometer needs to target the same performance: $dC_{diff}/da_{ext} = 4.1\,\text{fF}/\text{ğ}$, $f_0 = 4456\,\text{Hz}$ (in operation), $FSR = 16\,\text{ğ}$, $V_{DD} = 3\,\text{V}$. Other parameters are reported in Table 1. Also refer to Figure 1 for a better understanding of the geometry.

	Symbol	Value
Shear modulus	G	65 GPa
process tickness	h	24 µm
holes transduction coefficient	α	0.87
start point of PP (from the rotational axis)	x_0	10 µm
end point of PP (from the rotational axis)	x_f	150 µm
mass 1 width	r_1	150 µm
mass 2 width	r_2	300 µm
gap of PP	g	1.3 µm
maximum device length	L	950 µm

Table 1: Problem parameters.

1. Find the maximum tilt angle for the accelerometer in operation and the linearity error.
2. Given the target mechanical sensitivity and using the hole pattern of the CAD exercise, calculate the required length of the parallel plates.
3. Evaluate the parallel-plate contribution in terms of electrostatic stiffness, and choose the springs geometry (hint: start from the silicon density, $\rho = 2320\ kg/m^3$, to find an effective mass density).
4. Which are the parameters affected by a thickness variation of the process for both the accelerometers (IP and OP)?

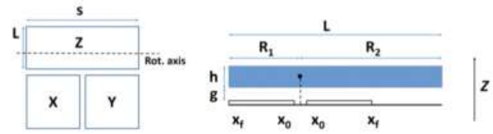
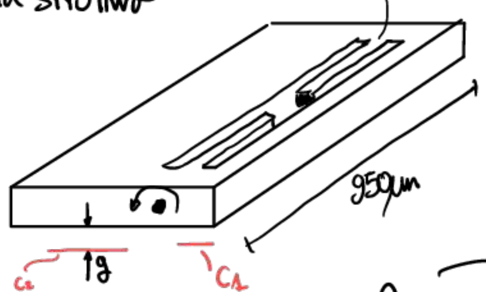


Figure 1: sketch of (i) the top view layout of a 3-axis accelerometer and of (ii) the lateral cross-section of the z-axis device.

Disegnamo un out of plane accelerometer

Molle che fanno ruotare la struttura



dobbiamo usare le formule torsionali

$$\underbrace{I\ddot{\vartheta} + b\dot{\vartheta}}_{\text{Approssimazioni quasi stazionarie quindi sono } \emptyset} + K_{tor}\vartheta = \Gamma_{ext}$$

$[kg \cdot m^2]$ $[N \cdot m]$

1)

$$\vartheta_{FSR} = \frac{M_{FSR}}{K_\vartheta}$$ ← Non abbiamo info su K_ϑ, cioè non sappiamo quanto sia la componente elettrostatica, allora scriviamo

$$= \frac{I}{K_\vartheta}\,\frac{M_{FSR}}{I} = \frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{M_{FSR}}{I}$$

il testo ci da ω_0 in funzionamento quindi dobbiamo calcolare il momento d'inerzia

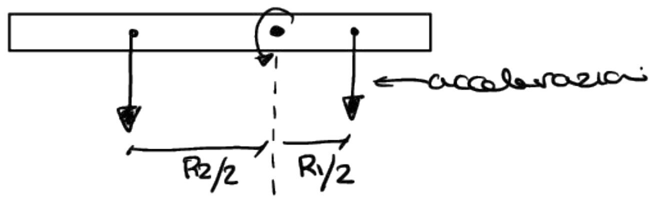
$$I = \int r^2 dm = \int_0^{R_1} r^2 \rho h L\, dr + \int_0^{R_2} r^2 \rho h L\, dr$$

$$= \frac{R_1^3}{3}\rho h L + \frac{R_2^3}{3}\rho h L = \frac{R_1^2}{3} m_1 + \frac{R_2^2}{3} m_2$$

$$= 3 m_1 R_1^2$$

$R_2 = 2R_1$
$m_2 = 2m_1$

$$\vartheta_{FSR} = \frac{1}{\omega_0^2}\,\frac{M_{FSR}}{3 m_1 R_1^2}$$



Devo adesso calcolare la M_{FSR}

$$M_{FSR} = m_2\, a_{FSR}\cdot\frac{R_2}{2} - m_1 a_{FSR}\frac{R_1}{2}$$

$m_2 = 2m_1$
$R_2 = 2R_1$

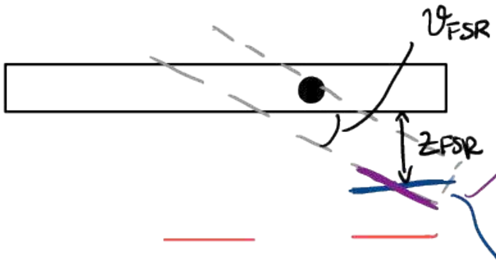
$$= \frac{3}{2} m_1 R_1 a_{FSR}$$

PERCIÒ L'ANGOLO DI FULL SCALE È

$$\vartheta_{FSR} = \frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{\frac{3}{2} m_1 R_1 a_{FSR}}{3 m_1 R_1^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\cdot\frac{1}{2R_1}\cdot a_{FSR} = \frac{1}{(2\pi\, 4456)^2}\cdot\frac{1}{2\cdot 150\mu m}\cdot 16\cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}$$

$$\simeq 0{,}04° \simeq 6{,}67\cdot 10^{-4}\ rad$$

errore di linearità:
Noi sappiamo che l'errore di linearità di un in plate classico è quello che sappiamo delle classi ma qui la faccenda è un attimo diversa.



notiamo che la distanza non è uguale su tutto l'elettrodo, tuttavia noi sappiamo che il displacement è per piccoli angoli e quindi noi consideriamo easy peasy una media.

Visto che l'angolo è piccolo possiamo scrivere che

$$z_{FSR} = \vartheta_{FSR} \cdot \frac{(x_f + x_0)}{2} = 6{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 80\mu m = 53nm$$

displacement di full range

punto medio dell'elettrodo

Perciò l'errore di linearità è $\quad \varepsilon_{lin\%} = \left(\frac{z_{FSR}}{g}\right)^2 \cdot 100 = 0{,}17\%$

PUNTO 2) chiede essenzialmente la mechanical sensitivity

$$\frac{\Delta C_{FSR}}{a_{FSR}} = 4{,}1 \frac{fF}{g}$$

Possiamo scrivere che

$$2 \cdot \frac{C_0}{g} \cdot z_{FSR} \cdot \alpha = 4{,}1 \frac{fF}{g} \cdot 16g$$

Fattore di correzione tra struttura con o senza buchi, infatti se la struttura ha buchi la capacità sarà minore.

allora

$$2 \cdot \alpha \cdot \varepsilon_0 \frac{(x_f - x_0)}{g^2} L_{pp} = 4{,}1 fF \cdot 16$$

Perciò la lunghezza del piatto parallelo è $\quad L_{pp} = \frac{4{,}1 fF \cdot 16 \cdot (1{,}3\mu m)^2}{2 \cdot 0{,}87 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 140\mu} = 210\mu m$

α: è stato calcolato nella lezione CAD 1

Perciò la mechanical sensitivity è

$$S_{mech} = \frac{\partial C}{\partial a_{ext}} = \frac{\Delta C}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta \vartheta} \cdot \frac{\Delta \vartheta}{\Delta a}$$

ricordiamo $z = \vartheta \cdot x_m$

$$= \frac{2\alpha C_0}{g} \cdot x_m \cdot \frac{1}{2R_1}$$

$$= \underbrace{\frac{2C_0}{g} \frac{1}{\omega_0^2}} \cdot \alpha \cdot \frac{x_m}{2R_1}$$

← position of the electrodes

← torsional architecture

Valore che avremo in un in plane accelerometers

non ideal parallel plate.

PUNTO 3)

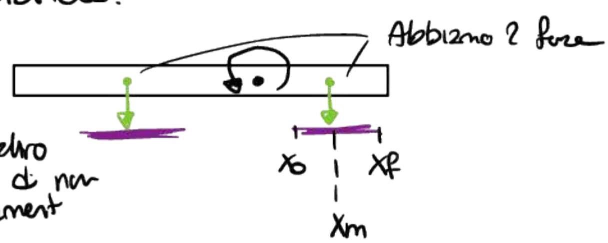
Anche qui abbiamo un equivalent electrostatic stiffness che va a ridursi, perché anche in questo caso abbiamo delle forze elettrostatiche.

$$M_{elec} = F_{elec} \cdot x_m \cdot 2 = F_{elec_1} x_m - F_{elec_2} x_m$$

Diretta quell'altro sotto l'ipotesi di non displacement

$$= \frac{2C_0}{g^2} V_{DD}^2 \cdot z \cdot x_m \cdot \alpha$$

$z \to \vartheta \cdot x_m$



$$= 2\alpha \frac{C_0}{g} \cdot V_{DD}^2 \cdot X_m^2 \cdot \vartheta$$

perciò

$$I\ddot{\vartheta} + b_\vartheta \dot{\vartheta} + K_\vartheta \vartheta = M_{acc} + M_{elec}$$

$$I\ddot{\vartheta} + b_\vartheta \dot{\vartheta} + (K_\vartheta + K_{\vartheta,elec})\vartheta = M_{acc}$$

Noi sappiamo che $K_{\vartheta,elec} = -\frac{2C_0}{g} V_{DD}^2 \cdot \alpha \cdot X_m^2$

$$= -2 \cdot \frac{\varepsilon_0\, 950\mu m \cdot 150\mu m}{(1{,}3\mu m)^3} \cdot 0{,}87 \cdot (80\mu m)^2 = -5{,}3 \cdot 10^{-8}\ N\cdot m$$

dobbiamo però trovare la mechanical stiffness.

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{K_{\vartheta_{TOT}}}{I}}$$

$$K_{\vartheta_{TOT}} = (2\pi f_0)^2 \cdot 3 R_1^2 \cdot m_1$$

Dobbiamo considerare che abbiamo una struttura a nido perciò possiamo scrivere

$$m_1 = \rho \cdot 950\mu m \cdot 150\mu m \cdot 24\mu m \cdot \underbrace{\frac{10\mu m^2 - 3\mu m^2}{(10\mu m)^2}}_{\text{è una sorta di coefficiente di correzione per la densità, consideriamo un rettangolo e prendiamo la parte piena e la dividiamo per il volume totale}}$$

Allora $m_1 = 7{,}2\, nKg$

Allora

$$K_{\vartheta_{TOT}} = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ Nm$$

Allora

$$K_\vartheta = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\ N\cdot m + 0{,}53 \cdot 10^{-7}\ N\cdot m = 4{,}33 \cdot 10^{-7}\ N\cdot m$$

IP flessurale

$$K = E \cdot \frac{hW^3}{L^3}$$

(single beam)

OP torsionale

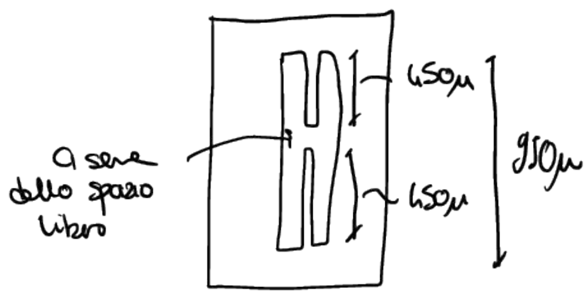
$$K = G \cdot \frac{hW^3}{3L}$$

(single beam)

Noi stiamo lavorando con roba torsionale perciò

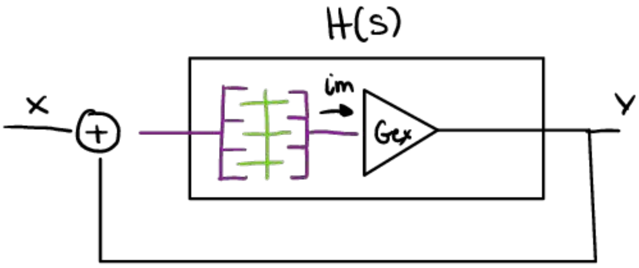
$$K_\vartheta = 2G \frac{hW^3}{3L} \Rightarrow W = 5{,}7\mu m$$

$L = 450\mu m$



Abbiamo scelto la topologia comfinger perchè permette larger displacement senza dare problemi di linearità.
Il sistema funziona trasformando una tensione V_a in una corrente i_m, poi con la nostra elettronica dobbiamo ritrasformare la corrente nella stessa tensione alla stessa fase/frequenza (questo deve avvenire alla freq di risonanza, inoltre più alto è Q più è facile compensare le perdite).

Criterio di Barkausen



Sappiamo che

$$Y = H(s)(X+Y)$$

se noi lo vogliamo self sustained $X=0$, allora

$$Y = H(s)Y$$

che avviene solo quando $|H(s)| = 1$ $\angle H(s) = 0°$

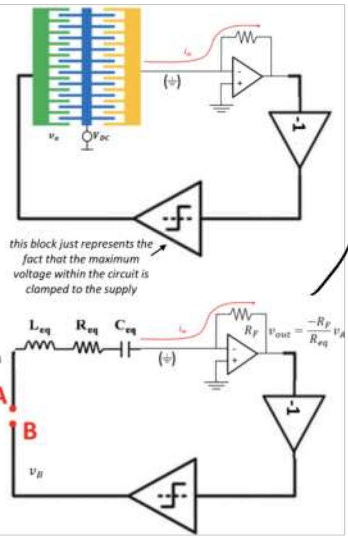
Ma questo è vero solo quando siamo a regime, dobbiamo avere anche condizioni di start-up. Infatti all'inizio non posso avere $G_{loop}=1$ perchè devo far nascere l'oscillazione, allora devo avere che all'inizio la fase è ∅ e $G_{loop}>1$.
Ma come creo un circuito così? Devo introdurre una non linearità.

Required gain of electronics:

Required gain of the electronics:
- we have seen how a resonator can be modeled as an equivalent RLC circuit;
- the dissipative term is represented by the **equivalent resistance R_{eq}**;
- looking at the figure that includes the electrical model, and considering that at resonance the model simplifies into the resistive term, we see that the gain between nodes A and B **at resonance** using a transimpedance stage is:

$$G_{loop}(j\omega_0) = \frac{v_B}{v_A} = \frac{R_F}{R_{eq}}$$

$|G_{loop}(j\omega_0)| > 1$ at the startup is **satisfied only if the overall circuit gain is initially larger than R_{eq}.**



Calcoliamo il G_{loop} (consideriamo che L e C sono in corto), allora ho un invertente con guadagno $-R_F/R_{eq}$. (Tralasciamo momentaneamente la non linearità), allora

$$G_{loop} = +R_F/R_{eq}$$

Allora allo start-up $R_F/R_{eq} > 1$

Ma noi non sappiamo esattamente quanto sia R_{eq} quindi in realtà è molto difficile fare $G_{loop}=1$ esattamente.
Inoltre noi vogliamo che in stabilità $G_{loop}=1$ solo per la frequenza di risonanza.

Non linearità nel loop: La risposta è lineare fino ad una certa ampiezza e poi ho una saturazione del gain che mi fa andare il $G_{loop}=1$

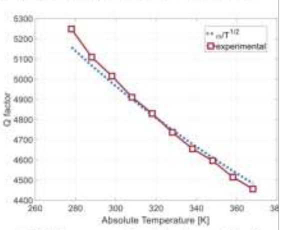
Variazione di Q al variare della temperatura

Quando facciamo il design di un oscillatore dobbiamo considerare il peggior Quality factor che si ha alla massima temperatura.

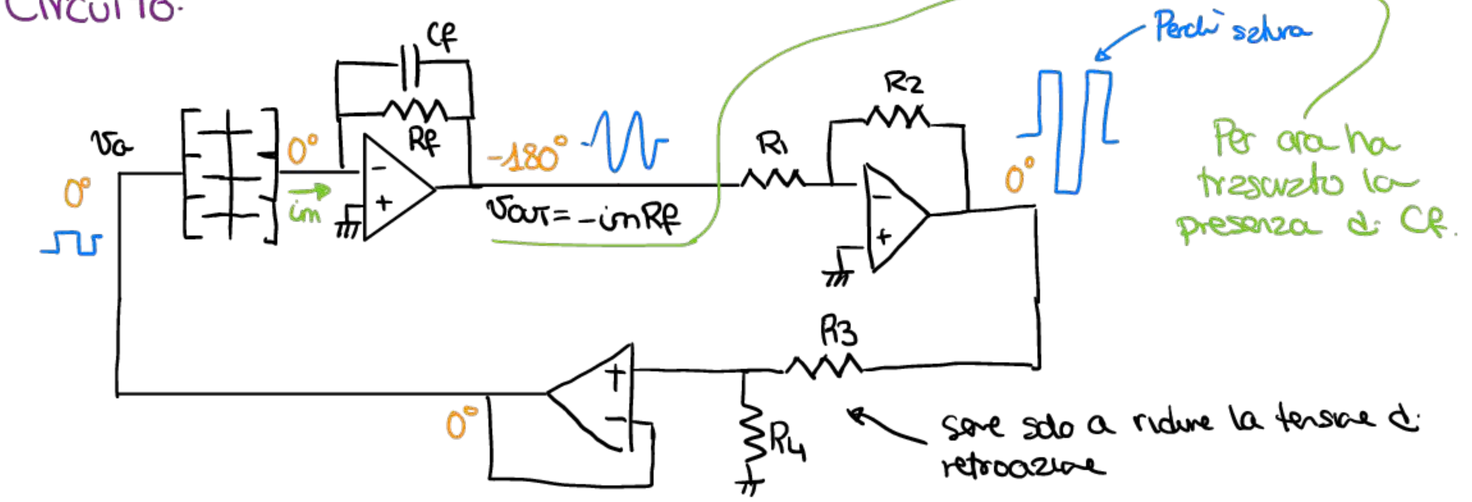
In the most common situation, **Q decreases with the square root inverse of the absolute temperature**:

$$Q \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \qquad b = \frac{\omega_0 m}{Q} \qquad R_{eq} = \frac{b}{\eta^2}$$

The **relevant consequence** is that, if a resonator needs to operate over a given T range, its **equivalent resistance** (which changes with b) **must be compensated for every T value**. The **worst condition is the highest T** (lowest Q, highest R_{eq}).



Circuito:

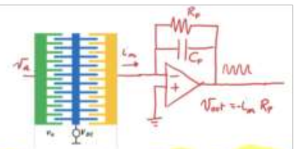


Buffer per comandare con una low impedence l'input.

Design delle singole componenti.

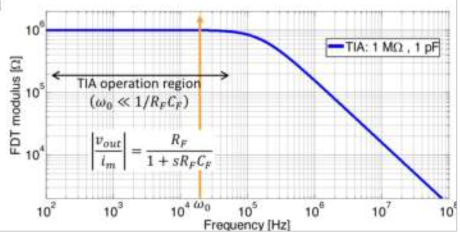
Feedback network with pole after ω_0:

- R_F represents the **gain of this stage**. In principle **a large value is convenient** to **minimize Johnson noise** and the impact of noise of the **following** stages;
- C_F (real or parasitic) **introduces a pole**, whose relevance will be clarified partly later and partly in the next class, when discussing feedthrough effects.



$$\frac{v_{out}}{i_m}(s) = \frac{-R_F}{1 + sR_FC_F} \qquad \frac{v_{out}}{v_a}(\omega_0) \approx -\frac{R_F}{R_{eq}}$$

Typical "**repeatable**" and "**compact**" R_F values are < **5-10 MΩ**: this in general **does not give G_{loop} > 1 (R_{eq} can be > 10 MΩ)** and often implies the **need for a further gain stage**.



Quando andiamo ad alta frequenza noi su Cf e Rf danno un polo e il guadagno cala. Dobbiamo assicurarci che questo polo accada a frequenze spostate rispetto a quella di risonanza.
Allora sotto questa ipotesi possiamo dire che $v_{out}/v_a = -R_F/R_{eq}$

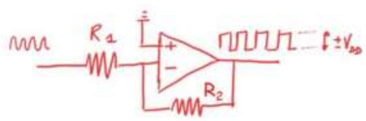
Tipicamente le resistenze ottenibili negli integrati non hanno valori tali da poter avere un abbastanza grande loop gain per fare lo start-up ed è per questo che abbiamo utilizzato anche il secondo stage di amplificazione.

Grazie a questa ulteriore struttura possiamo aumentare il guadagno.
Quando la tensione in ingresso arriva a valori tali che l'OP-AMP saturi, allora non la non linearità e l'uscita sarà clampata.

As R_F only may not be enough to compensate the resonator losses, the overall (startup) loop gain is now set by:

$$\frac{v_{out,2}}{i_m}(s) = \frac{R_F}{1 + sR_FC_F}\frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{v_{out,2}}{v_a}(\omega_0) \approx \frac{R_F}{R_{eq}}\frac{R_2}{R_1} > 1$$



Assuming that this condition is met, when we switch on the circuit, at time *t=0* we have noise only, i.e. **harmonic components at every frequency**. The harmonic corresponding to ω_0 is the only one which is **amplified by a positive loop gain larger than one**.

The **oscillation at ω_0 begins to increase**. At a certain point, **the high gain stage saturates its output** (square wave at ± V_{DD}, typically larger than ±1.5 V). The **loop gain thus decreases, stabilizing to 1**.

Note: the first harmonic of a square wave at ω_0 has an amplitude increased by $4/\pi$.

Ma quindi cosa serve il terzo stage?
Deriva da qualcosa detto nella classe precedente. Infatti in quella avevamo detto che le forze elettrostatiche si applicano solo se la tensione d'ingresso v_a è $\ll V_{DC}$ che biasa il rotore.

In the past class we have seen how the MEMS resonator can be **linearized** only when having: $\frac{v_a}{4} \ll V_{DC}$

With e.g. a rotor voltage V_{DC} = 5 V, and a circuit bias V_{DD} = ± 1.5 V, we are **at the limits of the above condition** (roughly one order of magnitude...):

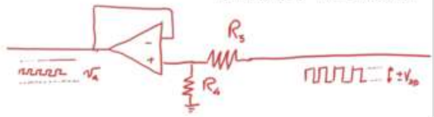
$$\frac{1.5}{4}\frac{4}{\pi} \cancel{\ll} 5$$

(4/π is the amplitude of the first harmonic of a square wave)

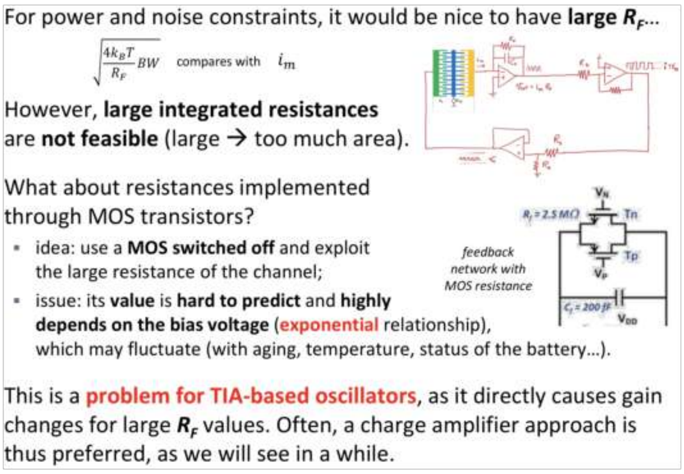
We need thus to lower a bit **the driving amplitude**, e.g. by simply using a **resistive divider**. Note that the loop design needs to take into account this lowering:

$$G_{loop}(\omega_0) = \underbrace{\frac{R_F}{R_{eq}}\frac{R_2}{R_1}}_{\text{High-gain to build up the oscillation during the linear start-up}}\underbrace{\frac{R_4}{R_3 + R_4}}_{\text{De-gain to limit amplitude during nonlinear operation}} > 1$$

The buffer is used to drive the MEMS with a low output impedance.



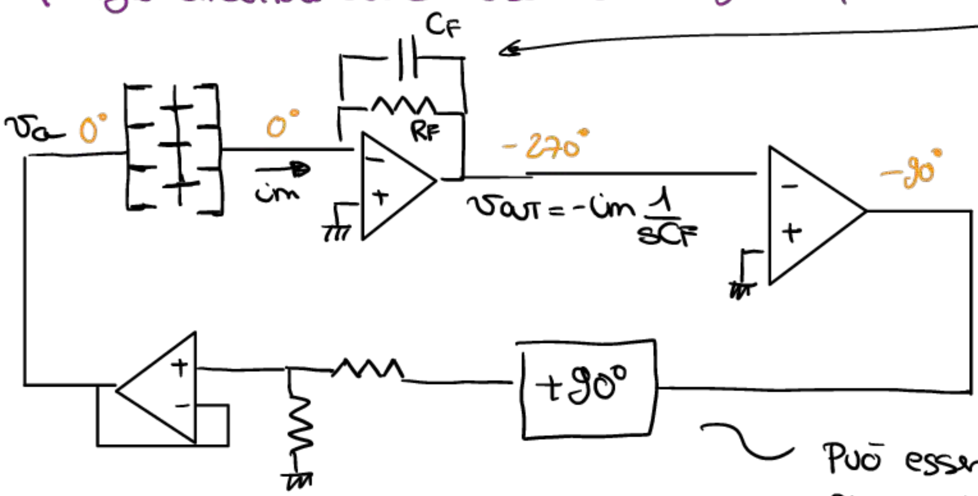
Rumore nel circuito



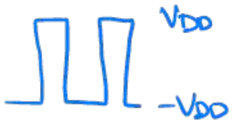
Se usiamo un TIA con un MOS in retroazione noi non sappiamo esattamente il valore di R perciò noi non sappiamo bene il valore del guadagno

Possiamo avere resistenze più grandi con i MOS ma non sappiamo bene il valore.

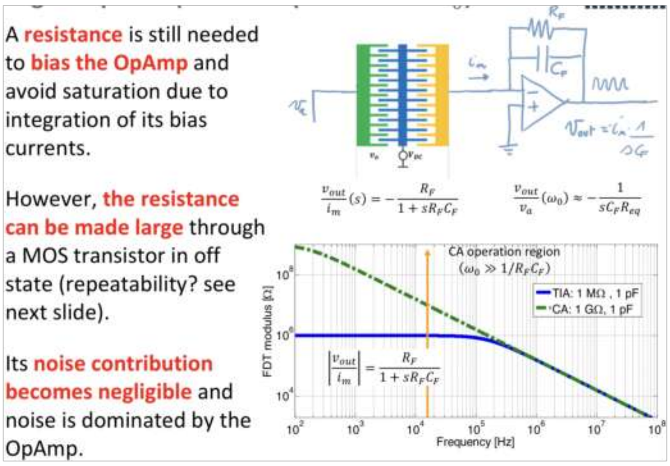
Altra topologia circuitale che si basa sul charge amplifier



(supponiamo che il polo sia a Req < rispetto a quella di risonanza



Può essere un derivatore oppure un PLL (Phase locked loop).

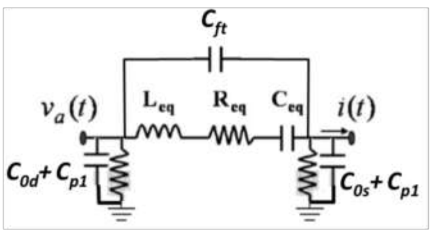


Qui posso fare la resistenza tranquillamente con i MOS perché anche se ho una variazione di R ho solo una variazione della locazione del polo. Se la nostra frequenza di risonanza è abbastanza in là allora questa variazione non ha effetti. Il vantaggio è che possiamo fare una resistenza di valore molto grande così che abbia un SNR migliore con questo amplificatore.

RESONATORS 3

Capacità di feedthrough

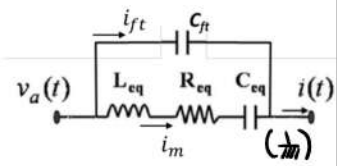
Data la creazione del risonatore abbiamo delle capacità parassite.



Aggiungiamo anche una resistenza parassita di valore molto alto (MΩ).
Noi dobbiamo ricordare che comandiamo questo circuito con un buffer a bassa impedenza d'uscita e all'out ho un TIA con una terra virtuale, perciò possiamo non considerare le componenti parallele che toccano terra dato che non dovrebbero avere effetto sul segnale.
Però rimane solo la capacità di feedthrough (che si chiama così perché dà direttamente l'input sull'output). Ha tipicamente valore di fF (0,1 o 10)

We therefore need to **modify the found analytical expression** of the electrical equivalent admittance, taking into account the **parasitic feedthrough capacitance**:

- remember that **admittances in parallel can be summed**



$$\frac{i(s)}{V_a(s)} = \frac{i_m(s) + i_{ft}(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{\left(L_{eq}s + R_{eq} + \frac{1}{sC_{eq}}\right)} + s\,C_{ft}$$

The feedthrough capacitance **adds a growing contribution with ω**, that becomes **eventually dominant for large frequencies**. It affects modulus and phase as described in the next slide.

La corrente di output è data da 2 componenti.

Studiamo adesso l'andamento di fase e tensione in funzione della frequenza e vediamo il comportamento di C_{ft}.

Subito dopo la frequenza di risonanza potremmo trovare un punto in cui i 2 segnali hanno fase opposta e ampiezza comparabile, perciò abbiamo la presenza di uno zero.

Depending on the frequency, the value of the feedthrough capacitance can be either negligible or relevant.

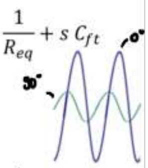
f.t. current i_{ft}
RLC current i_m

- **low frequencies**:
  - the feedthrough is usually larger than the equivalent capacitance. The **phase is the same** as for the ideal model.

$$\frac{i(s)}{V_a(s)} = sC_{eq} + s\,C_{ft}$$

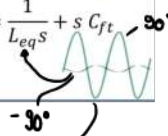
- **around the resonance frequency**:
  - as far as the **modulus** of the feedthrough contribution **is smaller than $1/R_{eq}$**, the phase goes as in the ideal model. After ω_0, when $|s\,C_{ft}|$ is again larger than $1/R_{eq}$, the **phase is again dominated by the feedthrough**.

$$\frac{i(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{R_{eq}} + s\,C_{ft}$$

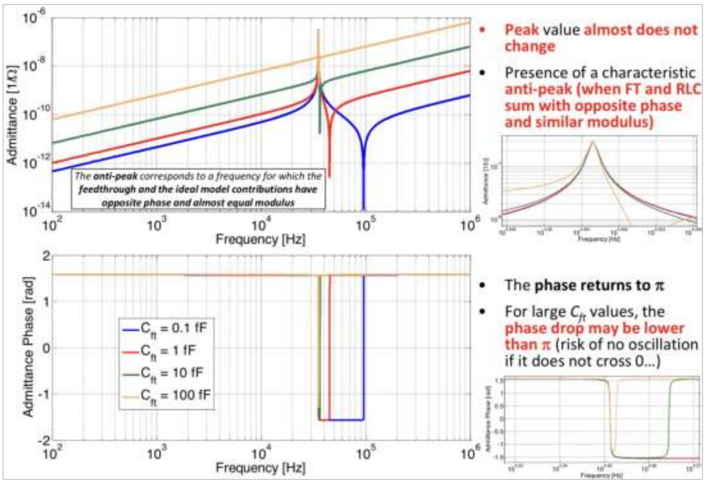


- **high frequencies**:
  - the **phase is dominated by the feedthrough** as its contribution is much larger than $1/sL_{eq}$.

$$\frac{i(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{L_{eq}s} + s\,C_{ft}$$



Cresce perché ω cresce

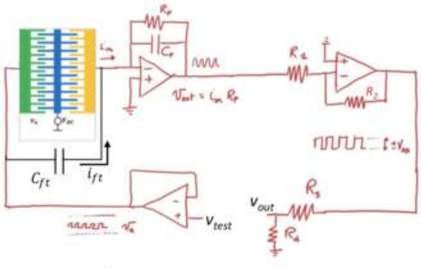


Attenzione alla zona da $-90°$ perché se cadiamo lì non abbiamo più confermato il criterio di Barkausen.

Ma la nostra elettronica continua a funzionare anche con il condensatore di feedthrough?

Iniziamo calcolando il Gloop.

To calculate the loop gain, it is **convenient** to **open** the **loop** in a point which sees a **high impedance**, so to **avoid the need to reconstruct the impedance** after opening.



$$G_{loop}(s) = \frac{v_{out}}{v_{test}} = \left(\frac{\eta^2}{m}\frac{s}{\left(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}\right)} + sC_{ft}\right)\frac{-R_F}{1 + sR_FC_F}\,\frac{-R_2}{R_1}\,\frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

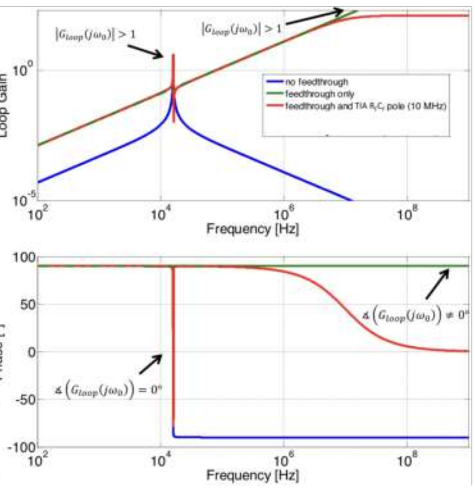
For both the analyzed topologies, **a convenient point is the positive input of the buffer**.

Supponiamo di non avere CF perciò $sR_FC_F = \emptyset$. Allora abbiamo come situazione che:

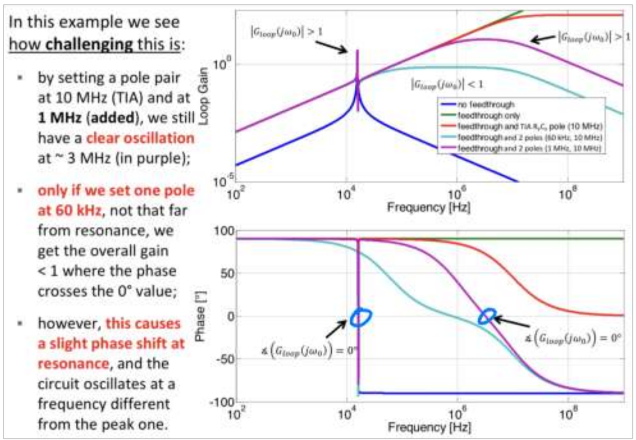
sC_{ft} **(green curve)** generates an anti-peak in the modulus and a return to π of the phase.

As a consequence **the loop gain is >1 for several frequencies** other than ω_0.

However **the phase condition is not met**: there is **no risk of spurious oscillations**.

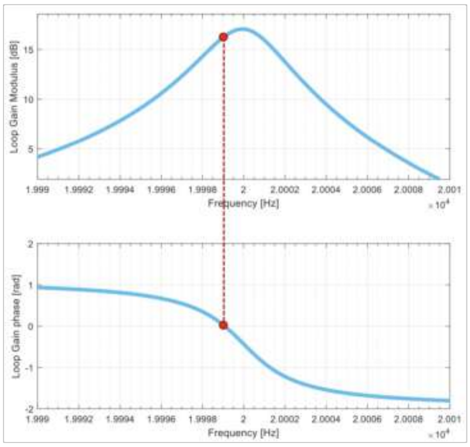


Notiamo che la curva verde non passa mai per la fase 0° quindi Barkausen sulla fase non è verificato. tuttavia noi non abbiamo considerato CF che introduce un polo e poi ci saranno anche i poli degli OPAMP da considerare
Nella curva rossa (che indica un polo dato da $R_F C_F = 10\,MHz$) allora come possiamo vedere che abbiamo sia loop gain > 1 e fase 0° dopo che il polo ha dato il suo contributo. perciò così notiamo che molte frequenze possono oscillare e che quindi il circuito non funziona come desiderato.
Un modo per ridurre questa cosa è aggiungere poli tipo metterli in R_2C_2 con C_2 in parallelo a R_2. Dobbiamo stare attenti a non mettere il polo troppo vicino alla frequenza di risonanza (almeno una decade dopo la risonanza)



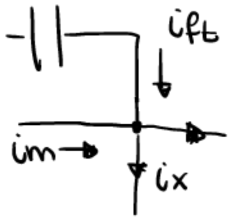
Abbiamo solo circa 2 frequenze in cui il circuito può oscillare (ma non è ancora top)
Dobbiamo fare in modo che per la seconda frequenza il modulo sia < 1 così non oscilla questo accade per un polo messo a 60KHz (che è molto vicino alla risonanza)
Questo significa che alla risonanza avremo un po' di phase shift.

L'oscillatore funziona ancora con questo piccolo phase shift?



Notiamo che sul picco di risonanza la fase non è proprio a 0°. tuttavia notiamo che Barkausen è comunque verificato ma la risonanza non è precisamente sul picco ma un po' prima.

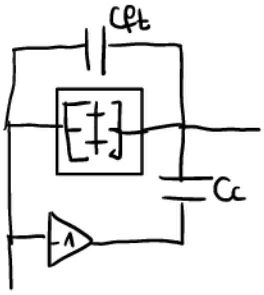
Un'altra idea per compensare il feedthrough è compensarlo all'origine.



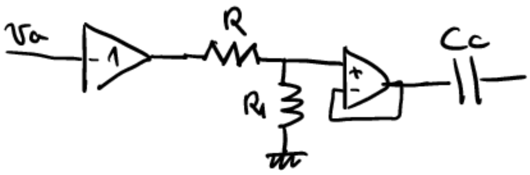
Se ix è uguale a ift allora top, infatti così solo la corrente di movimento entrerà nel circuito.

Noi sappiamo che $i_{ft} = C \frac{dV_a}{dt}$

allora possiamo fare una cosa tipo



dove Cc è uguale a Cf. il problema è che Cf è talmente piccolo che non riusciamo a fare una Cc uguale allora facciamo una roba del tipo



Qui mettiamo Cc + grande e lo comandiamo con una tensione più piccola così che abbia la stessa corrente.

PROBLEM

We are asked to design a MEMS resonator, based on the so-called Tang structure. The target resonance frequency, f_0, is 32.768 kHz. The equivalent resistance of the electrical model of the resonator, noted as R_m, should be lower than 10 MΩ. The electromechanical structure, see Fig. 1, has a moving mass with an equivalent area of 150 μm x 85 μm and a spring length of 91 μm. Additionally, the device has 8 differential parallel-plate cells used solely for electrostatic tuning. The fabrication technology has some rules and characteristic dimensions, listed in Table 1[1]. You are asked to:

[1] Due to process spreads, dimensions of real devices may differ from the design: etch spreads indicate that the structural layer can be wider or narrower than by design; thickness spreads refer to an epitaxial height thicker or thinner than the nominal target. This variability is described by a Gaussian function: the most probable case is for no process spread; numbers reported in Table 1 refer to the 3σ value of the distribution.

	Symbol	Value
Young's Modulus	E	160 GPa
Density	ρ	2320 kg/m^3
Process thickness	h	15 μm
Nominal spring width	w_{sp}	1.5 μm
Nominal process gap	g_{min}	1 μm
Etch spread	$\pm 3\sigma_x$	± 0.05 μm
Thickness spread	$\pm 3\sigma_h$	± 1 μm
N. of comb fingers per side	N_{CF}	38
Quality factor at room T	Q	670

Table 1: Technological constraints and rules.

statore

molle

Questi piatti paralleli servono alla frequency tuning non per comandare o per il sensing.

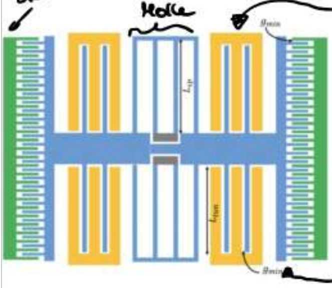


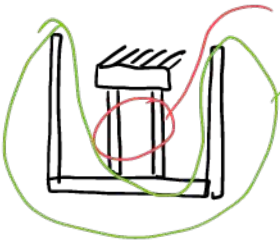
Figure 1: Structure of the MEMS resonator. Blue: moving mass; yellow: tuning electrodes; grey: anchored mass; green: drive and sense electrodes.

1. Neglecting any softening, calculate the worst-case variability of the resonance frequency of the device, given the process tolerances ($3\sigma_x$ and $3\sigma_h$).
2. Knowing (i) that the final resonance frequency of the device has anyway to match the target frequency, f_0, and (ii) that it is possible to exploit electrostatic tuning to solve over- or under-etch issues, find a clever target natural frequency, f_r, of the device and choose the proof mass value.
3. Calculate the maximum voltage that should be applied to the tuning electrodes to bring all the devices down to the target resonance frequency, f_0.
4. For the nominal parameters, find the minimum DC rotor voltage, V_{DC}, in order to comply with the requirement on R_{eq}, and extract the complete electrical equivalent model of the resonator.

1) Neglect softening (cioè non consideriamo i parallel plate)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

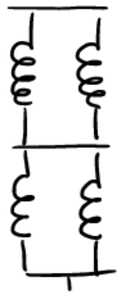
Abbiamo 4 travi per lato che hanno la stessa lunghezza e altezza



Queste 2 sono in parallelo tra loro

Queste sono in parallelo tra loro e in serie con quelle di prima

Allora ho una cosa tipo



$K_{//} = 2K$

$$K_{beam} = E h \left(\frac{w}{L}\right)^3$$

l'overall stiffness di metà device (considero solo 4 travi)

$$K_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot 2 E h \left(\frac{w}{L}\right)^3$$

Però l'overall stiffness totale è: $K_{TOT} = 2Eh(w/L)^3$

però

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Eh(w/L)^3}{\rho h A}}$$

Area del comb finger?

Adesso vediamo cosa chiede la domanda

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E(w/L_{sp})^3}{\rho A}}$$

$\frac{df}{dh} \sim \emptyset$ non c'è variazione di frequenza se vario h

$$\frac{df}{dw} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{\rho A L_{sp}^3}}\, w^{1/2}\cdot\frac{w}{w}$$

$w^{3/2}$ f_0

$$= \frac{3}{2}\frac{f_0}{w}$$

Perciò la massima variazione di frequenza in uscita è data da

$$\Delta f_{o,MAX} = \frac{3}{2} f_o \frac{\Delta W_{MAX}}{W}$$

la maximum etching deviation rispetto alla teorica è ±0,05μm, allora

$$\Delta f_{oMAX} = \frac{3}{2} f_o \cdot \frac{\Delta W_{MAX}}{W} = \pm 3277 Hz \qquad \Delta W_{MAX} = 0{,}1\,\mu m$$

Dato che la variazione c'è l'ho da tutte e 2 le parti ho che al minimo ho 1,4μm e al massimo 1,6μm.

perciò

$$f_{o,MAX} = 32768\,Hz + 3277\,Hz$$

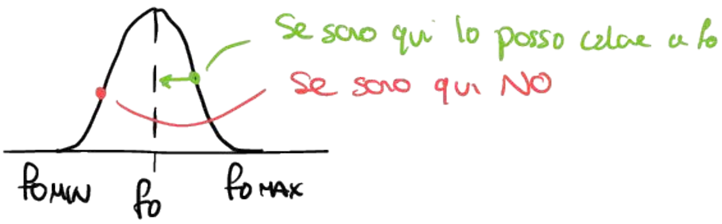
$$f_{o\,MIN} = 32768 - 377\,Hz$$

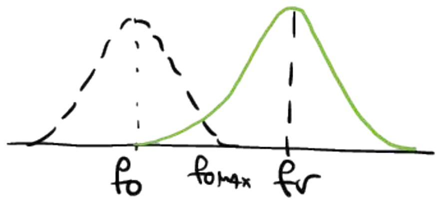
Usiamo clock a questa frequenza perché è una potenza di 2 e quindi da cui facendo divisioni per 2 in serie arriviamo a frequenze di 1Hz.

Facciamo questo perché con i risonatori non possiamo scendere troppo in frequenza altrimenti sentono l'accelerazione

Punto 2

Noi sappiamo che con l'elettrostatic tuning noi possiamo solo ridurre la frequenza ma non aumentarla perciò il sistema così fatto non va bene perché se sono sotto alla mia fo base non posso farci niente.





così che anche nel caso peggiore posso andare a fo

Facciamo una roba così

So che $f_r - \Delta f_{o,MAX} = 32768 Hz$

$$f_r = \frac{32768}{1 - \frac{3}{2}\frac{0{,}1\mu m}{1{,}5\mu m}} = \frac{32768}{0{,}9} = 36409 Hz$$ ← è la nostra target frequency

Perciò dobbiamo avere che

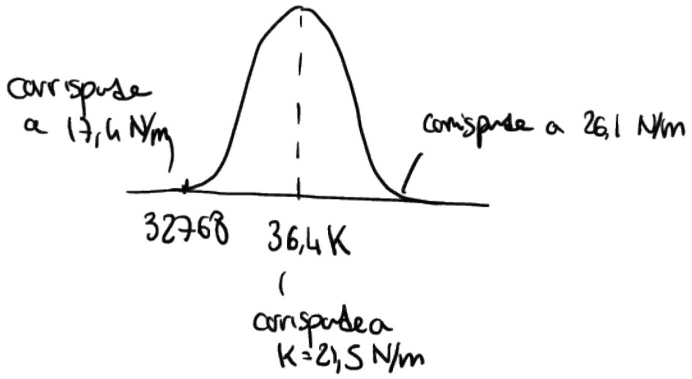
$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad m = \frac{K}{(2\pi f_r)^2}$$

L'espressione della stiffness è

$$K_{1,5} = 2Eh\left(\frac{w}{L}\right)^3 = 2 \cdot 160 \cdot 15\mu m \cdot \left(\frac{1{,}5\mu m}{91\mu m}\right)^3 = 21{,}5 \frac{N}{m}$$

$$\left.\begin{aligned} K_{1,4} &= 17{,}4\ N/m \\ K_{1,6} &= 26{,}1\ N/m \end{aligned}\right\}$$ Sono i K con la larghezza che varia da 1,4 a 1,6 μm.

Perciò



Nel caso standard (centrato) abbiamo che

$$m = \frac{K_{1,s}}{(2\pi f_r)^2} = \frac{21,5\ N/m}{(2\pi\, 36409)^2} = 0,41 mKg$$

Domanda 3)

Qual'è la tensione che dobbiamo applicare nel caso peggiore per tornare alla frequenza che vogliamo?
Cioè prendiamo la massima frequenza che possiamo avere e vediamo che tensione serve per arrivare alla nostra frequenza

Devo passare da $K=26,1$ a $K=17,4$ perciò

$$K_{elec} = -(26,1\ N/m - 17,4\ N/m) = -8,7\ N/m$$

Noi sappiamo anche che in generale 2 piatti paralleli hanno un Kelec pari a

$$K_{elec} = -2\frac{C_{TUN}}{g^2} \cdot V_{TUN}^2 \cdot N_{TUN}$$

Noi abbiamo 8 piatti paralleli $N_{TUN}=8$

perciò la tensione di tuning deve essere

$$V_{TUN} = \sqrt{\frac{-K_{elec}\cdot g^2}{2\, C_{TUN} N_{TUN}}} = \sqrt{\frac{-K_{elec}\, g^3}{2\,\varepsilon_0\, h\, \underbrace{L_{TUN}}_{\text{lunghezza elettrodi di tuning}} N_{TUN}}}$$

Allora, noi dobbiamo supporre la lunghezza degli elettrodi di tuning uguale alla lunghezza della spring (non ha senso farli maggiori perché devono stare dentro il package)

il gap dato nel testo del problema è 1µm ma non dobbiamo usare quello perché noi stiamo considerando il caso a f_{0MAX} quindi quando l'etching ha ridotto il gap quindi

$$g = 1\mu m - 0,05\mu m - 0,05\mu m = 0,9\mu m$$

Perciò a noi ci risulta che

$$V_{TUN} = \sqrt{\frac{8,7\cdot(0,9\mu m)^3}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-32}\cdot 15\mu m\cdot 9\mu m\, N_{TUN}}} = 5,8V$$

E non abbiamo problemi di pulling instability perché in quel caso $K_{TOT} \leq \emptyset$

PUNTO 4)

Trovare la DC voltage al rotore per avere la resistenza equivalente detta nel testo.

$R_{eq} = 10 M\Omega$

$$\frac{i_m(0)}{V_a} = \frac{\eta_A \eta_S s}{ms^2 + bs + K} = \frac{\eta^2 s}{ms^2 + bs + K} = \frac{1}{\frac{sm}{\eta^2} + \frac{b}{\eta^2} + \frac{1}{s\frac{K}{\eta^2}}} = \frac{1}{Z(s)}$$

Perciò l'impedenza di questo blocco è:

$$Z(s) = \underbrace{s\frac{m}{\eta^2}}_{\text{inductive}} + \underbrace{\frac{b}{\eta^2}}_{\text{resistive}} + \underbrace{\frac{1}{s K/\eta^2}}_{\text{capacitive}} = sL_{eq} + R_{eq} + \frac{1}{sC_{eq}}$$

perciò

$$R_{eq} = \frac{b}{\eta^2} < 10 M\Omega \qquad b = \frac{\omega_0 m}{Q} \quad \text{abbiamo tutti questi parametri}$$

$$\eta = V_{rot} \cdot \frac{dC}{dx} \quad \begin{cases} F = \eta \cdot V_a \; [N/V] \\ i_m = \eta \cdot \dot{x} \; [A/m/s] \end{cases}$$

$$C = \frac{2\varepsilon_0 h (L_{ov} + x) \cdot N_{CF}}{g}$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g} \qquad \frac{\omega_0 m/Q}{\left[V_{rot} \cdot \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g}\right]^2} < 10 M\Omega$$

Perciò

$$V_{rot} = \sqrt{\frac{\omega_0 m/Q}{\left(\frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g}\right)^2 \cdot 10 M\Omega}} = 11,1$$

Ma attenzione io so che V_{rot} è 11,1 V e che V_{rot} era 5,8V prima, Ma 5,8V è la ddp tra i 2 piatti paralleli quindi devo stare attento che se sul rotore metto 11,1 V sull'altro piatto parallelo devo mettere 5,3V in modo da avere ddp = 5,8V

$$\eta = \frac{V_{rot} \cdot 2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} F/m \cdot 15\mu m \cdot 38}{\underbrace{1\mu m}_{\text{in nominal conditions}}} = 1{,}12 \cdot 10^{-7} N/V$$

$R_{eq} = 10 M\Omega \qquad L_{eq} = \frac{m}{\eta^2} = 32 kH \qquad C_{eq} = \frac{\eta^2}{K} = \frac{\eta^2}{17{,}4 N/m} = 0{,}72 fF$

You work in the analog division of a MEMS company. You are asked to design an electronic oscillator whose frequency-selective element is a MEMS resonator. Its parameters are listed in Table 1. The minimum capacitance of the chosen circuit process is 200 fF.

1. Calculate the maximum equivalent resistance, $R_{eq,max}$, of the resonator, considering the dependence of the quality factor on temperature.
2. Size the charge-amplifier-based front-end, used to readout the motional current.
3. An additional stage is needed to close the loop, considering a target displacement amplitude of the proof frame, $x_{a,max}$, of 2 μm: describe and size such a stage.

	Symbol	Value
Resonance frequency	f_0	32768 Hz
Mass	m	0.8 nKg
Process thickness	h	15 μm
Gap	g	1.8 μm
Q-factor @ room temperature (300 K)	Q_0	2000
Number of comb-finger structures	N_{CF}	70
Rotor DC voltage	V_{DC}	5 V
Circuit supply voltage	$\pm V_{DD}$	$\pm$ 3.3 V
Temperature operating range	ΔT	$-45°$ C to $+85°$ C

Table 1: Electro-mechanical parameters of the MEMS resonator.

4. Finally, another stage is required to satisfy Barkhausen criteria at resonance: describe it, choose where to place it, and size it.

PUNTO 1)

Max Req considerando la variazione di Q sul range di temperatura.
Noi sappiamo che

$$R_{eq} = \frac{b}{\eta^2} \qquad \text{e } b \text{ è in funzione di } Q$$

Noi sappiamo che possiamo scrivere il quality factor come

$$Q = 2\pi \frac{E_{STORED}}{E_{DISSIPATA\ (IN\ 1\ CICLO)}}$$

l'Estored la posso scrivere come

$$E_L = \frac{1}{2} L_{eq} I^2$$ ← usiamo questa dato che abbiamo un circuito in serie

$$E_C = \frac{1}{2} C_{eq} V^2$$

$$= 2\pi \frac{\frac{1}{2} L_{eq} I^2}{\frac{1}{2} R_{eq} I^2 \cdot \frac{1}{f_0}}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA FORZA

$$= 2\pi f_0 \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = 2\pi f_0 \frac{m/\eta^2}{b/\eta^2} = \frac{\omega_0 m}{b}$$

Perciò posso scrivere Req come:

$$R_{eq} = \frac{b}{\eta^2} = \frac{\omega_0 m}{Q \cdot \eta^2} \longrightarrow R_{eq}(T) = \frac{\omega_0 m}{Q(T) \cdot \eta^2}$$

noi sappiamo che b dipende dalle molecole gassose ecc.., allora posso dire che b è proporzionale a

$$b \div n_{mol} \cdot v_{MOL} \qquad \text{n° molecole} \cdot \text{Velocità molecole}$$

Usiamo la formula dei gas ideali $pV = n_{mol} R T \rightarrow n_{mol} \div \frac{P}{T K_B}$

e usiamo l'energia cinetica $\frac{1}{2} m v_{mol}^2 = \frac{1}{2} K_B T \rightarrow v_{MOL} \div \sqrt{K_B T}$

Allora abbiamo che

$$b(T) \div \frac{P}{K_B \cdot T} \cdot \sqrt{K_B \cdot T}$$

MEMS NON INCAPSULATO
LA PRESSIONE NON È COSTANTE
E NON HO CORRELAZIONE TRA
PRESSIONE TEMPERATURA
ALLORA $\div P/\sqrt{T}$

INCAPSULATO → VOLUME FISSO, SE VEDIAMO NELLA LEGGE DEI GAS IL PRODOTTO P·T È COSTANTE $\div \sqrt{T}$ (NOSTRO CASO)

ALLORA OTTENIAMO CHE $Q(T) \div 1/\sqrt{T}$ PERCIÒ $Q(T) = \frac{\alpha}{\sqrt{T}} \to Q(T)\sqrt{T} = \alpha$ ← COSTANTE

TORNANDO ALLA DOMANDA PRINCIPALE È CHIARO CHE Req max c'è quando Q è min e Q è min quando T è MAX

$$R_{eq} = \frac{\omega_0 m}{Q(T)\cdot \eta^2}$$

$$Q(300K)\cdot\sqrt{300} = Q(T)\cdot\sqrt{T}$$ ← Q·T deve essere uguale per qualsiasi temperatura

perciò

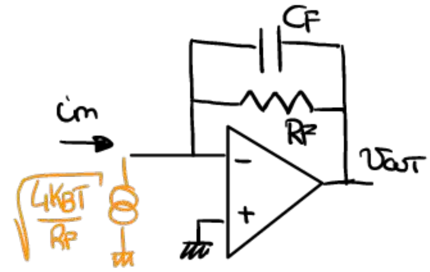
$$Q_{MIN} = Q(300K)\cdot\sqrt{\frac{300K}{273K+85}} = \underbrace{2000}_{\text{Fattore di qualità a temperatura ambiente}}\cdot\sqrt{\frac{300}{358}} = 1831$$

$$= \frac{2\pi \overset{32768Hz}{f_0}\cdot \overset{0,8\,mKg}{m}}{1831\left(\underset{5V}{V_{DC}}\cdot\frac{2\cdot\varepsilon_0\cdot \overset{15\mu m}{h}\cdot \overset{70}{N_{CF}}}{\underset{1,8\mu m}{g}}\right)^2} = 33,8\,M\Omega$$

poi il Q_{MAX} è $$Q_{MAX} = 2000\cdot\sqrt{\frac{300}{273-45}} = 2294$$

PUNTO 2

Dimensionare il charge amplifier



$$f_{polo} = \frac{1}{2\pi C_F R_F}$$

Se usiamo RF piccolo abbiamo che il polo cade dopo la nostra frequenza di utilizzo, usiamo il circuito come un TIA.
Al contrario se RF grande spostiamo il polo a basse frequenze e quindi il polo è sotto la freq di utilizzo e usiamo la zona capacitiva.

Quale delle 2 soluzioni scegliamo? Dovremo vedere l'SNR e capire quello che ci conviene (non consideriamo il rumore dell'OPAMP), confrontiamo gli SNR all'input.

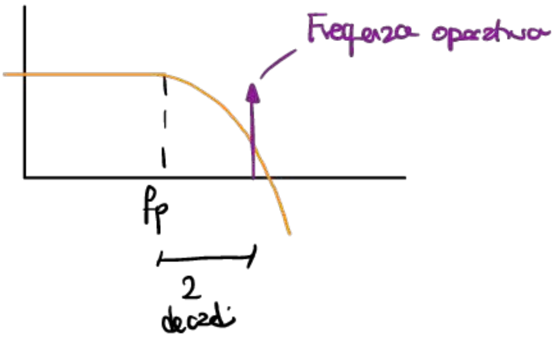
$$SNR_d = \frac{i_{in}}{\sqrt{\frac{4KBT}{R_F}}} \div \sqrt{R_F}$$ ← è proporzionale a RF

density (non ho moltiplicato per la banda)

Capiamo quindi che ci sono 2 motivazioni per usare un charge amplifier, posso usare grandi RF e l'altra è che separo il guadagno dal rumore.

C_F ⇝ minimum value → 200fF

l'idea è che dovremo scegliere CF per aprire al massimo la dinamica d'uscita in questo caso ci veniva 200fF
Decidiamo ora dove mettere il polo del charge amplifier, so che dopo una decade del polo ho che la fase ho circa 85° in meno.
Cosa buona e giusta è quindi scegliere il luogo del polo 2 decadi lontano dalla risonanza



Perciò noi dimensioniamo R_F in modo che

$$\frac{1}{2\pi R_F C_F} = \frac{f_0}{100}$$

Perciò $R_F = \frac{100}{f_0} \cdot \frac{1}{2\pi C_F} = 2{,}4\,G\Omega$

Perciò

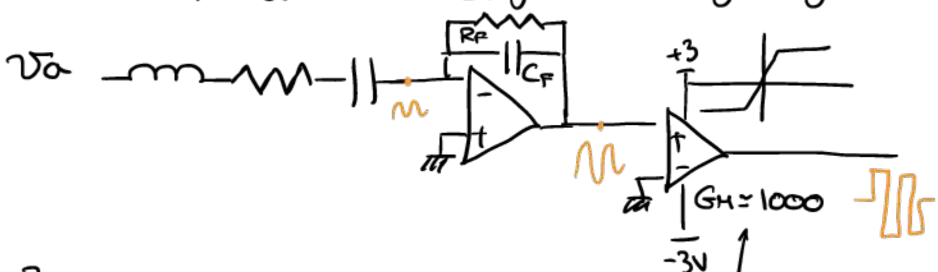
$$G_{loop}(\omega_0) = \frac{i_m}{v_a}(\omega_0) \cdot G_{CA}(\omega_0)$$

alla frequenza di risonanza ho che

$$= \frac{1}{R_{eq}} \cdot \frac{1}{\omega_0 C_F} \xrightarrow{\text{nello worst case}} \frac{1}{33{,}8\,M\Omega} \cdot 24{,}3\,M\Omega = 0{,}7$$

Non è abbastanza

Allora devo mettere un ulteriore stage ad alto guadagno



supponiamo che il comparatore guadagni 1000

PUNTO 3

Ricordiamo che $\frac{v_a}{4} \ll V_{rot}$

Sappiamo poi che il maximum displacement sia $2\,\mu m$, dobbiamo dimensionare tutto perché ciò funzioni

$$\frac{X}{F}(\omega_0) = \frac{Q}{K} \quad \text{perciò} \quad X_{MAX}(\omega_0) = \frac{Q_{MAX}}{K} \cdot F$$

Forza di attuazione

caso peggiore per il Q

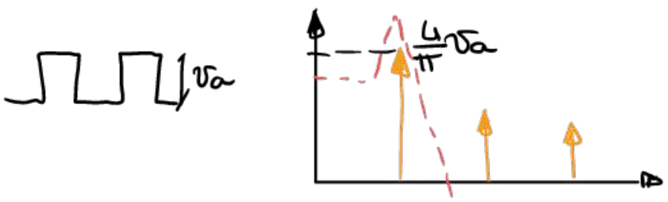
$$= \frac{Q_{MAX}}{K} \eta \cdot v_{A,MAX}$$

Capire da dove l'ha tirata fuori

Perciò otteniamo che

$$v_{a\,MAX} = \frac{X_{MAX} \cdot K}{Q_{MAX} \cdot \eta} = \frac{2\,\mu m \cdot \omega_0^2 \cdot m}{V_{rot} \cdot \frac{2\varepsilon_0 h N_{cf}}{g} \cdot 229\,u} = 570\,mV$$

Posso usare anche un onda quadra con prima armonica di valore 570 mV, le alte armoniche non rompono le balle perché ho che la rete risonante le filtra via



Dobbiamo ricordarci di $\frac{4}{\pi}$

Allora l'ampiezza massima dell'onda quadra è $V_{a\,MAX_{SQ}} = \dfrac{V_{a\,MAX}}{4/\pi} = 450\,mV$

Perciò dobbiamo fare che l'onda quadra da $\pm 3V$ che era vada a $\pm 450\,mV$ dobbiamo fare un degain di 0,15. Il modo più semplice è usare un voltage divider e un buffer non invertente

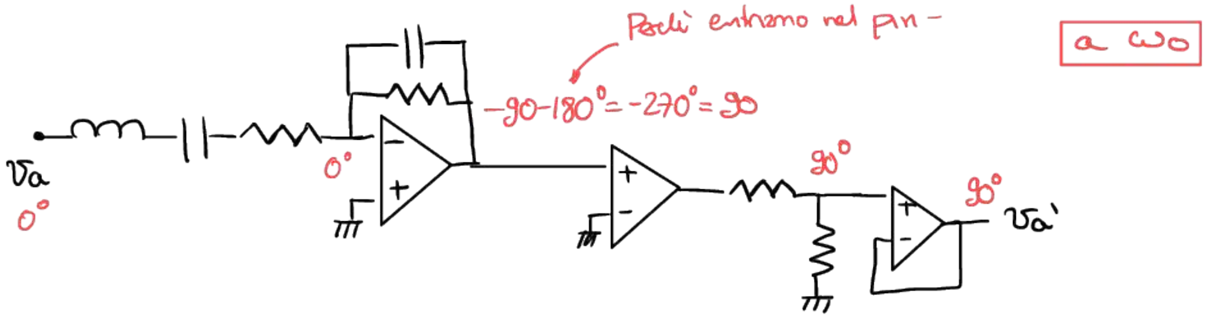
Perciò adesso calcoliamo Gloop

$$G_{loop} = \frac{1}{R_{eq}\,\omega_0\, C_F} \cdot G_{HL} \cdot G_{DEGAIN} = 0{,}72 \cdot 1000 \cdot 0{,}15 \gg 1$$

Ma perchè faccio un gain grande e poi il degain? lo facciamo perchè il sistema non è lineare e satura alla sinusoide, in questo caso mi serve comunque il degain. anche se avessi applicato un gain iniziale più piccolo.

PUNTO 4

Dobbiamo fare un check della propagazione dei delay nel loop.

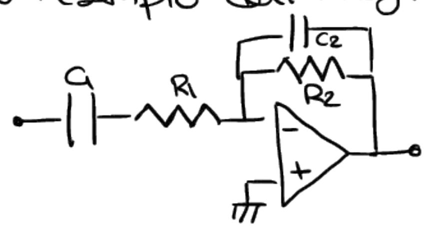


Ci serve uno shift di $-90°$ per creare questo abbiamo 2 opzioni

1) derivatore $(+90°)$ e entrando nel suo input negativo $(-180°)$ allora $V_{out} = -90°$

2) l'integratore non invertente $(-90°)$

Facciamo l'esempio dell'integratore



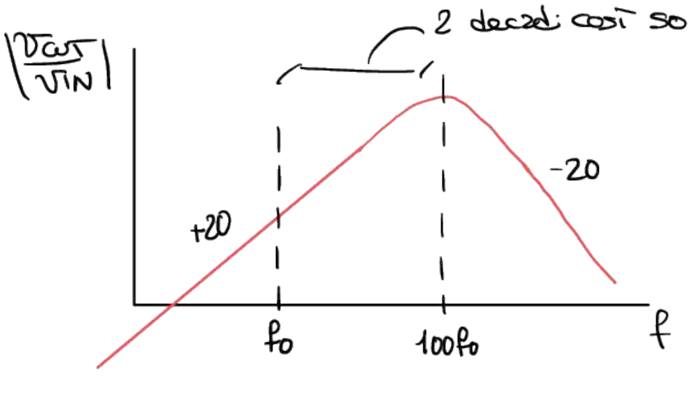
ha 2 poli $f_{p1} = \dfrac{1}{2\pi R_1 C_1}$ $f_{p2} = \dfrac{1}{2\pi R_2 C_2}$

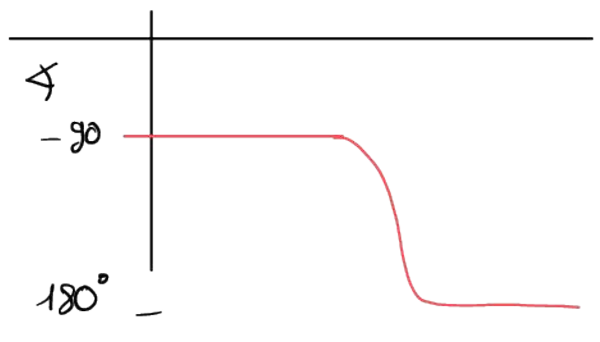
$f_{p1} = f_{p2} = 3{,}2\,GHz$

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s C_1 R_2}{(1 + sC_1R_1)(1+sC_2R_2)}$$

Guadagno dello stage = $G = sC_1R_2 = 1$

2 decadi così so che il polo non ha effetti su f_0



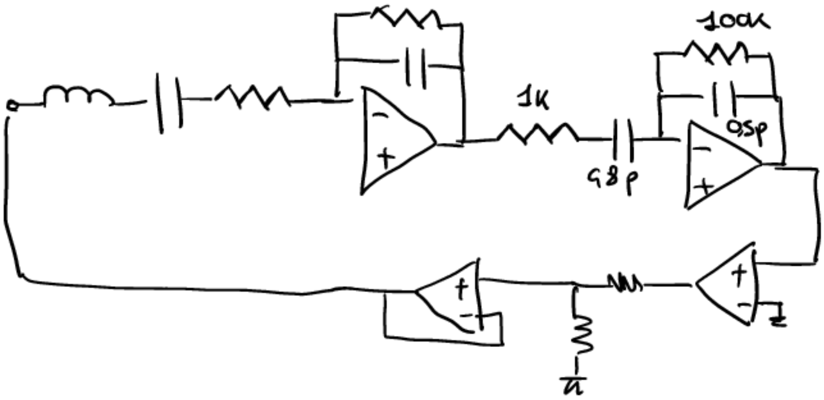


Imponiamo $R_2 = 100k$ allora

$$\frac{1}{2\pi R_2 C_2} = 3{,}2\,MHz \rightarrow C_2 = 0{,}5\,pF \qquad \omega_0 C_1 R_2 = 1 \longrightarrow C_1 = 48\,pF$$

Allora $\dfrac{1}{2\pi R_1 C_1} = 3{,}2\,MHz \longrightarrow R_1 = 1K\Omega$

Dove mettiamo questa struttura? il posto migliore dove metterlo è prima di trasformare il segnale in onda quadra perché un onda quadra porta impulsi: se derivo un impulso vado a $+\infty$ se integro un onda quadra ho un segnale triangolare che non è l'ideale per comandare un MEMS

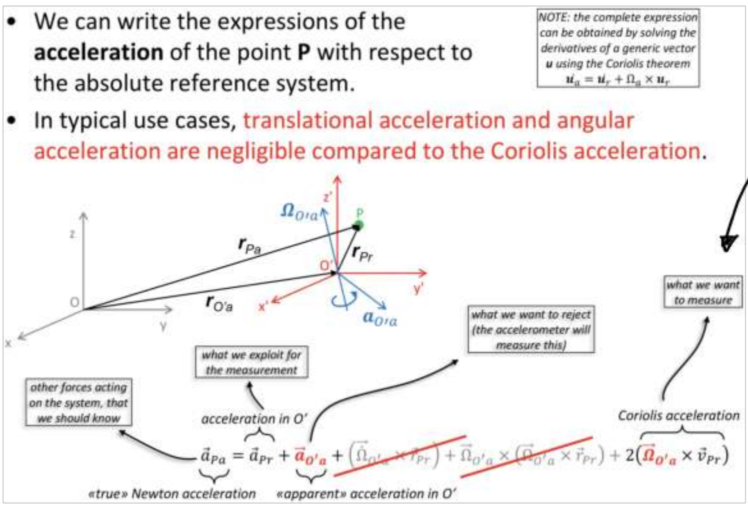


Lui ha anche disegnato il modulo del loop gain, io non l'ho messa.

Giroscopio 1

FULL SCALE RANGE: massimo angular rate measurement. L'unità di misura dell'angular rate è dps!
I giroscopi sono più complessi internamente rispetto agli accelerometri, perciò abbiamo più consumo di potenza.

La forza di Coriolis



Questa è una slide già vista

L'idea è di riuscire a misurare questa accelerazione leggendo l'accelerazione nel piano non inerziale e sapendo la vera accelerazione.

Dobbiamo supporre che i giroscopi misurino accelerazione angolare anche in presenza di accelerazione lineare e per gli accelerometri vale il viceversa.

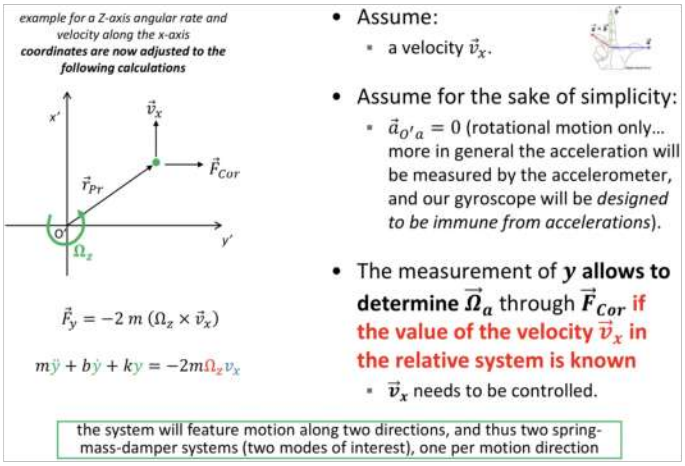
Se noi vogliamo che il giroscopio misuri rotazioni intorno all'asse z abbiamo che il giroscopio deve potersi muovere in 2 direzioni, una per avere velocità e l'altra per sentire la forza.

Perciò noi assumiamo la forza sull'asse y e la velocità sull'asse x, possiamo dunque scrivere l'equazione caratteristica (consideriamo nulle le accelerazioni ciò'a poi capiremo perché possiamo farlo)

$$m\ddot{\vec{y}}_{Pr} + b\dot{\vec{y}}_{Pr} + k\vec{y}_{Pr} = -m\cancel{\vec{a}_{O'a}} - 2m(\vec{\Omega}_{O'a} \times \vec{v}_{x,Pr})$$

(assume that effects of accelerations are rejected in a gyroscope)

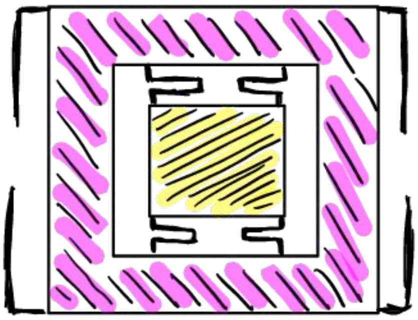
Come possiamo misurare la angular rate



Ω_z è quello che vogliamo misurare, per le y dobbiamo misurare il displacement ma questo non basta. Dobbiamo anche sapere la velocità v_x.

Perciò come detto prima dobbiamo fare un design di una struttura che può avere displacement in 2 direzioni diverse.

Come costruisco questo device? Posso fare un coupling di 2 nested masses




Notiamo che con questa struttura la massa esterna è libera di muoversi nella direzione x mentre quella interna in quella y

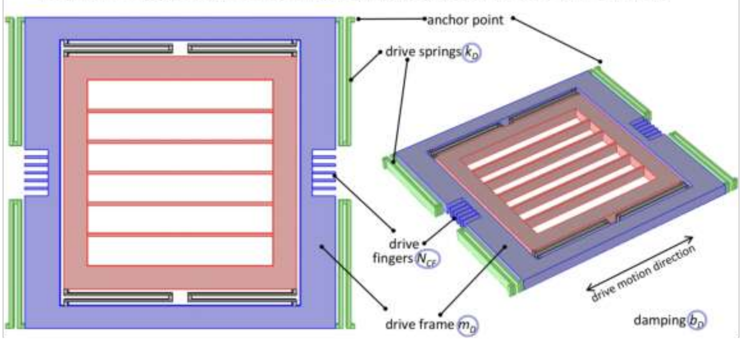
la massa esterna poi sarà attuata con una struttura a dita intrecciate come nei misuratori così imponiamo una velocità v_x

il movimento della massa esterna non fa muovere quella interna perché le molle interne sono molto rigide nella direzione x.

Dato che facciamo muovere la massa esterna come un risuonatore la velocità sarà di tipo oscillatorio. La massa centrale si sposta grazie alla forza apparente di Coriolis dato che la nostra velocità è oscillatoria anche la forza di Coriolis sarà di tipo oscillatorio. Nella realtà avremo grandi displacement nell'asse x e più piccoli nell'asse y.

La massa esterna avrà un suo modello molla smorzatore che noi chiamiamo drive mode:

- In the simplest implementation, the **drive mode** is anchored to the substrate by means of **drive springs** (in green) which allow motion in the x-direction and are quite rigid in the y direction.
- The drive mode is kept in resonance oscillation, usually via **comb fingers**. The main block of the drive mode (in blue) is called the **drive frame**.



La stiffness lungo la drive direction sarà chiamata K_D e dipenderà dalle molle verdi. Ci aspettiamo che il fattore di qualità Q_D sia grande perché non abbiamo piatti paralleli lungo la direzione x.

La massa che si muove in direzione x è la somma della massa esterna e di quella interna.

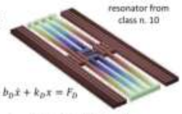
Nel caso della massa interna avremo un fattore di qualità + basso perché abbiamo piatti paralleli per il sensing, inoltre l'unica massa che consideriamo è quella interna.

In pratica il giroscopio è un risonatore più un accelerometro

Nella realtà questa è una versione semplificata del giroscopio e non è uguale a quella che nella realtà viene utilizzata.

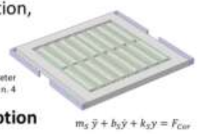
In a simplified vision, **a gyroscope can be seen as a combination of:**

- **a comb-driven resonator** with the following parameters:
  - a mass m given by the **sum** of the drive frame and the sense frame masses m_D **and** m_S;
  - a stiffness k_D given by the **drive springs**;
  - a (low) damping coefficient b_D determined by **motion in the X-direction**.



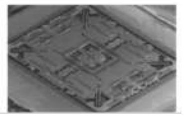
$(m_D + m_S)\ddot{x} + b_D\dot{x} + k_D x = F_D$

- a **parallel-plate accelerometer** of the Coriolis acceleration, with the following characteristic parameters:
  - a mass m_S given by the **sense frame only**;
  - a stiffness k_S given by the **sense springs**;
  - a (larger) damping coefficient b_S determined by **motion in the Y-direction**, so by PP squeeze film damping.



$m_S\ddot{y} + b_S\dot{y} + k_S y = F_{Cor}$

Today we start from the simplest architecture. More complicated geometries (like the one shown aside) will be derived in the next classes.



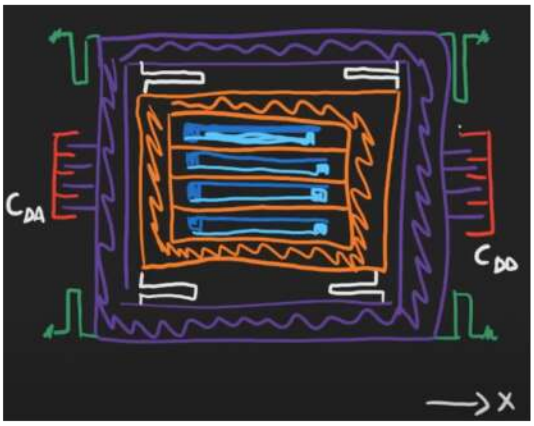
Calcolare la sensitività

The calculation of the sensitivity follows these consecutive steps:

- calculation of the **drive electrostatic force** F_{elec}
- calculation of the **drive displacement at resonance** x_D
- calculation of the **drive velocity** v_D
- calculation of the **Coriolis force** F_{Cor}
- calculation of the **sense mode displacement** y_S

For today, the calculation will stop at this point. In the next lecture we will complete it through:

- calculation of the **sense capacitance variation** ΔC_S
- calculation of the **output voltage per unit rate (sensitivity)** $\frac{\Delta V_{out}}{\Omega}$



Perciò $C_{DA} = \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}(L_{OX}-x)}{g}$ Lox è l'overlap iniziale tra le dita interfacciate

- $\frac{dC_{DA}}{dx} = \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g}$

$$|F_{elec}| = \frac{(V_a \sin(\omega_0 t) - V_{DC})^2}{2} \cdot \frac{dC_{DA}}{dx} = \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF} V_{DC} V_a \sin(\omega_0 t)}{g}$$

Adesso che sappiamo la forza elettrostatica possiamo calcolare il displacement

$X_D = X_{D,0} \cdot \ldots(\omega_0 t)$ c'è una componente seno o coseno ma a noi non interessa, ci interessa solo l'ampiezza $X_{D,0}$

$$X_{D,0} = F_{elec,0} \cdot \frac{Q_D}{k_D}$$

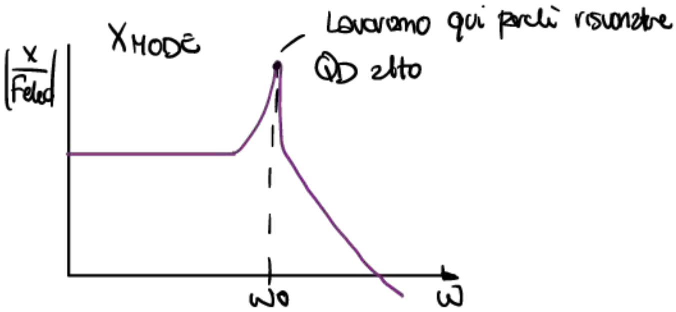
La velocità v_D la possiamo scrivere integrando X_D, in particolare

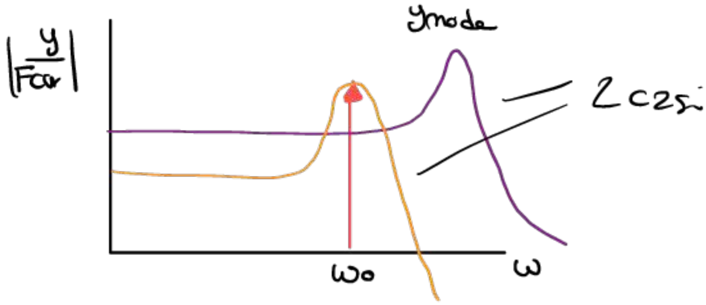
$X_D = X_{D,0} \cdot \cos/\sin(\omega_0 t) \rightarrow \dot{X}_D = \omega_0 X_{D,0} \cos/\sin(\omega_0 t)$

Possiamo quindi dire che $v_{D,0} = \omega_0 \cdot X_{D,0}$

Possiamo adesso ricavare la forza di Coriolis

$$F_{cor,0} = 2\cdot m_s \cdot v_{D0} \cdot \Omega_z = 2 m x_{D,0}\cdot \omega_0 \cdot \Omega_z$$





Vediamo che noi lavoriamo a freq ω_0 cioè a freq di risonanza. Capiamo dunque che anche la forza di Coriolis sarà applicata a freq ω_0. Dunque ci possono essere 2 casi. cioè che la risposta displacement $y/F_{coriolis}$ abbia frequenza di risonanza dopo o esattamente al valore di ω_0. Noi supponiamo per ora di usare solo il caso con le 2 frequenze matchate ma anche l'altro è ok

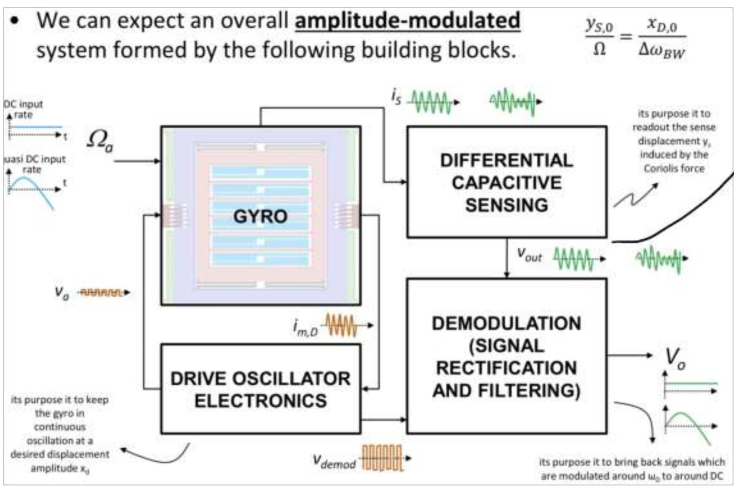
MODE MATCHING $\quad \omega_D = \omega_S = \omega_0$, Però

$$y_{S,0} = F_{cor,0}\cdot \frac{Q_S}{K_S} = 2 m_s x_{D,0}\cdot \omega_0 \cdot \frac{Q_S}{K_S}\cdot \Omega_z$$

possiamo ora scrivere (ricordiamo che $Q_S = K_S/\omega_0 b_S$)

$$\boxed{\frac{y_{S,0}}{\Omega_z} = 2 m_S x_{D,0}\cdot \omega_0 \cdot \frac{K_S}{\omega_0 b_S}\cdot \frac{1}{K_S} = \frac{2 m_S x_{D,0}}{b_S} = \frac{x_{D,0}}{(b_S/2m_S)}}$$

Giroscopi 2



è un segnale modulato in AM, infatti la sua ampiezza varia in funzione della forza di Coriolis

Come già sappiamo il fattore di Qualità cala con la radice quadrata della temperatura. La conseguenza di questo è che se noi creiamo un oscillatore che ha il displacement

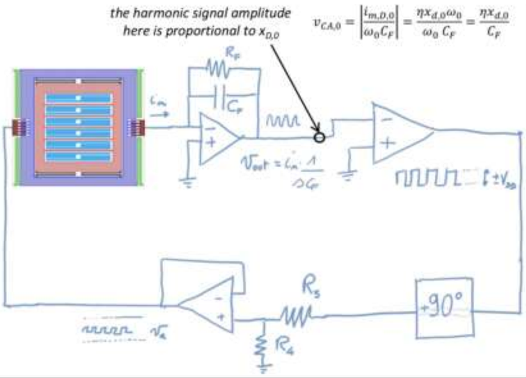
$$x_{D,0} = F_{elec}\cdot \frac{Q_D}{K_D}$$

vediamo che anche il displacement cambia con la temperatura (il Q può variare anche del 30%!), tipicamente però variano di circa il 15%. Però così non basta: ci serve qualcosa in grado di controllare l'ampiezza di displacement.

Quando abbiamo studiato i risuonatori abbiamo visto che esistevano 2 topologie circuitali: un TIA e un TCA. Noi vogliamo controllare il displacement perciò dobbiamo prendere la topologia per la quale la tensione di output è proporzionale al displacement.

As the **CA topology** gives an **output proportional to** the displacement x_D, we choose this one:

- if we want to control $x_{D,0}$, a **good starting point** is to have it measured. Yet, it is not enough…



Per stabilizzare i segnali dobbiamo fare un loop con Gloop negativo. dobbiamo mettere un ulteriore loop per stabilizzare il displacement

il modo più facile per farlo è prendere la tensione all'uscita del charge amplifier e rettificarlo e poi usare un LPF.

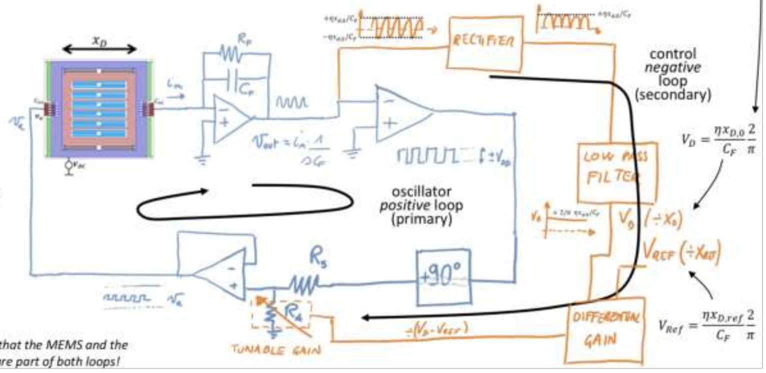
Dopo il LPF abbiamo una componente continua di valore $\frac{2}{\pi}\frac{\eta x_{D0}}{C_F}$. Compareremo poi questo valore con un valore standard

Dipendentemente dal segno della differenza dobbiamo agire sul loop principale. Agiamo su R_4, se la differenza è maggiore allora ridurremo R_4 in modo che l'ampiezza principale diminuisca

Schematic view of an automatic-gain-control loop:

- **take the** AC (sine) signal **at the CA output** (**proportional to** $x_{D,0}$);
- **rectify and low-pass** filter → you now have a **DC signal proportional to** $x_{D,0}$;
- **compare it with** a reference V_{REF}, related to the motion x_{REF} you want to set;

the factor $\frac{2}{\pi}$ gives the mean value of the rectified waveform



Note that the MEMS and the CA are part of both loops!

Circuiti per fare la rettificazione e che frequenza scegliamo per il LPF? e come facciamo il tunable resistance

Rectifier:

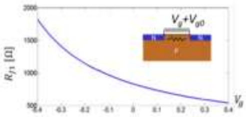
- **full-wave** approach using two diodes

LPF:

- any topology (e.g. active RC, or Sallen-key LPF);
- which frequency?
  - the rectified waveform has components at DC (which we want to save) and at $2\omega_0$, which we shall filter → **set the poles at a frequency $\leq \omega_0/5$.**

Tunable gain:

- **n-FET resistance in Ohmic region**
  - acting on the gate voltage, we can **change the drain-source resistance**;
- variable gain amplifier (VGA).



NOTE: shown circuits are here very simple. All of you should have seen them in courses of Electronics Fundamentals. This is a course on sensors and systems, and I do not pretend to look into the details of those circuit operation. Yet, it is always good to put things in their right context and to know which circuit topologies implement the functionalities that we need.

In generale per fare la tunable resistance usiamo un mos in triodo in modo che quando variamo la tensione di poco ai suoi capi cambia la corrente

Studiamo cosa succede nel readout della Forza di Coriolis.

Ricordiamo che il sensing del giroscopio è fatto con piatti paralleli mentre per mettere in oscillazione l'ambaradan usiamo la topologia a dita intrecciate, perché così abbiamo + displacement. Dobbiamo verificare che per la topologia a piatti intrecciati sia verificata l'approssimazione a piccoli displacement

Dobbiamo perciò verificare che il displacement y_{s0} sia piccolo rispetto al gap.

Vediamo che è vero e perciò usiamo i piatti paralleli perché abbiamo meno errore di linearità ed inoltre il transduction factor è migliore.

- remember that **PP sensing** will be preferable to CF if **displacements $y_{s,0}$ are small** compared to the gap.

$$y_{s,0} = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}}\Omega$$

Typical drive displacement $x_{D,0}$ **in MEMS gyroscopes:**

- about 5 µm

Minimum **required bandwidth $\Delta\omega_{BW}$** (application dependent):

- about 200 Hz (consumer and automotive cases)

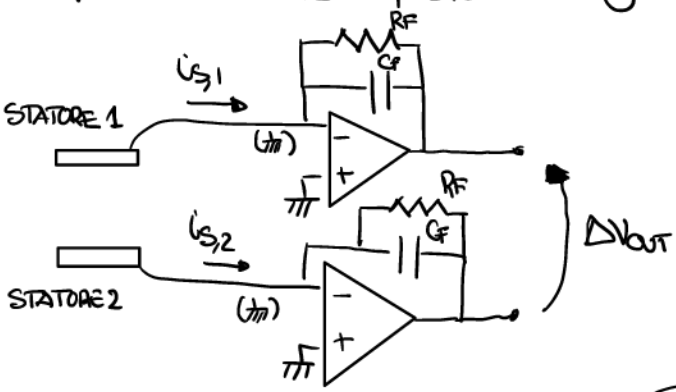
Maximum **angular rate to be measured** (FSR) from specs:

- about 2000 dps (consumer and automotive cases) → about **30 rad/s**

$$y_{s,0} = \frac{5\cdot 10^{-6}\, m}{2\pi\ 2\cdot 10^2 \frac{rad}{s}} 3\cdot 10 \frac{rad}{s} = 1.2\cdot 10^{-7} m = 120\ nm \longrightarrow$$

Ok, small displacement (<< typical gaps). Ok the use of PP (high sensitivity, no linearity issues).

Vediamo quindi come fare questo sensing.



$$i_{s,0i} = V_{DC}\cdot\frac{dC_{si}}{dt} = V_{DC}\cdot\frac{dC_{si}}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}$$

velocità nella direzione y

io so che il segnale è sinusoidale alla frequenza di risonanza, perciò

$$= V_{DC}\cdot\frac{C_{s0}}{g}\,y_{s0}\cdot\omega_0$$

dovrebbe essere l'ampiezza c'è ω perché è la derivata di un coseno/seno.

Perciò possiamo scrivere che

$$V_{OUT,0i} = \frac{i_{s,0i}}{\omega_0\cdot C_F} = \frac{V_{DC}}{C_F}\cdot\frac{C_{s0}}{g}\cdot y_{s,0}$$

Perciò

$$\Delta V_{OUT,0} = 2\cdot\frac{V_{DC}}{C_F}\cdot\frac{C_{s0}}{g}\cdot y_{s0} = 2\frac{V_{DC}}{C_F}\cdot\frac{C_{s0}}{g}\cdot\frac{x_{Drv}}{\Delta\omega_{BW}}\cdot\Omega$$

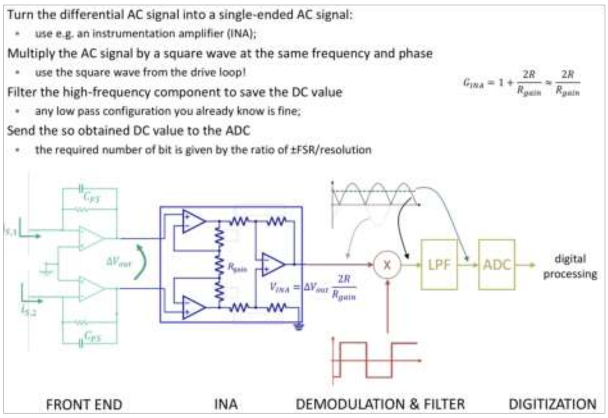
Perciò si ricava che

$$\boxed{\frac{\Delta V_{OUT,0}}{\Omega} = 2\cdot\frac{V_{DC}}{C_F}\cdot\frac{C_{s0}}{g}\cdot\frac{x_{Drv}}{\Delta\omega_{BW}}}$$

è la Sensitività

Demodulazione

Dobbiamo portare il segnale differenziale a uno singolo tramite un opamp da strumentazione, moltiplichiamo il segnale in AC alla stessa frequenza ω0, poi facciamo un LPF e poi mettiamo tutto in digitale.



Ma perché facciamo una demodulazione sincrona e non facciamo come prima con la rettificazione? (modulazione non sincrona) Non facciamo questo perché non tiene conto della fase (se ho un cos e un sin e li rettifico all'ora non li posso distinguere) e quindi perdo il segno.

Architetture dei giroscopi

Come fa il giroscopio a fare un rejecting delle accelerazioni nella sensing direction della forza di Coriolis?

Iniziamo confrontando un tipico valore del displacement dato da accelerazioni e dalla forza di Coriolis

So far, we **neglected** the fact that a **linear acceleration** – and not only an angular rate – can occur on the suspended mass. Let us check how **disturbing** this can be:

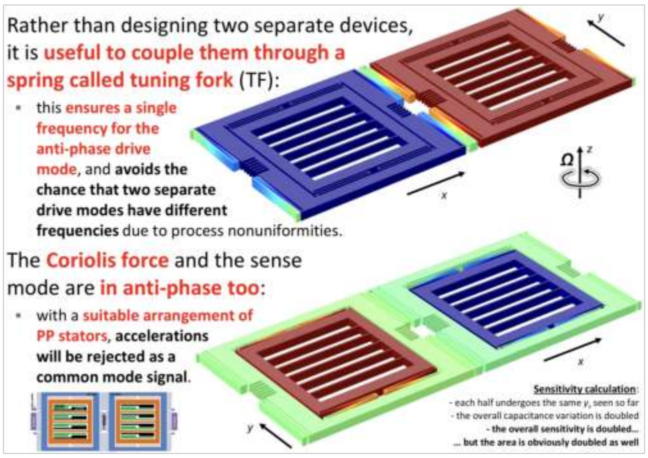
- effect of **a consumer FSR acceleration** (about 18 $\hat{g}$) on a gyro mass with a resonance e.g. at 5 kHz:
  - $y_S = \frac{18\,\hat{g}}{\omega_0^2} = \frac{18\cdot 9.8\frac{m}{s^2}}{(2\,\pi\,5000\,Hz)^2} = 176\ nm$
- effect of a **Coriolis force** (**at the resolution limit**, e.g. 100 mdps, about 2 mrad/s) for a device moving 5 µm and having a 200 Hz bandwidth:
  - $y_{S,0} = \frac{5\cdot 10^{-6}\ m}{2\,\pi\,2\cdot 10^2\frac{rad}{s}}\,2\cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s} = 8\ pm$

We conclude that **accelerations are effectively disturbing**:

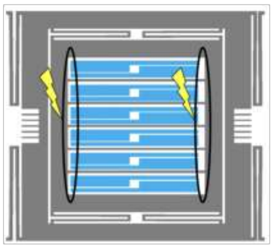
- the example shows an effect of >20000 times the resolution to be measured…
- even if the acceleration is not modulated at ω_0 and could be thus partially filtered, its effects are huge and it would be better to avoid such signals in the readout chain.

Notiamo che gli effetti delle accelerazioni sono molto più potenti di quelli della forza di Coriolis.
Abbiamo quindi 2 modi per capire che il valore che abbiamo non è una forza di Coriolis, il primo è che l'accelerazione non è modulata a ω_0 mentre la forza C. sì.
Benchè non siano modulate con un LPF non riusciamo a eliminare tutto quindi le accelerazioni sono in pratica disturbi.

Dobbiamo fare sì che le accelerazioni non cadano a ω_0 perché sennò questo disturbo viene ancora più aumentato perciò tipicamente si prendono ω_0 abbastanza alti.
Per risolvere ulteriormente il problema poi possiamo usare 2 giroscopi.
e supponiamo che in ogni punto nel tempo, le 2 abbiano stessa velocità e verso opposto. $V_x = -V_y$. accade quindi che anche le 2 forze di Coriolis siano uguali e opposte ma le accelerazioni avranno la stessa direzione, perciò se troviamo il modo di sottrarre i 2 segnali abbiamo annullato il contributo dell'accelerazione.
il problema è che questo succede solo quando le 2 si muovono alla stessa velocità.
Per fare sì che questo sia vero usiamo i 2 giroscopi con una tuning fork che fa muovere i giroscopi a fase opposta ma alla stessa freq di risonanza.



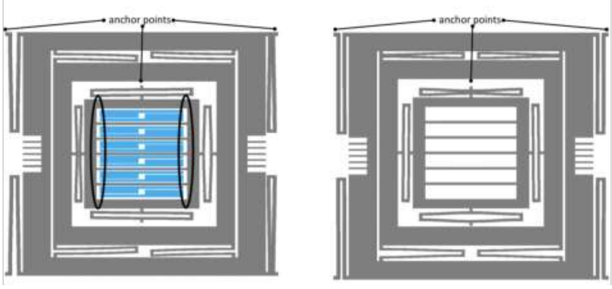
Un altro problema dei giroscopi è dato dalle capacità parassite che si possono creare a causa di effetti di fringing quando l'inner plate si avvicina troppo agli statori (si avvicina perché abbiamo il risuonatore).



Allora in questi casi possiamo usare un doubly decoupled gyroscope che fa muovere meno la massa interna.

With this further decoupling, we have now three frames:

- **drive frame** → moving along X-direction
- Coriolis frame (**decoupling frame**) → dragged in the X-direction by the drive mode, pushed in the Y-direction by the Coriolis force;
- **sense frame** → not moving along the drive direction (note the new anchor point), pushed along the sense direction by the Coriolis frame.



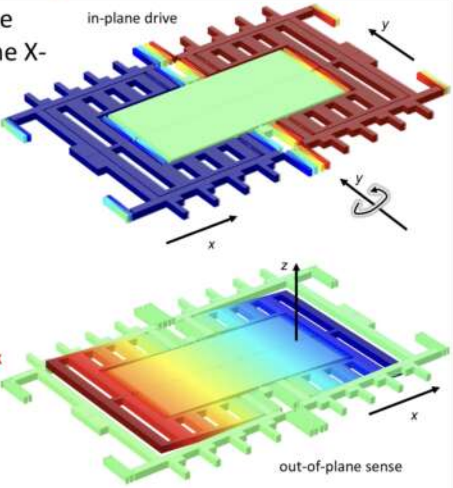
X and Y-axis gyroscope

Vogliamo sempre calcolare il movimento torsionale.

Y- (or X-) axis gyroscopes have usually a drive mode along the X- (or Y-) axis, with the sense mode along the vertical axis.

They usually feature the following characteristics:

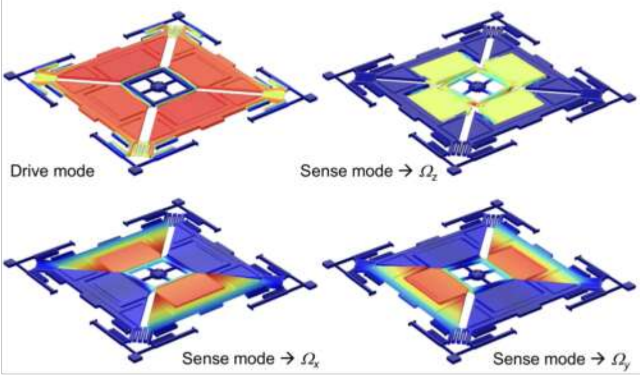
- rotation rather than translation – as seen for accelerometers;
- readout capacitive plates designed beneath the structure;
- anti-phase, dual-mass, tuning-fork drive mode;
- differential motion of the sense mode to reject accelerations (like in Z-axis).

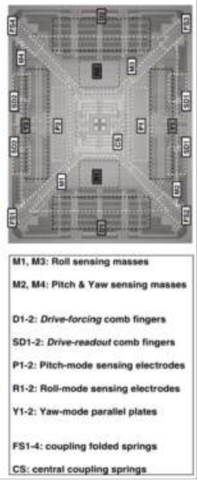


The other axis is obtained just by tilting this device by 90°.

Giroscopio 3 assi monolitico (unico device)

- Single-structure 3-axis gyros allow **saving power consumption** as only **one drive circuit** is needed (good for **consumer** applications).
  - example 1) with animations is designed in our lab
  - example 2) is a 3-axis hearth-beating gyro from STM





Giroscopio 3

La non linearità dei giroscopi è tipicamente trascurabile, invece dato che i giroscopi utilizzano segnali modulati in AM allora il concetto di Banda è estremamente importante.

We saw in the last class that **the sensitivity is proportional to the drive displacement** amplitude, **which is itself proportional to:**

- applied AC (actuator) voltage;
- applied DC (rotor) voltage;
- **drive quality factor.**

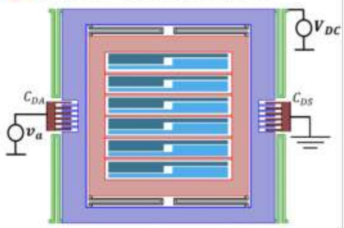
the control acts on this pair

$$\boxed{\frac{\Delta V_{out,0}}{\Omega} = 2\,\frac{V_{DC}\,C_S}{C_{FS}\,g}\,\frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}} = 2\,\frac{V_{DC}\,C_S}{C_{FS}\,g}\,\frac{x_{ref}}{\Delta\omega_{BW}}}$$

So, if we want to maximize the sensitivity while **keeping relatively low voltages** (v_a should be within typical IC power supplies, and << V_{DC}), **it is useful to exploit high Q factors** for the drive mode to reach large displacements $x_{D,0}$.

This is why it is **preferable to use comb-finger actuation** and sensing w.r.t. PP, for the gyro drive mode:

- b.t.w., PP drive-detection would be too nonlinear at large displacements.



Noi sappiamo che

$$x_{ret} \div Q_D V_{DC} \cdot v_a$$

dobbiamo sempre soddisfare che $v_a \ll V_{DC}$ (dettata dai risuonatori). Perciò per avere displacement x_{ret} grandi senza rompere questa regola allora dobbiamo usare Q_D alti.
Capiamo allora perché usiamo le dita intrecciate come sistema di risuonatore

Però per la sense direction ho dei piatti paralleli che potrebbero darmi l'effetto squeezed film, e quindi maggior damping $\Delta\omega_{BW} \propto b_w \propto 1/Q_S$
Ma noi vedremo che per la sense direction (e non per la direzione di movimento) va benissimo avere un Q_S non tanto grande altrimenti $\Delta\omega_{BW}$ diventa troppo piccolo.

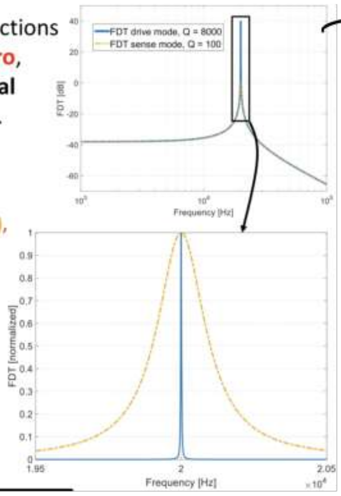
We now report sample transfer functions of the **two modes of a matched gyro**, with Q factors in the order of **several 1000s (drive)** and **few 100s (sense)**.

Note that:

- the system **response is given by the sense mode transfer function (yellow), excited by the Coriolis force (blue)** at a **frequency** corresponding to the **drive mode frequency** ω_0 times the **frequency of the angular rate** ω_Ω:

$$F_{cor,0} \propto v_{D,0}(\omega_0)\cdot\Omega(\omega_\Omega)$$

- therefore **the situation shown on the right is valid:**
  - for perfect mode matching (ω_S=ω_D=ω_0)
  - **for a DC angular rate** only ($\omega_\Omega = 0$)!



Questo è il grafico con le 2 funzioni di trasferimento del giroscopio (come detto prima la direzione del movimento a Q elevato mentre l'altra ha Q minore)

La Forza di coriolis è il prodotto dell'angular rate per la velocità di driving se noi supponiamo che l'angular rate sia costante e la velocità si trova esattamente su ω_0 allora ho che la forza di coriolis in frequenza è come un delta dato che è composta da un'unica funzione seno esattamente sopra la sense transfer function (Mode Matching)

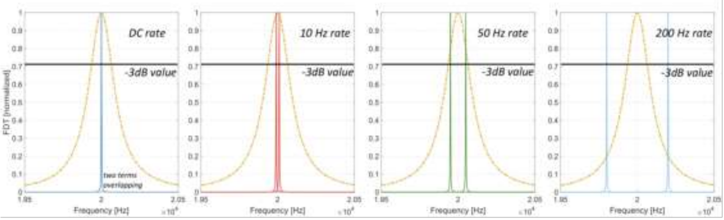
MA QUESTO ACCADE UNICAMENTE SE Ω È COSTANTE E NON DIPENDE DA ω, INFATTI SE $\Omega(\omega_\Omega)$ ALLORA AVREMMO CHE IL PRODOTTO

$F_{cor} \propto v_D(\omega_0)\cdot\Omega(\omega_\Omega)$ NON SAREBBE A ω_0

- The **sensing bandwidth** of a gyroscope represents **the maximum frequency of the angular rate** that a gyro can measure (-3 dB loss).
- **Assume** that we have **an AC angular rate** (e.g. cosinusoidal):
  - the **frequency of Coriolis force** components is given by the **sum/difference of the Coriolis force AC frequency ω_Ω and of the drive mode at ω_0**!

$$F_{Cor} = 2\,m_s\,v_{D,0}\cos(\omega_0 t)\,\Omega(t) = 2\,m_s\,v_{D,0}\cos(\omega_0 t)\,\Omega_0 cos(\omega_\Omega t)$$

$$F_{Cor} = 2\,m_s\,v_{D,0}\frac{1}{2}[\cos([\omega_0+\omega_\Omega]t)+\cos([\omega_0-\omega_\Omega]t)]$$



Notiamo che abbiamo un comportamento di frequency splitting che può portare i 2 segnali fuori dalla banda di 3 dB.

Noi abbiamo detto che la banda è $\Delta\omega_{BW}$ ma non lo abbiamo mai dimostrato. Facciamo:

$$\frac{y_s}{F_{cor}}(s) = \frac{1}{m_s}\cdot\frac{1}{s^2+s\frac{\omega_0}{Q_s}\cdot\omega_0^2}$$

Possiamo scrivere $$\frac{y_s}{F_{cor}}(j\omega) = \frac{1}{m_s}\cdot\frac{1}{-\omega^2+j\frac{\omega\omega_0}{Q_s}+\omega_0^2}$$

Possiamo scrivere che

$$\left|\frac{Y}{F_{cor}}(j\omega)\right| = \frac{1}{m_s}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)}}$$

Voglio calcolare il valore della FDT per valori $\omega=\omega_0\pm\Delta\omega_{BW}$

Perciò

$\omega_0 \pm b_s/2m_s$

oppure

$\omega_0 \pm \omega_0/2Q_s$

Prendiamo $\omega = \omega_0(1\pm 1/2Q_s)$

Dunque

$$\frac{y_s}{F_{cor}}[\omega_0(1\pm 1/2Q_s)] = \frac{1}{m_s}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(\cancel{\omega_0^2}-\cancel{\omega_0^2}-\underbrace{\frac{\omega_0^2}{4Q_s^2}}\pm\frac{\omega_0^2}{Q_s}\right)^2+\left(\frac{\omega_0^2}{Q_s}\pm\underbrace{\frac{\omega_0^2}{2Q_s^2}}\right)^2}}$$

Trascurabili perché divisi per Q_s^2

Perciò

$$= \frac{1}{m_s}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{\omega_0^2}{Q_s}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{m_s}\cdot\frac{Q}{\omega_0^2}$$

noi sappiamo che $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ perciò

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Q_S}{K_S}$$

Sappiamo che è il picco della FDT

L'ampiezza della FdT è ridotta di $1/\sqrt{2}$ che è esattamente la banda, perciò $\Delta\omega_{BW}$ è la Banda

Abbiamo perciò dei trade off sulla banda

Vediamo che la sensitività dipende dall'opposto della banda, perciò se aumentiamo troppo la banda la sensitività diminuisce e viceversa.

Therefore, gyros operated **at resonance clearly show a marked sensitivity-bandwidth trade-off**:

$$\frac{\Delta V_{out,0}}{\Omega} = 2\,\frac{V_{DC}}{C_{FS}}\frac{C_S}{g}\frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}} \qquad \boxed{\frac{\Delta V_{out,0}}{\Omega}\Delta\omega_{BW} = constant} \qquad \Delta\omega_{BW} = \frac{b_s}{2\,m_s}$$

Or, in other words (quite familiar to electronic guys) we can say that **the gain-bandwidth product is constant.**

So, these slides verify **why a too small damping coefficient b_s in the sense mode (too large Q_s) is not suitable** (see discussion at slide n. 5), as it would determine **high sensitivity but a too low bandwidth**:

- e.g. if we assume the same Q factor as for the drive mode (slide 6), we get a bandwidth which is not compatible with almost any applications:

$$\Delta f_{BW} = \frac{f_0}{2\,Q} = \frac{20000\ Hz}{2 \cdot 8000} = 1.25\ Hz$$

Nei giroscopi mode matched tutte e 2 le sensitività sono in funzione della Banda e quindi del coefficiente di damping. Questo significa che entrambe dipendono dalla temperatura. (CRITICO)

RUMORE NEI GIROSCOPI

Let us now calculate the **thermomechanical noise** for a gyroscope.

We have **two decoupled modes**, so we should consider the thermo-mechanical **noise** contribution **from each of them**.

Drive mode:

- Brownian noise **in terms of force on the drive frame**: $S_{Fn} = 4\,k_B T\,b_D \quad [N^2/Hz]$
- this noise is **transferred into a drive displacement noise** through the drive mode transfer function. **In turns**, it becomes a "**sensitivity noise**". Assuming for sake of simplicity that this contribution is constant over the drive mode peak width $\Delta f_{BW,D}$, we obtain: $S_{Xn} = 4\,k_B T\,b_D \cdot \left(\frac{Q_D}{k_D}\right)^2 \quad [m^2/Hz]$

$$\sqrt{S_{Xn}\cdot\Delta f_{BW,D}} = \sqrt{4k_BT\,b_D\left(\frac{Q_D}{k_D}\right)^2\frac{f_0}{2\,Q_D}} = \sqrt{4k_BTb_D\frac{Q_D}{k_D^2}\frac{\omega_0}{4\,\pi}} = \sqrt{k_BT\frac{k_D}{\omega_0 Q_D}\frac{Q_D}{k_D^2}\frac{\omega_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{k_BT}{\pi}\frac{1}{k_D}} \quad [m_{rms}]$$

- **numerical example** for typical k_D = 50 N/m → 5 pm → negligible effect on the sensitivity (about 1 ppm variation around 5 µm → **negligible!**).

Calcoliamo il rumore del driving mode. ricavato il solito rumore per vedere se è trascurabile vediamo che variazione di displacement porta questo rumore in confronto al tipico displacement del driving.

Vediamo che questo rumore è trascurabile

Vediamo se questo è vero anche per la Sense Mode:

Facciamo gli stessi conti di prima

Vediamo che il risultato non è trascurabile perciò calcoliamo adesso NERD.

$$NERD = \sqrt{S_{\Omega n}}$$

noi sappiamo che

$$\frac{y_s}{\Omega} = \frac{x_d}{\Delta\omega_{BW}} \longrightarrow S_{\Omega n} = S_{yn}\left(\frac{\Delta\omega_{BW}}{x_d}\right)^2$$

The second contribution is related to the **sense mode**. We do the same calculation

$$S_{Fn} = 4\,k_B T\,b_S \quad [N^2/Hz]$$

$$S_{Yn} = 4\,k_B T\,b_S \cdot \left(\frac{Q_S}{k_S}\right)^2 \quad [m^2/Hz]$$

$$\sqrt{S_{Yn}\cdot\Delta f_{BW}} = \sqrt{4k_BT\,b_S\left(\frac{Q_S}{k_S}\right)^2\frac{f_0}{2\,Q_S}} = \sqrt{4k_BT\frac{\omega_0 m_S}{Q_S}\left(\frac{Q_S}{k_S}\right)^2\frac{f_0}{2\,Q_S}} = \sqrt{4k_BT\frac{\omega_0 m_S}{k_S^2}\frac{\omega_0}{4\,\pi}} = \sqrt{\frac{k_BT}{\pi}\frac{1}{k_S}} \quad [m_{rms}]$$

As the sense frame is usually smaller (lower mass, consider only m_S) than the driven frames, **its stiffness is usually a bit smaller too**, to get the same resonance:

- numerical example for typical k_s = 30 N/m → 7 pm (not negligible for typical sense mode displacements)
- → we can calculate the **equivalent angular rate noise using the sensitivity**:

$$y_S = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}}\Omega \;\rightarrow\; \Omega = \frac{y_S}{x_{D,0}}\Delta\omega_{BW} \;\rightarrow\; \sqrt{S_{\Omega n}} = \sqrt{S_{Yn}}\frac{\Delta\omega_{BW}}{x_{D,0}}$$

Perciò possiamo scrivere la NERD come

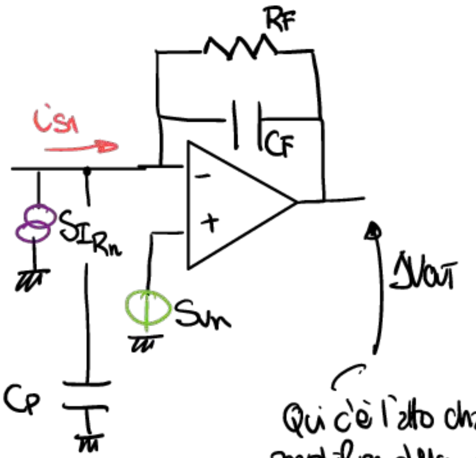
$$NERD = \frac{\sqrt{4 K_B T b_s \left(\frac{Q_S}{K_S}\right)^2}}{(x_d/\Delta\omega_{BW})} = \frac{\sqrt{4 K_B T b_s \cdot \frac{Q_S^2}{K_S^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{4 Q_S^2}}}{x_d}$$

ricordiamo che $\omega_0^2 = K_S/m_S$ perciò

$$= \frac{\sqrt{K_B \cdot T b_s \cdot \frac{1}{\omega_0^4 m_S} \cdot \omega_0^2}}{x_d} = \frac{\sqrt{K_B T b_s}}{x_d \cdot m_S \cdot \omega_0} = NERD \left[\frac{rad/s}{\sqrt{Hz}}\right]$$

Come possiamo migliorare la NERD? Sappiamo che $x_d \cdot \omega_0$ è circa la velocità lungo la drive direction perciò la v_x. La massa m_S è la forza di coriolis. Ha senso, maggiore è la forza di coriolis minore è l'effetto dello stesso rumore sul totale.

Rumore dell'elettronica



Qui c'è l'alto charge amplifier della componente differenziale

ho 2 gain perché sono differenziale

1ª componente

$$\frac{\sqrt{2 \cdot \frac{4 K_B T}{R_F}\left(\frac{1}{\omega_0 C_F}\right)^2}}{\Delta V_{out}/\Omega} = \sqrt{S_{\Omega n,R_F}}$$

2ª componente

$$\sqrt{2 S_{vn}\left(1 + \frac{C_P}{C_F}\right)^2} = \sqrt{S_{\Omega n,C_P}}$$

Combiniamo assieme tutti i contributi del rumore

Combining all noise contributions we conclude that to improve the gyro noise performance:

$$\sqrt{S_{\Omega n,tot}} = \frac{180}{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4k_bT}{2R_F}}\frac{g}{C_S V_{DC}\,\omega_0}\frac{\Delta\omega_{BW}}{x_{D,0}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_{n,op}}{2}}\left(1+\frac{C_P}{C_{FS}}\right)\frac{C_{FS}}{C_S}\frac{g}{V_{DC}}\frac{\Delta\omega_{BW}}{x_{D,0}}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_{D,0}\,m_S\,\omega_0}\sqrt{k_BT\,b_S}\right)^2} =$$

$$\approx \frac{180}{\pi}\frac{1}{x_{D,0}}\sqrt{\left(\sqrt{2\cdot\frac{4k_bT}{R_F}}\frac{g\,\Delta\omega_{BW}}{2C_S V_{DC}\,\omega_0}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_{n,op}}{2}}\frac{C_P\,g\,\Delta\omega_{BW}}{C_S\,V_{DC}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 m_S}\sqrt{k_BT\,b_S}\right)^2}$$

- it is undoubtedly **useful to increase x_D** (and, if possible, ω_0);
- if the electronics noise dominates (quite common situation):
  - try **increasing the feedback resistance** value (use off-MOS in integrated implementations);
  - try to **lower the parasitic capacitance** (smart routing of interconnections and pads etc…);
  - use the **minimum gap value** (this will however increase b_s → trade-off);
  - **increase V_{DC}** as much as you can (not for free: you pay in dissipation).
- if the thermomechanical noise dominates:
  - **increase m_S** (not for free: either thicken your process – very good option – or pay in area);
  - **decrease b_S** (not for free: you lose your maximum sensing bandwidth).

NOTE: PP of the sense mode are in principle subject to pull-in issue. However, gyros frequency (and thus stiffness) is usually much higher than in axels, therefore pull-in issues are generally unlikely to occur.

Vediamo che in tutte le componenti se aumentiamo il drive displacement il rumore diminuisce (ottimo). Potremo poi anche aumentare ω_0. Altre cose che possiamo fare per ridurre il rumore.

Giroscopio 4

In questa classe articoliamo la tecnica del mode matching perchè abbiamo variazioni di temperatura e process spreads. Per questo introduciamo la mode-split operation.
Come abbiamo già visto nelle lezioni precedenti nel caso del risuonatore il loop di controllo serve a fare sì che le variazioni date dal process spread e dal quality factor non modifichino la forza applicata Felec, ma questo non è abbastanza (Ci sono altri problemi).

Problemi della tecnica di Mode matching

A **first issue** in mode-matched operation is the relatively **limited bandwidth**, and its **relationship** with the **damping coefficient**, and thus with the thermo-mechanical **noise**:

$$\Delta f_{BW} = \frac{f_s}{2\,Q_S} = \frac{b_s}{4\,\pi\,m_S}$$

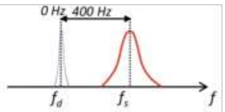
$$NERD = \frac{1}{x_d\,\omega_d\,m_S}\sqrt{k_b\,T\,b_s}$$

to improve the NERD, the bandwidth is worsened and vice-versa.

There is thus **a marked trade-off** between best **achievable noise density** (assuming electronic noise negligible) and **maximum sensing bandwidth**. This trade-off passes through the damping coefficient.

il primo è un trade off tra banda e NERD, i quali dipendono da bs.
Noi vogliamo NERD bassa (è il rumore che avremo con elettronica ideale) ma vorremo anche banda larga.

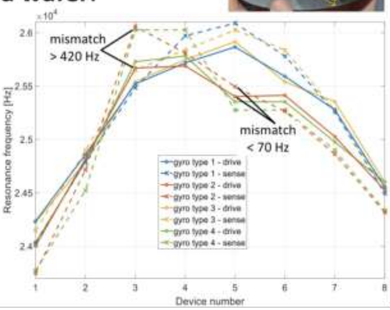
There is an **assumption** in the discussion so far that the two frequencies are **perfectly matched**.



In practice, even with very good design and process, the **frequencies will not be matched**! E.g. due to process spread, typical f_s values can range within $f_d \pm 600$ Hz ($\pm 3\sigma$), **around a frequency of 20 kHz.**

Example of **modes distribution on a wafer**:

- nonuniformity is mostly due to local **differences in DRIE of springs** (cubic spring dependence on **w**).
- **nonuniformities affects similarly the two modes of the same gyro**, as their **springs lie close one another.**
- however, a residual **(f_s-f_d) difference** still remains, varying between **few 10s Hz to few 100s Hz.**



il secondo problema che abbiamo è la difficoltà di fare il matching tra le 2 frequenze. Già idealmente è difficilissimo qui inoltre abbiamo anche i process spreads.

Come abbiamo visto nei risuonatori possiamo fare sì che all'inizio le 2 frequenze siano separate e poi andiamo a tunarle alla giusta frequenza.
Dobbiamo considerare in questo caso che K dipende dalla temperatura perchè il Young's modulus E nella realtà dipende dalla temperatura.
Tipicamente E varia di $-60ppm/K$, vediamo se è una variazione rilevante.
K va diretto con E perciò anche K varia di $-60ppm/K$ e poi vediamo che la frequenza varia come il cosidetto coefficient of frequency $TCf = -30ppm/K$.
è questo un problema?

Supponiamo $f_{Drive} = 20K$ e $f_{sense} = 20.6KHz$, il range di temp è $-40/125°$ perciò variazioni di 170K ($\pm 85K$), ci viene che

$$df_{Drive} = -30\frac{ppm}{K}\cdot f_D \cdot (\pm \Delta T) = \pm 51\,Hz$$

mentre la sense frequency farà

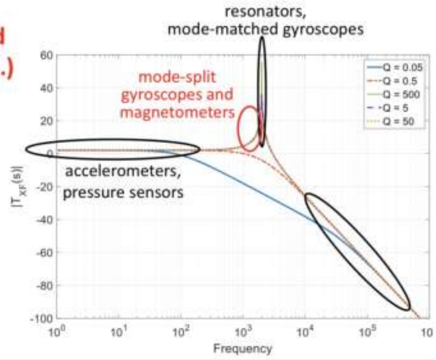
$$df_{sense} = -30\frac{ppm}{K}\cdot f_S (\pm \Delta T) = \pm 52{,}53 Hz$$

Quindi anche se facciamo un match delle 2 frequenze a temperatura ambiente notiamo che appena la temperatura varia tutto va a puttane perchè K varia e non dipende dalla frequenza matchata elettronicamente ma dal valore base della frequenza

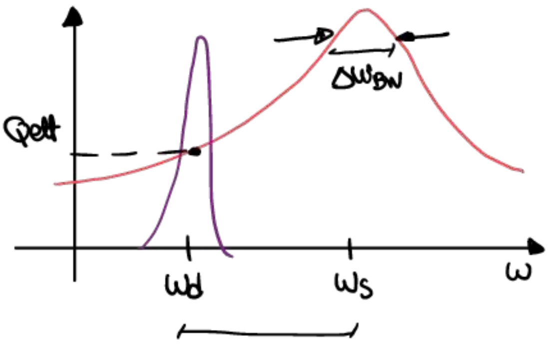
Mode-split operation

MEMS devices operate in several regions of the transfer function:

- accelerometers typically measure forces occurring far before resonance; they usually have relatively low Q factors (typically < 10, or even < 1);
- mode-matched gyros measure a Coriolis force occurring around resonance and require high quality factors (typically few thousand to ten thousand);
- **in an alternative topology, gyros and other sensors (e.g. magnetometers…) can operate measuring a force that occurs slightly before the resonance frequency** (so called **off-resonance or mode-split operation**);
- no device operates beyond the resonance frequency.



Cosa succede se usiamo il dispositivo in una zona vicino alla freq di risonanza ma non alla frequenza di risonanza
vediamo dal grafico che abbiamo un po' di amplificazione rispetto alla componente continua.
Calcoliamo quanto è questa amplificazione



$\Delta\omega_{MS} = \Delta\omega_{ds} = \omega_s - \omega_d$

Supponiamo che $\Delta\omega_{ds} \ll \omega_s$

e che $\Delta\omega_{ds} \gg \Delta\omega_{BWs}$

Allora scriviamo la sensing mode transfer function

$$\frac{y_s}{F_{cor}}(s) = \frac{1}{m_s} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_s \cdot s}{Q_s} + \omega_s^2}$$

e la calcoliamo alla frequenza della drive mode

$$\left|\frac{y_s}{F_{cor}}(j\omega_d)\right| = \frac{1}{m_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_d^2)^2 + \left(\frac{\omega_s \cdot \omega_d}{Q_s}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{m_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_s^2 - \omega_s^2 - \Delta\omega_{ds}^2 + 2\Delta\omega_{ds}\omega_s)^2 + \left(\frac{\omega_s^2}{Q_s} - \frac{\omega_s \Delta\omega_{ds}}{Q_s}\right)^2}}$$

Sappiamo che $\Delta\omega_{ds} \ll \omega_s$ & $\Delta\omega_{ds} \gg \Delta\omega_{BWs}$

$$= \frac{1}{m_s} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\Delta\omega_{ds} \cdot \omega_s)^2 + \omega_s^4/Q_s^2}}$$

$$= \frac{1/m_s}{2\omega_s\sqrt{\Delta\omega_{ds}^2 + \frac{\omega_s^2}{4Q_s^2}}} = \frac{1/m_s}{2\omega_s\sqrt{\Delta\omega_{ds}^2 + \underline{\Delta\omega_{BW}^2}}}$$

Trascurabile

$$= \frac{1}{m_s} \cdot \frac{1}{2\omega_s \cdot \Delta\omega_{ds}}$$

ricordando $\omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{m_s}} \rightarrow m_s = \frac{K_s}{\omega_s^2}$ allora

$$= \frac{\omega_s^2}{K_s} \cdot \frac{1}{2\,\omega_s \cdot \Delta\omega_s}$$

Perciò

Ampiezza che abbiamo in DC

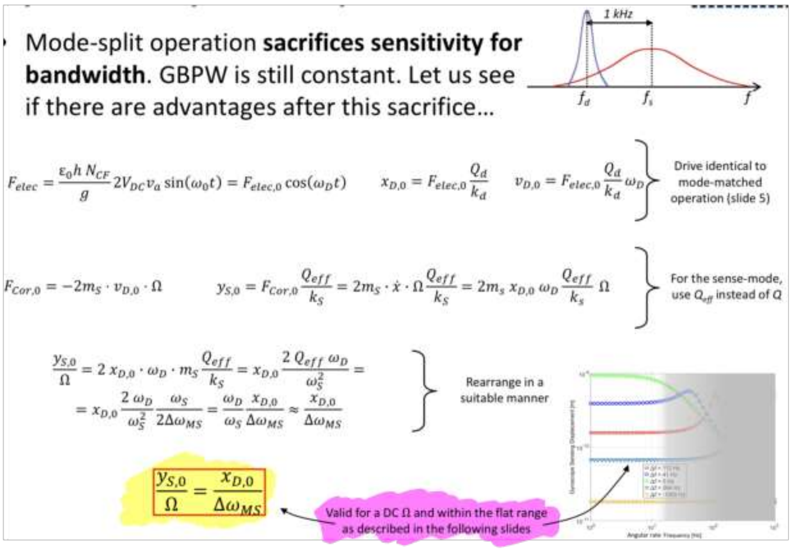
$$\left| \frac{Y_s}{F_{cor}}(j\omega_d) \right| = \frac{1}{K_s} \cdot \frac{\omega_s}{2\Delta\omega_s}$$

Ampiezza che abbiamo oltre la DC, questo lo chiamiamo Q eff.

$$= \frac{Q_{eff}}{K_s}$$

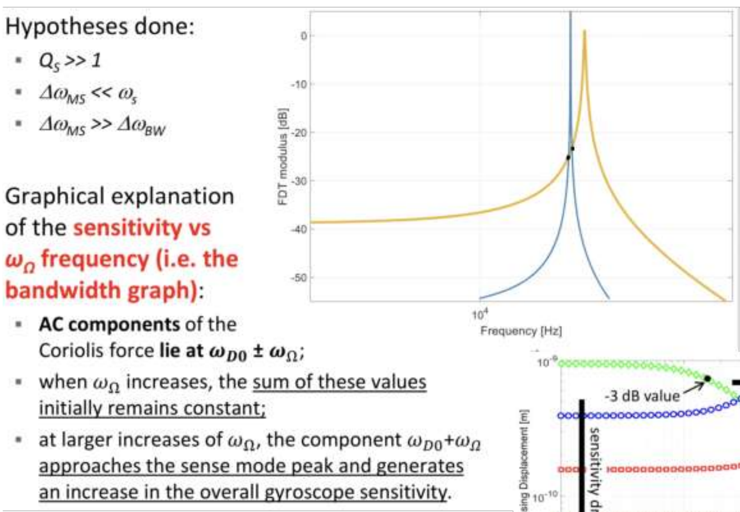
Notiamo che Q_{eff} non dipende da Q e quindi non ho tutti i legami del fattore di qualità della sense mode che dipende dalla temperatura.

Sensitività nella condizione di mode split.

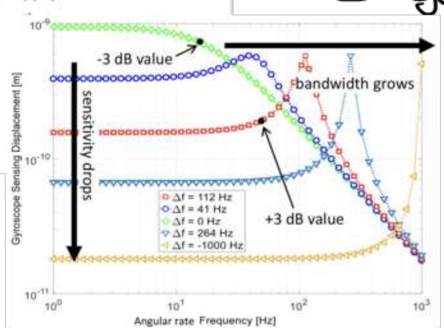


Come vediamo $\Delta\omega_{MS}$ non è esattamente la banda nella condizione di mode split ma è molto vicina ad esserlo.

Possiamo dire che nel caso mode split noi sacrifichiamo la sensibilità per avere banda.



Noto che quando aumento ω_Ω la curva blu si sposta più ad alta freq rispetto alla gialla. Noto poi che più vado in alta frequenza più l'amplificazione (da un lato dell'intersezione tra curva blu e gialla) è maggiore rispetto all'altro. Questo fa sì che ci sia un aumento di guadagno.



Vediamo che più riduciamo la sensitivity maggiore è la parte piatta (banda)

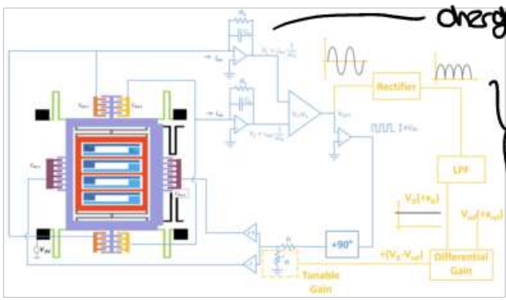
Tipicamente possiamo raggiungere $> \frac{1}{2}\Delta\omega_{MS}$.

PROBLEM

We are asked to design a tuning-fork MEMS gyroscope. The sensor parameters, for half the structure, are given in Table 1. The drive mode is actuated in a push-pull configuration through the set of comb electrodes $C_{da,1}$ and $C_{da,2}$, with square waves (see Fig. 1). Drive detection stators ($C_{dd,1}$ and $C_{dd,2}$) are kept to the oscillator front-end virtual ground; the rotor bias is $V_{DC} = 10$ V. The gyroscope is sketched in Fig. 2.

1. Determine the AGC reference V_{ref} to target a drive amplitude of 7 μm.
2. Evaluate the in-phase and anti-phase drive resonant modes, explaining which frames and springs they involve. Determine the sense stiffness to operate in matched mode.
3. Paying attention to the drive configuration, choose the number of actuation comb-fingers to have a nominal 0.5-V peak-to-peak square-wave actuation voltage.
4. Evaluate the electromechanical sensitivity of the gyroscope in fF/dps.

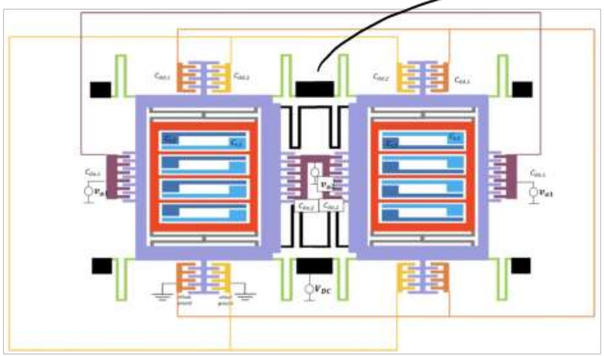
General		
ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m	Dielectric constant in vacuum
E	150 GPa	PolySi Young's modulus
h	24 μm	Process thickness
m_e	2 nkg	External frame mass
m_i	2.22 nkg	Inner frame mass
g	2 μm	Comb and parallel plate gap
Drive		
b_d	$0.5 \cdot 10^{-7}$ N/(m/s)	Drive damping coefficient
$N_{CF,dd}$	30	Number of drive-detection comb fingers
L_{fd}	180 μm	Drive fold length
w_{fd}	3 μm	Drive fold width
n_{sd}	4	Number of drive springs
n_{fd}	2	Number folds for each drive spring
L_{ftf}	155 μm	Tuning fork fold length
w_{ftf}	3.1 μm	Tuning fork fold width
n_{stf}	2	Number of tuning fork springs
n_{ftf}	2	Number of folds for each tuning fork spring
Sense		
b_s	$1 \cdot 10^{-7}$ N/(m/s)	Sense damping coefficient
n_{PP}	4	Number of differential parallel-plate electrodes
L_{PP}	250 μm	Parallel plate length
Electronics		
C_F	500 fF	Feedback capacitance



charge amplifier

AGC

è l'equivalente della terra per le molle.



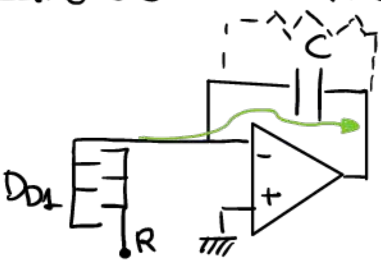
(Giroscopio completo, con 2 paia di combfinger messo in moto e poi con altri 2 paia di combfinger leggo il displacement).

Punto a) All'AGC noi imponiamo una tensione di riferimento per tenere fisso il tutto. Adesso dobbiamo calcolare tutto per vedere che la drive motion è 7μm.

$X_d = 7\mu m$ $\qquad \dot{X}_d = X_d \cdot \omega_0$

non lo scriviamo ma è sinusoidale

Studiamo uno dei 2 rivelatori



$i_{DD1} = \eta_{DD1} \cdot \dot{X}_d$

$$V_1 = \frac{i_{DD1}}{\omega_0 C_F} = \frac{\eta_{DD1} \cdot X_d \cdot \omega_d}{\omega_d \cdot C_F} = \eta_{DD1} \cdot \frac{X_d}{C_F}$$

Allora $V_2 = -V_1$ (è la tensione all'altro rivelatore differenziale)

Perciò quando faccio la sottrazione ho che $\Delta V = V_1 - (-V_1) = 2V_1$

Sappiamo che dopo la differenza poi si fa una rettificazione e si fa un LPF.

Noi sappiamo che la prima armonica ho componente $2/\pi$ perciò la tensione in uscita del LPF è

$$V_{out_{LPF}} = \frac{2}{\pi} \cdot 2V_1 = V_{ref}$$

Perciò la nostra $V_{ref} = 2\eta_{DD1} \cdot \frac{X_d}{C_F} \cdot \frac{2}{\pi} = \underset{\text{diff sensing}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot h\, N_{CF,D0}}{g} \cdot V_{rot} \cdot \frac{X_d}{C_F} \cdot \frac{2}{\pi}$

Ma questo scritto qui non basta!! Noi abbiamo 2 giroscopi uniti assieme e anche i pin di sensing sono uniti perciò dobbiamo moltiplicare il tutto per 2 (nella nostra tabella sono dati i dati per solo uno dei 2 giroscopi)

$$V_{ref_{TOT}} = 2 \cdot \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF,D0} \cdot 2}{g} \cdot \frac{X_d}{C_F} \cdot \frac{2}{\pi} =$$

Punto 2 : Frequenza di risonanza della in-phase e anti-phase.

Chiaramente la topologia è fatta per funzionare in antifase con le 2 masse dinamiche che si allontanano. Sia le molle verdi che quelle nere sono soggette a compressione e rilassamento.
Tuttavia è possibile che esista una modalità in fase in cui le 2 masse si muovono in sincro. In questo caso solo le molle verdi sono soggette a compressione e rilassamento mentre le nere no.

• Frequenza in fase

Faccio i conti con solo metà della struttura tanto poi 2 sopra e sotto e si semplifica

$$f_{inp} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{ip}}{m_{ip}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4/2\, Eh\left(\frac{w_d}{l_d}\right)^3}{m_e + m_i}}$$

Questa è la K di tutte e 4 le molle verdi

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{33{,}3\ N/m}{4{,}22\ mK}} = 14{,}14\ KHz$$

dobbiamo controllare che questa frequenza sia distante abbastanza dell'anti-phase frequence.

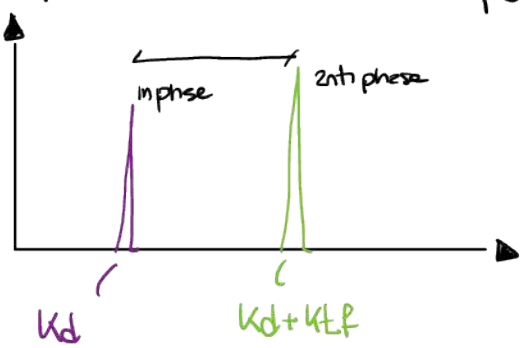
$$f_{ap} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{ap}}{m_{ap}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{33{,}3 N/m + \frac{2Eh}{2}\left(\frac{W_L}{L_m}\right)^3}{4{,}22\ mKg}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{33{,}3 N/m + 28{,}8 N/m}{4{,}22\ mKg}}$$

$$= 19{,}31\ KHz$$

studiamo sempre e solo metà struttura. In questo caso ho anche le 2 molle nere.

Questo è abbastanza distante dell'altra quindi OK.

ho perciò una cosa del tipo



• Se $K_{tf} << K_d$ ho che le 2 frequenze sono molto vicine e si disturbano

• Se $K_{tf} >> K_d$ la in phase frequency si sposta in giù, il che andrebbe anche bene ma noi sappiamo che il giroscopio deve gestire delle accelerazioni nella in phase direction, ma noi sappiamo che $a \div 1/\omega_{cp}^2$ ma se f è bassa allora abbiamo molto

displacement che a noi non va bene.
Abbiamo quindi un trade off tipicamente $K_d \simeq K_{tf}$

- Sense stiffness

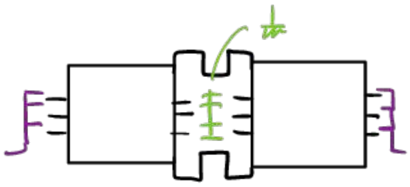
$\omega_s = \omega_d \rightarrow f_s = f_D$

$$= \sqrt{\frac{K_s}{m_i}} \rightarrow K_s = (2\pi f_d)^2 \cdot m_i = 32{,}7\ N \cdot m$$

(è maggiore di quella degli accelerometri, perciò problemi di pull-in dato dalla forza elettrostatica sono trascurabili)

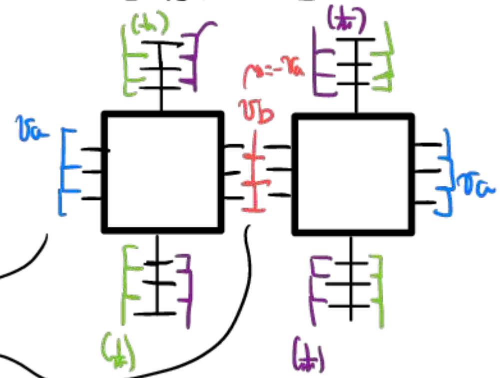
- **Punto 3**

Single ended actuation and detection scheme



che è diverso da quello che viene usato in questo circuito

- Push pull actuation & differential drive detection



Utilizzo questi 2 per fare il displacement

$$F_{elec} = \frac{(V_{rot} - v_B)^2}{2}\frac{\partial C_{DA}}{\partial x} - \frac{(V_{ROT} - v_a)^2}{2}\frac{\partial C_{DA}}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial C_{DA}}{\partial x}\left[(V_{rot} + v_a)^2 - (V_{ROT} - v_a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial C_{DA}}{\partial x}\left[V_{ROT}^2 + v_a^2 + 2V_{ROT}v_a - V_{ROT}^2 - v_a^2 + 2V_{ROT}v_a\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial C_{DA}}{\partial x} \cdot 4V_{ROT} \cdot v_a = \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF,DA} \cdot 2V_{ROT} \cdot v_a}{g}$$

Perciò

$F_{elec} = \eta_{DA} \cdot v_a$

Abbiamo circa lo stesso risultato, ma allora perchè per usare questo abbiamo un vantaggio?

Siamo arrivati a questo risultato senza approssimazioni a piccolo segnale tra le tensioni di rotore ecc.
Abbiamo

1) Un fattore 2 $(2V_{rot} \cdot v_a)$
2) No contributi DC
3) No high order terms
4) No small signal approx.

Allora

$$X_d = 2 F_{elec} \cdot \frac{Q_D}{K_{op}} \qquad Q_D = \frac{\omega_d (m_c + m_i)}{b_d} = 10240$$

X è ci sono 2 giroscopi uniti

$\simeq 62\ N/m$

Perciò $\eta_{um} = 2\eta_{DA} \cdot v_a \cdot \frac{Q_D}{K_{ap}}$

Noi sappiamo che v_a è un onda quadra e noi sappiamo che la prima armonica è

$$\eta_{um} = 2 \cdot \frac{2\varepsilon_0 h N_{CF,DA}}{2} \cdot 2V_{ROT} \cdot \frac{\overset{0{,}25}{4} v_{rot}}{\pi}$$

$$v_{a1} = 4/\pi \cdot |v_a|$$

PUNTO 4

$$S = 2 \cdot \frac{C_0}{g} \cdot \frac{V_{DD}}{C_F} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \quad [V/m/s^2]$$

$$S_{electromech} = 2\frac{C_0}{g} \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \quad [fF/m/s^2]$$

Era questo per gli Accelerometri

Per i giroscopi invece ho

$$\begin{cases} S = 2\frac{C_{S0}}{g} \cdot \frac{V_{rot}}{C_{FS}} \cdot \frac{X_d}{\Delta\omega_{BW}} & [V/rad/s] \\ S_{electromech} = 2\frac{C_{S0}}{g} \frac{X_d}{\Delta\omega_{BW}} & [fF/rad/s] \end{cases}$$

Perciò

$$S_{elec} = \underset{\text{x è differenziale}}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 h L_{PP} \cdot N_{PP} \cdot 2}{g} \cdot \frac{\eta_{um}}{b_s/2m_s} =$$

$$\Delta\omega_{BW} = b_s/2m_s = 25 \text{ rad/s}$$

$$(\Delta f_{BW} = \Delta\omega_{BW}/2\pi = 3\text{Hz})$$

Perciò $S_{elec} = 66 \frac{fF}{rad/s} = 66 \cdot \frac{\pi}{180} \frac{fF}{dps} = 1{,}15 \frac{fF}{dps}$

28·10·2021 Esercizio 2h

PROBLEM

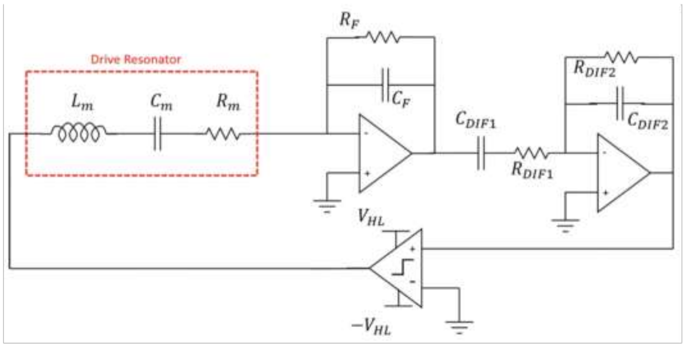
We have to design the electronics needed to sustain the drive oscillation of a MEMS gyroscope. The system should guarantee a maximum sensitivity variation of ±1.5% within the automotive temperature range (−45°C to +125°C). The drive resonator is actuated and detected in single-ended mode.

The drive loop, shown in Fig. 1, is formed by a TCA-based front-end, a differentiator, and a hard-limiter with a dedicated supply. The complete drive oscillator with both primary loop and AGC is shown in Fig. 2. The differential INA gain is given as $G_{INA} = 1 + \frac{49.4\,k\Omega}{R_{INA}}$. The variable-gain concept is implemented by means of acting on the supply voltage of the hard-limiter. Other electromechanical parameters are listed in Table 1.

1. Size the parameters of the primary loop (Fig. 1), in order to obtain the target displacement amplitude, x_{a0}, at the reference temperature (300 K).
2. Considering the primary loop only (Fig. 1), calculate the maximum percentage variation of the drive amplitude, and evaluate the required compensation factor.
3. Size the parameters of the secondary (AGC) loop of the drive-mode oscillator (Fig. 2), considering the requirement on the maximum sensitivity variation.
4. Size the low-pass filter of the control loop.

Mechanical		
	Symbol	Value
Drive resonance frequency	f_{rd}	20 000 Hz
Drive Q-factor @ 300 K	Q_{d0}	8000
Internal mass	m_i	1.5 nKg
External mass	m_e	2.5 nKg
Process thickness	h	24 μm
Gap	g	1.8 μm
Number of drive comb fingers	N_{CF}	40
Target drive displacement amplitude	x_{a0}	5 μm
Electronics		
Rotor bias voltage	V_{DC}	5 V
Supply voltage	V_{DD}	±5 V
Amplifier voltage output swing	V_O	±4 V
Minimum capacitance	C_{min}	0.2 pF
Secondary (AGC) loop		
Rectifier gain	G_{REC}	1
LPF gain	G_{LPF}	1
LPF resistance	R_{LPF}	3 MΩ

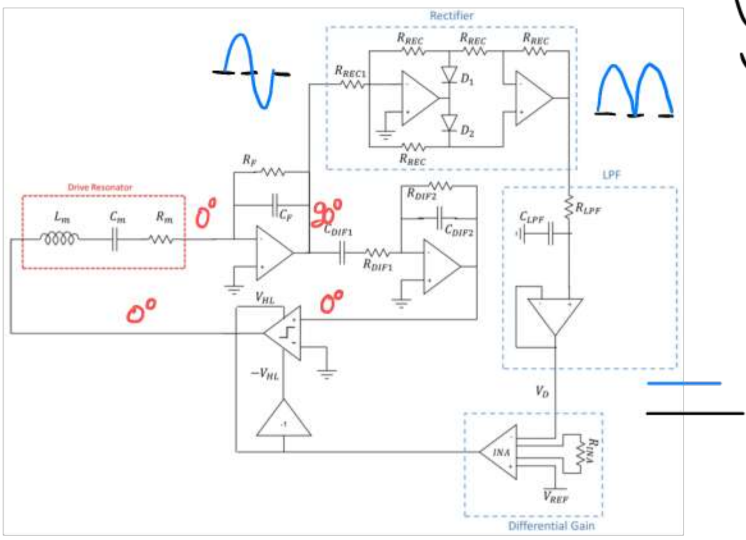
Table 1: Parameters of the gyroscope.



← Primary loop

Domanda 1

Con questa configurazione sappiamo che dobbiamo avere uno piccolo.
Posso fare in modo che con l'AGC io veda a variare i valori V_{HL} e $-V_{HL}$ del comparatore.



V_{REF} è la tensione che mettiamo noi come valore standard.

Vediamo se il loop principale soddisfa Barkausen. Lo è:

La domanda 1 dice di dimensionare il drive loop. Iniziamo dall'hard limiter. Dove dobbiamo settare solo le tensioni di alimentazione

$$X_d = F_{elec}\frac{Q_d}{K_d} = \eta_{DA}\cdot V_A\frac{Q_D}{K_d} = \eta_{DA}\cdot V_{HL}\cdot\frac{4}{\pi}\frac{Q_d}{K_d}$$

Prima armonica di va

$$V_{HL} = X_d\cdot\frac{K_d}{Q_d}\cdot\frac{\pi}{4}\;\frac{g}{2\varepsilon_0 h N_{CFDA}\underbrace{V_{ROT}}_{=40}}$$

dove $K_d = (m_e+m_i)(2\pi f_D)^2 = 63\ N/m$

Perciò $V_{HL} = 0{,}66\ V$ perciò questa deve essere la tensione dell'Hard Limiter a 300K.

- **DIMENSIONAMENTO DEL TCA**: Voglio uscire con la tensione + alta possibile senza saturare.

Perciò noi vorremo $V_{OUT,TCA} = \pm 4V$.

La corrente in uscita è

$$i_m = X_d\,\omega_d\,\eta_{DD}$$

Perciò la tensione in uscita al TCA è:

$$V_{OUT,TCA} = \frac{x_d \, \omega_D \, \eta_{DD}}{\omega_d \, C_F} = \frac{x_d \cdot \eta_{DD}}{C_F}$$

$$\text{Perciò } C_F = \frac{S_{\mu m} \cdot \frac{2 \varepsilon_0 R N_{CF,DD}}{g} V_{rot}}{4} = 59 fF$$

Ma se vediamo sulla tavola c'è scritto che la minima capacità che possiamo fare è 200fF.
Perciò noi scegliamo la minima capacità possibile così almeno ho la massima tensione possibile. (non più 4V)

$$C_F = 200 fF \qquad V_{OUT} = 4 \cdot \frac{59}{200} = 1{,}18 V$$

e che valore di R_F mettiamo?
Tipicamente mettiamo il polo 2 decadi distante dalla nostra f_{eq} di interesse. Noi lavoriamo come charge amplifier quindi il polo deve essere prima della f_{eq}.

$$f_P = \frac{f_D}{100} = 200 Hz \rightarrow R_F = \frac{1}{2\pi \, 200 \cdot C_F} = 4 GHz$$

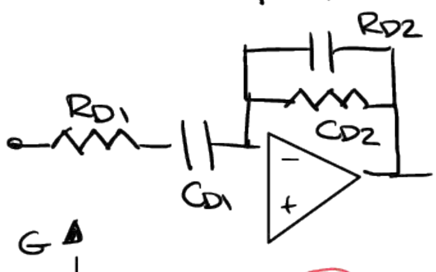
- DERIVATORE

Ora equazioni usiamo per dimensionare il derivatore.
I poli li mettiamo 2 decadi dopo la f_{eq} di risonanza. Lo zero lo mettiamo almeno a 2 decadi prima (ma con questa configurazione il gain è in ∅).
Devo poi settare il guadagno del coso

$$G_{DIFF} = \frac{4V}{1{,}18V} = 3{,}38 \leftarrow \text{così riporto il segnale a } 4V$$

$$f_{P1} = 100 f_D = 2MHz = \frac{1}{2\pi C_{D1} R_{D1}}$$

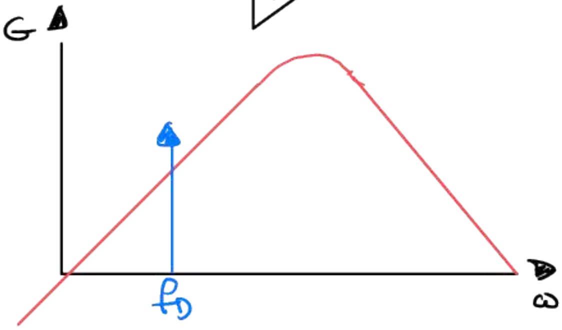
$$f_{P2} = 2MHz = \frac{1}{2\pi C_{D2} R_{D2}}$$



Abbiamo uno zero a f_{eq} ∅.

il guadagno è

$$G_{DIFF} = \omega_D C_{D1} R_{D2}$$



Questo perché gli altri componenti sono aperti (C_{D2})

Abbiamo 3 equazioni e 4 incognite.

Noi scegliamo $C_{D2} = 200pF$ che è la capacità minima, da questo ricavo R_{D2}.

$$R_{D2} = \frac{1}{2\pi f_D C_{D2}} = 398K\Omega$$

Tramite il guadagno e R_{D2} ricavo $C_{D1} = \frac{338}{2\pi f_d \cdot R_{D2}} = 67{,}8pF$

perciò $R_{D1} = \frac{1}{2\pi f_d C_{D1}} = 1{,}1K\Omega$

DOMANDA 2

$$S = 2\,\frac{C_{S0}}{g} \cdot \frac{V_{rot}}{C_{FS}} \cdot \frac{x_d}{\Delta\omega_{BW}}$$

Perciò

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta x_d}{\Delta\omega_{BW}} = \frac{\Delta Q_d}{Q_d} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

Abbiamo fatto un unione tra le variazioni di temperatura e quelle di displacement

$$\Delta T = 125°C - (-45°C) = 170°C = 170K \text{ (perchè è una diff di temp)}$$

Perciò $$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta x_d}{x_d} = -\frac{1}{2}\,\frac{170K}{300K} = \pm 14\%$$

Il nostro obiettivo target è

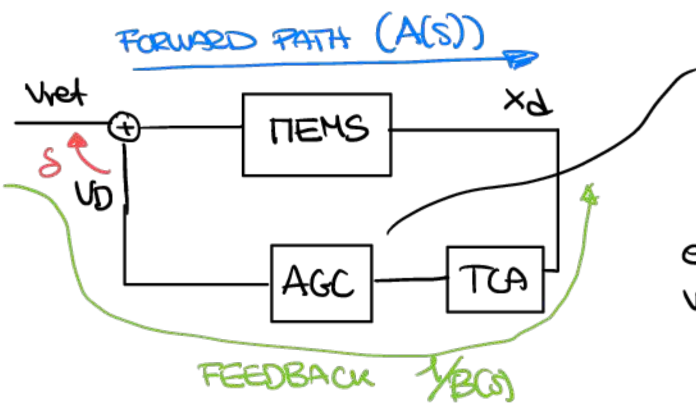
$$\left.\frac{\Delta S}{S}\right|_{target} = \pm 1{,}5\%$$

Compensation factor

$$Comp_{,AGC} = \frac{\pm 14\%}{\pm 1{,}5\%} \simeq 10$$

DOMANDA 3

Perciò vedo che $Comp_{,AGD} = 10$ sarà il minimo valore del G_{loop} dell'AGC. Questo ci servirà per compensare le componenti del AGC.



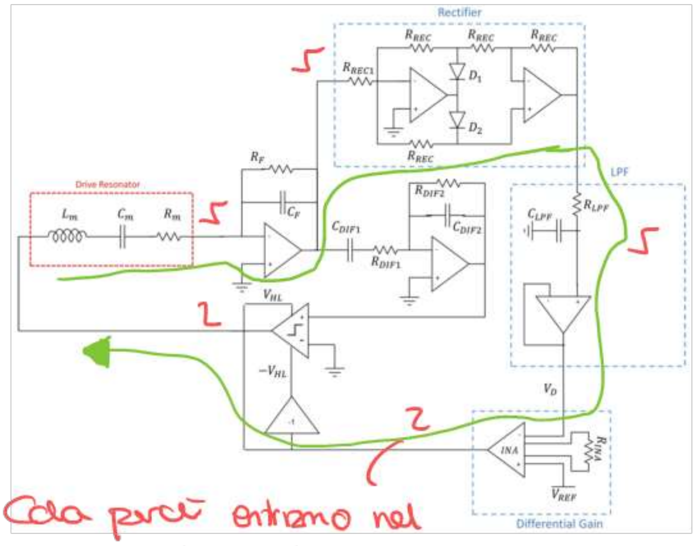
Se il loop gain dell'AGC è ∞ allora $V_D = V_{ref}$ e quindi $X_d = X_{ref}$.

Se il loop gain è finito ho un errore residuo che approssivamente vale $\frac{V_{ref}}{G_{loop}}$

$$\left.\frac{\Delta S}{S}\right|_{loop\ aperto} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}$$

$$\left.\frac{\Delta S}{S}\right|_{loop\ chiuso} - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{1}{1-G_{loop}}$$

Posso poi dire che il loop gain in DC sia $G_{loop}(0) = 20$ (suppongo)



Percorso del loop gain dell'ADC

Cala perché entriamo nel pin meno dell'INA.

Calcoliamo il guadagno in continua.

$G_{RECTIFIER} = 1$

$G_{LPF} = 2/\pi$

$G_{INA} = X \leftarrow$ non so quando sia il guadagno

HARD LIMITER $= 4/\pi$

MEMS $= \dfrac{1}{R_{eq}}$

CHARGE AMPLI $= \dfrac{1}{\omega_d C_F}$

Perciò la moltiplicazione di questi guadagni mi da il guadagno in DC. Noi sappiamo che la variazione della temperatura è molto lenta perciò possiamo considerare il G_{loop} in continua.

$$G_{loop,0} = \frac{2}{\pi} G_{INA} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{R_{eq}\, \omega_d C_F} = 20 \leftarrow \text{imposto da noi}$$

Sappiamo che $R_{eq} = \dfrac{b_D}{\eta^2} = \dfrac{\omega_D(m_e + m_i)}{Q_D \cdot \eta^2} = \dfrac{2\pi 20K (4n\,Kg)}{8000 \cdot \left(\frac{2\varepsilon_0 h N_{CF}}{g} \cdot V_{ROT}\right)^2} = 28{,}2\,M\Omega$

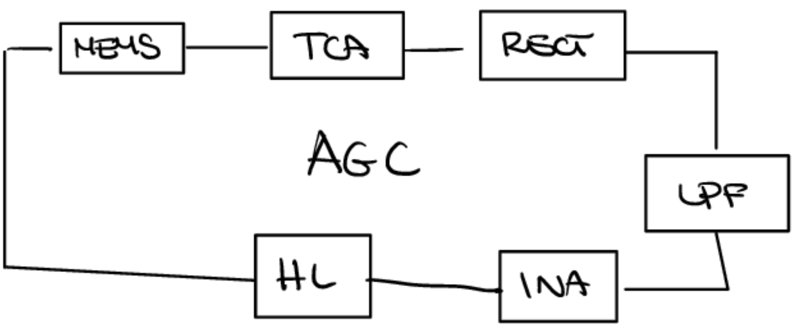
Allora possiamo ricavare G_{INA}

$$G_{INA} = \frac{20 \cdot 28{,}2\,M\Omega \cdot (2\pi \cdot 20KHz) \cdot 200pF}{8/\pi^2} = 17{,}5$$

Noi sappiamo anche che

$$G_{INA} = 1 + \frac{49{,}4\,K\Omega}{R_{INA}} \rightarrow R_{INA} = \frac{49{,}4\,K\Omega}{16{,}5} = 3\,K\Omega.$$

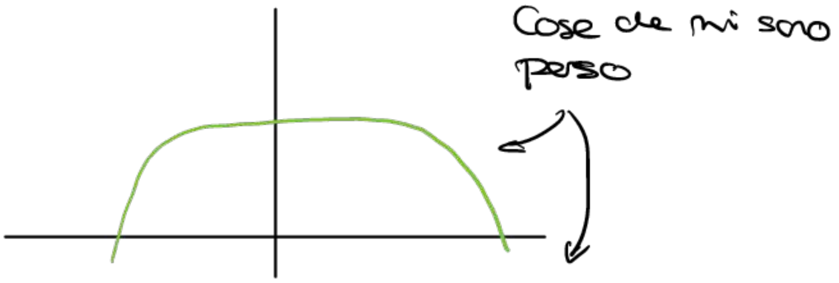
DOMANDA 4



$\dfrac{1}{1 + sC_{LPF}R_{LPF}}$

l'AGC modifica solo la l'ampiezza e non la frequenza del segnale

Ma se varia il fattore di qualità cosa succede? TCA e RECTIFIER non hanno nessun cambiamento. Il filtro passabasso al contrario ha effetto sull'ampiezza se il fattore di qualità varia in modo sinusoidale. Gli altri non fanno niente tranne il MEMS, questo infatti fa sì che

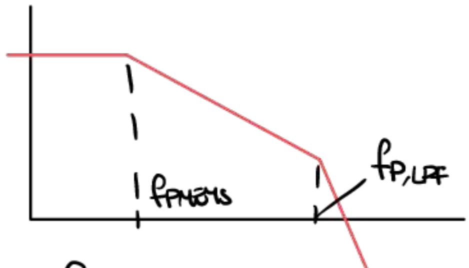


$$\frac{1}{1+s/\omega_d/2Q_d}$$

Allora avrò che il Gloop sarà:

$$G_{loop,AGC}(s) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+sR_{LPF}C_{LPF}}\cdot G_{INA}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1/R_{eq}}{1+s/\omega_d/2Q_d}\cdot\frac{1}{\omega_d C_F}$$

Perciò il Gloop ha questa forma



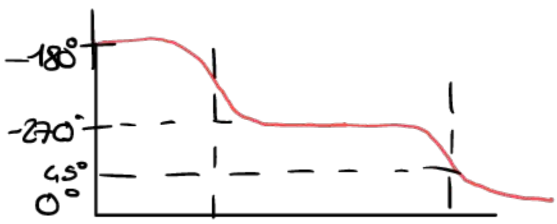
Devo stare attento che il 2° polo vada dopo il GBWP.

il polo del MEMS è: $f_{p,MEMS} = \frac{f_D}{2Q_D} = 1{,}25$ Hz

La frequenza del 2° polo che è settata dal low pass filter è:

$$f_{p,LPF} = 25\ \text{Hz}$$

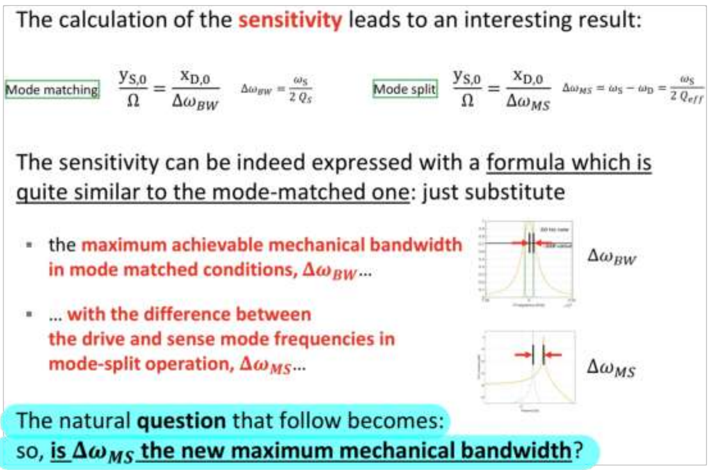
La fase sarà



Allora noi non possiamo aumentare troppo Gloop

Giroscopio 5 — 29.10.2021

Riassuntino mode-matching e mode splitting



The calculation of the **sensitivity** leads to an interesting result:

Mode matching $\frac{y_{S,0}}{\Omega} = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}}$ $\Delta\omega_{BW} = \frac{\omega_S}{2Q_S}$

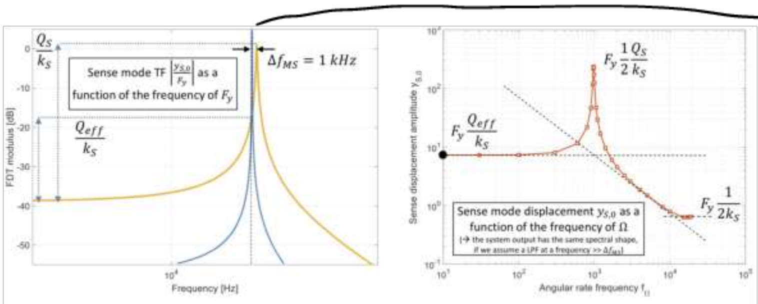
Mode split $\frac{y_{S,0}}{\Omega} = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{MS}}$ $\Delta\omega_{MS} = \omega_S - \omega_D = \frac{\omega_S}{2Q_{eff}}$

The sensitivity can be indeed expressed with a formula which is quite similar to the mode-matched one: just substitute

- the **maximum achievable mechanical bandwidth in mode matched conditions, $\Delta\omega_{BW}$**... $\Delta\omega_{BW}$
- ... **with the difference between the drive and sense mode frequencies in mode-split operation, $\Delta\omega_{MS}$**... $\Delta\omega_{MS}$

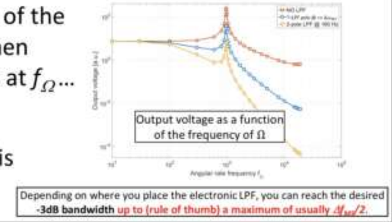
The natural **question** that follow becomes:
so, **is $\Delta\omega_{MS}$ the new maximum mechanical bandwidth**?

ma quindi $\Delta\omega_{MS}$ è la nuova banda massima meccanica?



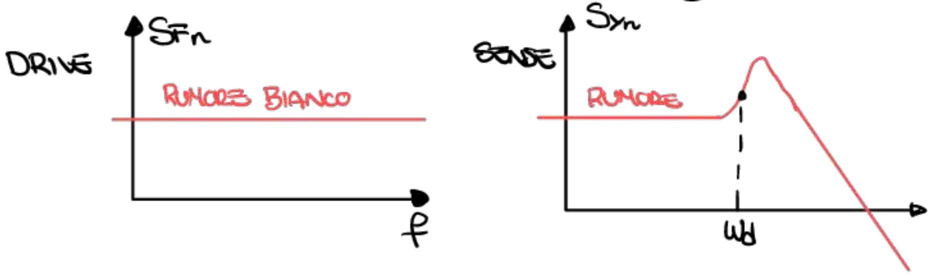
Abbiamo che la curva blu parte da lì facendo un frequency splitting vediamo che abbiamo un picco nella curva finale perché la curva che va a destra vede il picco mentre quella a sinistra no quindi la differenza tra le 2 non è uguale

- We thus analyzed the response of the device (sense displacement) when **operated under AC rate signals** at f_Ω…
  - Coriolis forces at $f_D \pm f_\Omega$
- … and when the overall output is corrected by an electronic LPF.



Mode split gyroscope noise

- Il rumore termico nella direzione di drive è sempre $S_{F,n} = 4k_BTb$ $[N^2/Hz]$
- Nella direzione di sensing invece la faccenda cambia perché cambia la funzione di trasferimento. Noi sappiamo che il rumore $S_{F,n}$ è bianco, perciò il rumore nella direzione di sensing avrà la stessa shape della FDT



Noi non lavoriamo più sul picco ma a ω_d, vediamo che possiamo dire che il rumore viene amplificato da Q_{eff}.

Calcoliamo il rumore termodinamico riferito all'input:

- actually, no surprise: **Brownian noise is *motion* noise, and it is amplified as much as *motion* induced by Coriolis force**; (→ same S/N → same S/N = 1 → same input referred resolution)
- this time **the amplification is by Q_{eff} instead of Q_S**, but – apart from this – all the expressions remain identical. **NERD equation does not change**!

MODE-MATCHED

$$\sqrt{S_{\Omega n}} = \sqrt{\frac{S_{Yn}}{\left(\frac{y_S}{\Omega}\right)^2}} = \sqrt{\frac{4k_BTb_S\left(\frac{Q_S}{k_S}\right)^2}{\left(\frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{BW}}\right)^2}}$$

$$\Delta\omega_{BW} = \frac{\omega_S}{2Q_S}$$

MODE-SPLIT

$$\sqrt{S_{\Omega n}} = \sqrt{\frac{S_{Yn}}{\left(\frac{y_S}{\Omega}\right)^2}} = \sqrt{\frac{4k_BTb_S\left(\frac{Q_{eff}}{k_S}\right)^2}{\left(\frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{MS}}\right)^2}}$$

$$\Delta\omega_{MS} = \frac{\omega_S}{2Q_{eff}}$$

$$\boxed{NERD = \frac{180}{\pi}\frac{1}{x_{D,0}\, m_S\, \omega_S}\sqrt{k_BT\,b_S}}$$

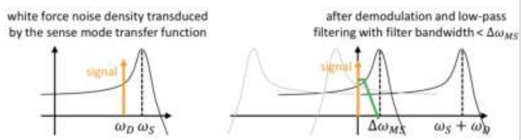
NOTE: the calculation is valid around the drive frequency, assuming a good filtering of the sense mode peak…

Usiamo lo stesso approccio e vediamo che i risultati sono identici perché i Quality factor vanno a cancellarsi.
Perciò la NERD è uguale.

(Questo si ha perché benché noi stiamo amplificando meno abbiamo che il rumore browniano e la forza di Coriolis sono comunque amplificati dello stesso valore perciò la NERD è uguale)

Actually, **white thermomechanical noise spectral density is amplified by the entire sense-mode transfer function** (also at other frequencies). However, as later we will **demodulate around the drive mode frequency and low-pass filter**, we will effectively get relevant noise only from the region around the drive frequency:

- the example aside refers to the case of mode-split operation.



Per quanto riguarda la banda

ho una figata! in pratica la banda in mode splitting operation non dipende dal damping, quindi posso abbassare b quanto voglio (e quindi la NERD) senza impattare sulla banda.

One further, important remark: **the effective quality factor Q_{eff} is not a function of the damping coefficient.**

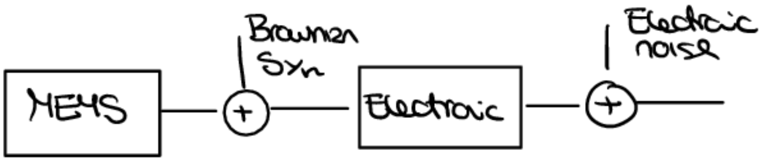
Therefore, **the bandwidth (assumed as ¼ to ½ of the mode split Δf_{MS}) is itself not related to the value of the damping coefficient!**

$$\Delta\omega_{MS} = \omega_S - \omega_D = \frac{\omega_S}{2Q_{eff}} \qquad \Delta f_{MS} = f_S - f_D = \frac{f_S}{2Q_{eff}}$$

It is thus **possible to lower the thermomechanical noise (the NERD) by acting on b_s, without affecting the bandwidth**. The **trade-off** that we had in mode-matched operation **is thus solved**. We no longer necessarily need to keep a low value of the sense mode Q.

$$NERD = \frac{180}{\pi}\frac{1}{x_{D,0}\, m_S\, \omega_S}\sqrt{k_B T\, b_S}$$

E per quanto riguarda il rumore dell'elettronica?

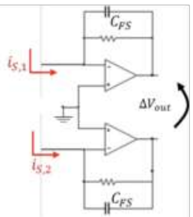


L'impatto dell'elettronica è sempre quello ma il rumore browniano è diminuito rispetto a prima.

Abbiamo dunque che la componente elettronica ha maggiore peso rispetto a prima e quindi devo fare elettronica a basso rumore.

The other **noise contributions**, from the **electronics**, are the **same** when calculated **at the circuit output**, but when calculated as **equivalent input rate**, they are now **divided by a sensitivity which is lower** by a factor $\Delta\omega_{BW}/\Delta\omega_{MS}$:

- the **impact of electronic noise on the system grows**
  - one should design **low-noise electronics**
    - low-noise electronics requires **high power dissipation**
      - or good electronic designers!



$$\sqrt{S_{\Omega n,tot}} = \frac{180}{\pi}\frac{1}{x_{D,0}}\sqrt{\left(\sqrt{2\cdot\frac{4k_bT}{R_F}}\frac{g\,\Delta\omega_{MS}}{2C_S V_{DC}\omega_D}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{S_{n,op}}{2}}\frac{C_P}{C_S}\frac{g\,\Delta\omega_{MS}}{V_{DC}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_S\, m_S}\sqrt{k_B T\, b_S}\right)^2}$$

In Mode matching noi sappiamo che Q varia con la Temp e quindi ho delle variazioni anche di f, questo fa sì che ci siano delle inaccettabili variazioni di sensitività.

Cosa succede in Mode splitting?

Operate at a mismatch frequency

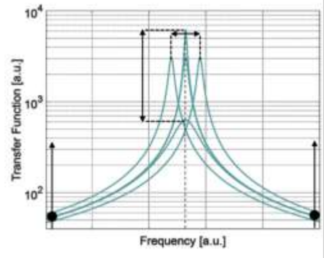
- usually $\omega_D < \omega_S$

Pros

- **sensitivity is very well independent of the Q value**
- **sensitivity is tolerant to Δf vs T**
  - **see next slide**
- **no bandwidth-resolution trade-off**

Cons / Issues

- gain reduction (e.g. 20-50 instead of 100-1000)
- consequent **need of high-performance electronics**



Actually, the same situation would be obtained with $\omega_D > \omega_S$. Indeed the peak is symmetric around ω_S for typical $\Delta\omega_{MS}$.

Notiamo che la sensitività è abbastanza indipendente dal valore di Q

Facciamo adesso i conti per vedere la variazione di f e vedere se queste variano lo scale factor

- Let us assume a **mode-split of ~1 kHz** (f_D = 19 kHz, f_S = 20 kHz).

$$\frac{y_{S,0}}{\Omega} = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{MS}} \rightarrow \frac{d\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)}{\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)} = -\frac{d(\Delta\omega_{MS})}{\Delta\omega_{MS}}$$

- In this configuration the **effects of temperature changes (e.g. ±85 K)** can be quantified in the following way:

$$\frac{d(\Delta\omega_{MS})/dT}{\Delta\omega_{MS}} = \frac{d(\omega_S-\omega_D)/dT}{\omega_{S,0}-\omega_{D,0}} = \frac{d\left(\omega_{S,0}(1+\alpha\Delta T)-\omega_{D,0}(1+\alpha\Delta T)\right)/dT}{\omega_{S,0}-\omega_{D,0}} = \frac{(\omega_{S,0}-\omega_{D,0})\,d\left(1+\alpha(T-T_0)\right)/dT}{\omega_{S,0}-\omega_{D,0}} = \alpha$$

- Numerical example
  - The **worst case % sensitivity change** is easily found as…:

$$\left|\frac{d\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)}{\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)}\right| = \alpha\Delta T = -30\frac{ppm}{K}(\pm 85\,K) = \pm 0.0025 = \pm 0.25\%$$

→ well within the 1.5% limit set by the application specifications!

  - … or through the maximum shift of the two frequencies:

$$df_d = -30\frac{ppm}{K}\cdot f_d \cdot \pm\Delta T = \pm 48.5\,Hz$$

$$df_S = -30\frac{ppm}{K}\cdot f_S \cdot \pm\Delta T = \pm 51\,Hz$$

$$\frac{d(\Delta\omega_{MS})}{\Delta\omega_{MS}} = \frac{1\,kHz - (1\,kHz \pm 2.5\,Hz)}{1\,kHz} = \frac{\pm 2.5\,Hz}{1\,kHz} = \pm 0.25\% = \left|\frac{d\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)}{\left(\frac{y_{S,0}}{\Omega}\right)}\right|$$

- To be compared with ~ ±5% in mode-matched operation
  - → factor 20x improvement!

Giroscopio 6

In questa lezione introdurremo le non idealità dei giroscopi

- Quadrature error (errore di tipo meccanico)

Let us start with a **numerical example**:

- assume a mode-split gyroscope for consumer applications (e.g. gaming):
- typical required full-scale is of about **2000 °/s**
- typical required resolution is of about **100 mdps** (5 mdps/√Hz · √300 Hz)
- typical required bandwidth of 300 Hz **1 kHz** of mode split value

Assuming a **drive mode displacement x controlled at x_{REF} = 5 µm**, we have a **sense mode displacement y**:

$$\frac{y_{S,0}}{\Omega} = \frac{x_{D,0}}{\Delta\omega_{MS}}$$

- of about **30 nm at the 2000 °/s** (35 rad/s) full-scale range
- of about **1.5 pm at the 0.1 °/s** (1.7 mrad/s) resolution

ultra small displacement!! 2.6% of the Bohr radius in H atom in its ground state!!

Mmmm.... the drive mode is moving by 5 µm, i.e. about **3'300'000 times more** than the minimum sense mode motion to detect!!!

Calcoliamo il displacement che abbiamo con la minima risoluzione.

Ma sappiamo che la drive mode si muove di 5µm che è circa 3,3 milioni di volte di più che il minimo sensing displacement.

Abbiamo quindi una non idealità del giroscopio.

Ci possono essere delle componenti della drive mode che fanno sì che ci siano spostamenti anche nella sense direction.
Questo difetto è alla stessa frequenza del nostro segnale che vogliamo misurare e possiamo considerarlo come un errore costante (DC offset all'output)

What does it happen if **the drive motion, due to electromechanical nonidealities, is not orthogonal to the ideal sense-mode direction**?

top view: ideal in-plane drive motion only along the x-axis — *top view: in-plane motion not only along the x-axis*

The sense mode will see a **y-direction displacement at ω_D that is not caused by angular rates**. This error, which is in a first approximation a DC term independent of Ω, may represent **a huge offset**.

Its compensation and/or drift represent **a severe issue for gyros**.

Note: **this offset is in quadrature** with respect to the Coriolis force, **as it is proportional to x and not to $\dot{x}$**:

- we model it with an equivalent quadrature force ∝ x.

$$|F_q| \propto x \qquad |F_{Cor}| \propto \dot{x}$$

La cosa che ci salva è che questo segnale è proporzionale alla drive direction mentre la forza di coriolis è dipendente dalla velocità della drive force. Dato che questi 2 segnali sono sfasati di 90° chiamiamo questo errore errore di quadratura.

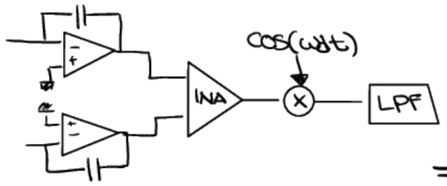
Le cause di questo errore di quadratura possono essere molteplici, tipo errori di produzione che fanno sì che una delle molle sia più dura ad esempio. Oppure una non omogeneità tra il gap dei comb fingers.

Definiamo adesso il modello dell'errore di quadratura

$$\Delta V_{OUT} = \underbrace{2\,\frac{V_{DC}}{C_{FS}}\cdot\frac{C_{S0}}{g}\cdot\frac{x_d}{\Delta\omega_{MS/MM}}}_{\text{sensitività}}\cdot\Big[\underbrace{\Omega\cdot\cos(\omega_d t)}_{\text{Componente che ci interessa}}+\underbrace{B_q\cdot\sin(\omega_d t)}_{\text{Componente disturbo in quadratura}}\Big]$$

Sappiamo che dopo i charge amplifier e poi l'INA, supponiamo che dopo l'INA ci sia la fase di demodulazione sincrona del segnale (demodulazione perfetta), vediamo cosa succede:

La tensione dopo la demodulazione sarà



$$V_{dem} = S\left[\Omega\cos(\omega_d t) + B_q\sin(\omega_d t)\right]\cdot\cos(\omega_d t) * LPF$$

$$= LPF * S\left\{\frac{1}{2}\Omega\left[\cos(0)+\cos(2\omega_d)\right] + \frac{1}{2}B_q\left[\sin(0)+\sin(2\omega_d t)\right]\right\}$$

Supponiamo gain LPF = 2 e che filtri perfettamente le componenti ad alta freq.

$$\overset{!}{=} S\left[\Omega\cos(0) + B_q\sin(0)\right] = S\cdot\Omega$$

Nella realtà però il segnale di demodulazione sarà soggetto a phase noise e phase offset, perciò $\cos(\omega_d t + \varphi_{err} + \varphi_n)$, allora

$$V_{dem} = S\cdot\left[\Omega\cos(\omega_d t) + B_q\sin(\omega_d t)\right]\cdot\cos(\omega_d t + \varphi_{err} + \varphi_n) * LPF$$

$$= LPF * S\cdot\left\{\frac{1}{2}\Omega\left[\cos(\varphi_{err}+\varphi_n) + \cos(2\omega_d t + \varphi_{err} + \varphi_n)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}B_q\left[\sin(\varphi_{err}+\varphi_n) + \sin(2\omega_d t + \varphi_{err}+\varphi_n)\right]\right\}$$

→ LPF elimina le componenti a alte freq e supponiamo il guadagno LPF = 2.

$$= S\left[\Omega\cdot\cos(\varphi_{err}+\varphi_n) + B_q\sin(\varphi_{err}+\varphi_n)\right]$$

Supponiamo che $\varphi_{err} \to \emptyset$ e $\varphi_n \to \emptyset$, al limite otteniamo che

$$V_{dem} = S\Omega + S\cdot B_q(\varphi_{err}+\varphi_n)$$

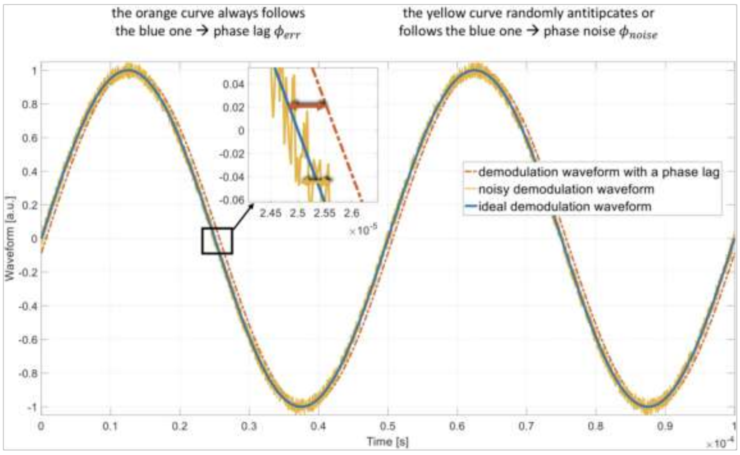
Vediamo che abbiamo una nuova definizione per l'output, la componente

$S B_q \varphi_{err}$ → OFFSET Z.R.O (perché è un errore che abbiamo anche se l'angular rate è $\emptyset$, Zero Rate offset)

$S B_q \varphi_n$ → RUMORE (dato dalla phase noise)

Una cosa cui porre attenzione!!
In uscita dagli opamp del charge amplifier e dall'INA abbiamo la somma di 2 segnali in quadratura e questo fa sì che dobbiamo stare attenti che questa somma non saturi gli opamp altrimenti non riesco a recuperare niente

Possiamo quantificare quanto è questo errore di quadratura?
Sì, ma vediamo prima di che errori di fase stiamo parlando.



Noi vogliamo sapere la forza nella direzione y dato un displacement nella direzione x. Queste 2 quantità saranno tra loro sempre legate dalla legge di Hook solo che in questo caso abbiamo una cross-axis stiffness.

$$|F_q| = K_{ds}\cdot x$$

Perciò possiamo scrivere lo spring mass damper system come

$$m_s\ddot{y} + b_s\dot{y} + K_s y - K_{ds}\cdot x = -2m_s\dot{x}\cdot\Omega$$

Passiamo in Laplace

$$m_s s^2 Y + b_s\cdot s\cdot Y + K_s\cdot Y = -2m_s X\cdot s\cdot\Omega + K_{ds}X = X(K_{ds} - 2m_s\cdot\underbrace{s}_{j\omega_d}\cdot\Omega)$$

Se voglio esprimere B_q dall' K_{ds} devo uguagliare K_{ds} a un valore che è

$$K_{ds} = \underline{2m_s\omega_d B_q} \quad \text{perciò} \quad B_q = \frac{K_{ds}}{2m_s\omega_d}$$

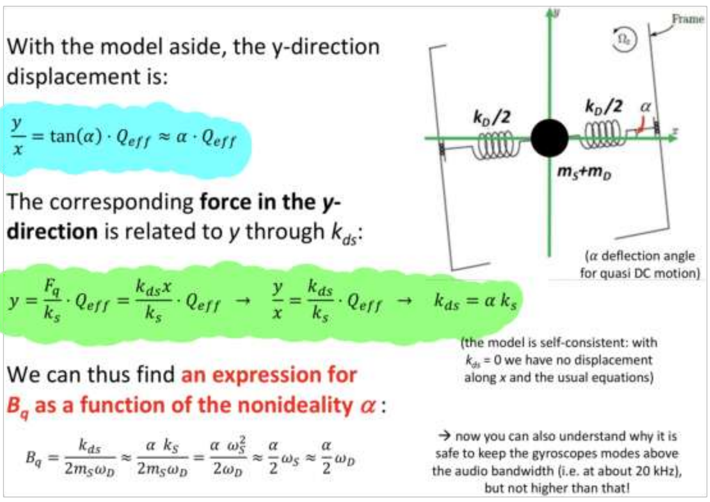
(da dove esce non lo so

Perciò

$$m_s s^2 Y + b_s s Y + K_s Y = X\cdot 2m_s\omega_d(B_q - j\Omega)$$

vediamo che sono in quadratura

Ma dato un imprecisione di processo noi non sappiamo K_{ds}

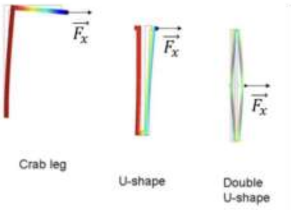


Supponiamo che questi errori di fabbricazione facciano deviare la drive mode di un angolo α

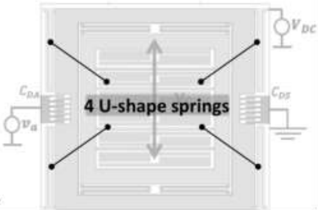
Tramite queste 2 formule possiamo uguagliarle e scrivere B_q in funzione della non idealità.

Vediamo che B_q dipende dalla freq di risonanza e quindi capiamo che la frequenza di risonanza che prendiamo è un trade off per evitare i disturbi (tipo vibrazioni voce) ma non un valore altissimo senò B_q è troppo grande.

One critical parameter for quadrature in gyroscopes is the **width of spring folds** (and its nonuniformities) as the total in-plane stiffness is proportional to the **cubic width**.



As
1. there are springs that ideally do not deflect in the y direction under x-direction forces (see the figure);
2. there are usually 4 symmetric springs per frame;



nonuniformities in springs width give rise to non-null k_{ds}, but with very low angle α (e.g. 10^{-3}° to 10^{-2}°).

Noi sappiamo che il giroscopio è sospeso da molle, si potrebbe avere che non diano una forza perfettamente nell'asse z.
Esistono tuttavia delle configurazioni chiamate a minima cross-axis stiffness.

Tipicamente durante la fabbricazione abbiamo che il wafer cambia molte volte la temp e può essere che il wafer si sia un poco inbarcato e supponiamo di fare un etching
Quando poi facciamo raffreddare il wafer questo si raddrizza e fa si che le molle fatte con l'etching non siano più esattamente parallele alla massa.
Questo angolo α lo chiamiamo skew angle (0,05°/0,1°)

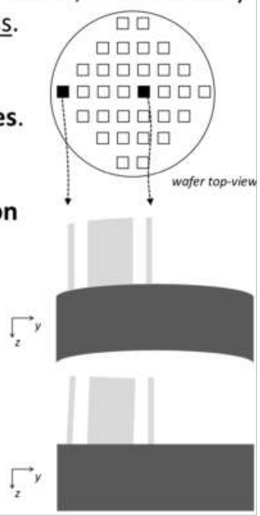
This effect occurs in **gyros for in-plane rate detection**, where usually the sense frame has a low out-of-plane stiffness.

Process nonuniformities make the **etching non orthogonal to the substrate at wafer edges.** This causes spring cross-sections as shown.

An attempt to bend the beam in the x-direction results in a force with a z-axis component. The corresponding quadrature formula is similar to Z-axis devices, yet **the value of α is typically much larger** (e.g. 0.05° to 0.1°)

$$B_q = \frac{k_{ds}}{2 m_S \omega_D} \approx \frac{\alpha}{2}\omega_S$$

Typical origin of α : wafer bending due to temperature stresses



This is the largest source of quadrature in MEMS gyroscopes.

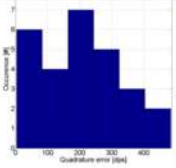
Esempi Numerici

- Z-axis device with f_S = 20 kHz, k_{ds} = 0.01% k_d

$$\alpha = 10^{-4}\ rad = 0.0057°$$

$$\sin(\alpha) \approx \alpha = 10^{-4}$$

$$B_q = \frac{k_{ds}}{2 m_S \omega_D} \approx \frac{\alpha}{2}\omega_S = 6.28\frac{rad}{s} = 360\ °/s$$



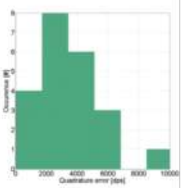
Z-axis devices (29 samples of different type):
- average: **204.9 dps** (7% of the 3000-dps FSR);
- standard deviation: 126.4 dps (worst case is 484 dps).

- Y-axis device with f_S = 20 kHz, α = 0.5°

$$\sin(\alpha) \approx \alpha = 9 \cdot 10^{-3}$$

$$B_q = \frac{\alpha}{2}\omega_S = 550\frac{rad}{s} = 31500\ °/s$$

overall, it is generally difficult to have x/y-axis devices (pitch/roll) as performing as z-axis (yaw) devices!



Y-axis devices (22 samples of different type):
- average: **3720 dps** (124% of the 3000-dps FSR);
- standard deviation: 2253 dps (worst case 5442 dps).
- quadrature for these devices is larger than for Z-axis devices: indeed the impact of skew-angle issues is larger.

Come possiamo ridurre l'effetto dell'errore di quadratura?

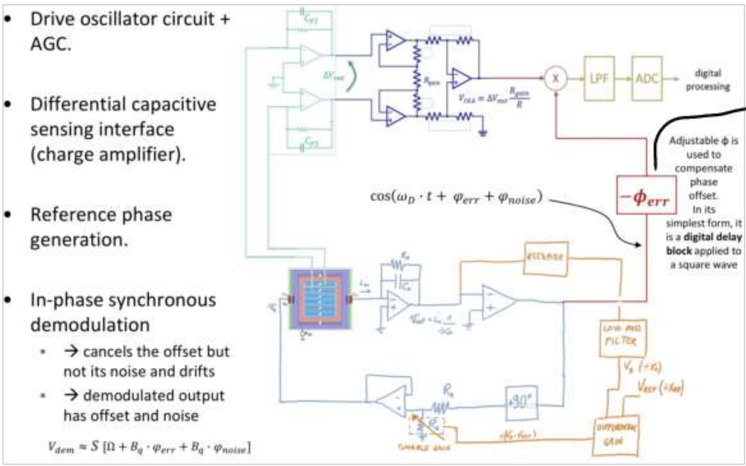
$$\boxed{B_q = \frac{k_{ds}}{2\, m_S\, \omega_D} = \frac{\alpha}{2}\omega_S}$$

- **Minimize k_{ds}** (→ α). This can be achieved by:
  - improving the **process uniformity** across the wafer;
  - increasing the **beam width** w (a larger w gives a lower relative weight of process nonuniformities dw, as already verified); } Take care that the frequency should not increase! Use folds!
  - choosing springs with the **lowest cross-axis term** (folded or double-U);
  - choose only **gyroscope from wafer center** (ok for high-end applications).

- **Decrease** the gyroscope **resonance**:
  - however, **this is limited by acoustic disturbances** (occurring at up to > 20 kHz) and presence of vibrations (up to 1 kHz in consumer, 10 kHz in automotive, 50 kHz in military applications). The frequency should be safely above!

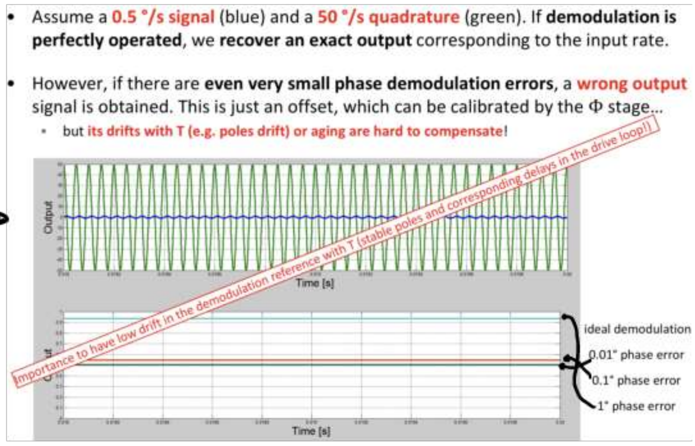
- **Increase** the inertial **mass** (at constant frequency):
  - however, this is limited by the maximum area (ok if the increase is **through h**).

• Compensazione elettronica della quadratura e effetti della cattiva compensazione.

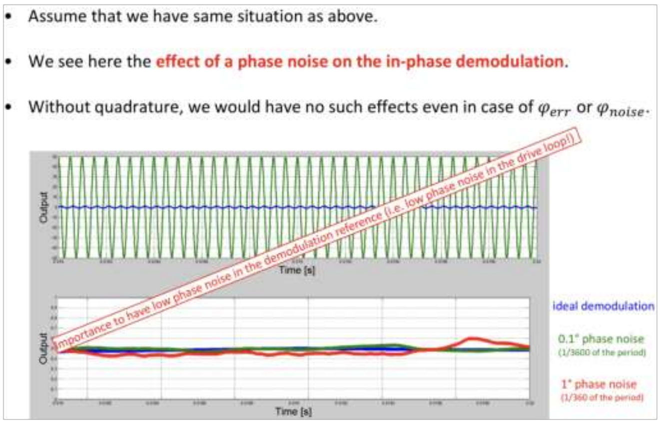


è tipo un delay così riesco a compensare l'offset di fase.

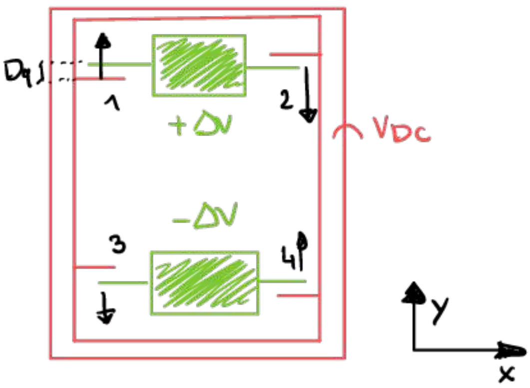
Effetti dei gradi: offset in demodulazione



Effetti della phase noise



Però ci arrabbiamo perchè abbiamo questa quadratura che ci rovina la sensitivity.
Esiste per caso un modo per eliminare a livello elettromeccanico l'effetto di questi errori?
In effetti c'è basta che io metta una forza proporzionale al displacement e che posso selezionare ampiezza e segno in modo che possa compensare l'offset.



Mettiamo 2 elettrodi e studiamo la forza elettrostatica

$$F_1 = \frac{\varepsilon_0 h (L_{ov} + x)}{2 D_q^2} (V_{DC} - \Delta V)^2$$

Perchè in questo caso si avvicina

$$F_2 = -\frac{\varepsilon_0 h (L_{ov} - x)}{2 D_q^2} (V_{DC} - \Delta V)^2$$

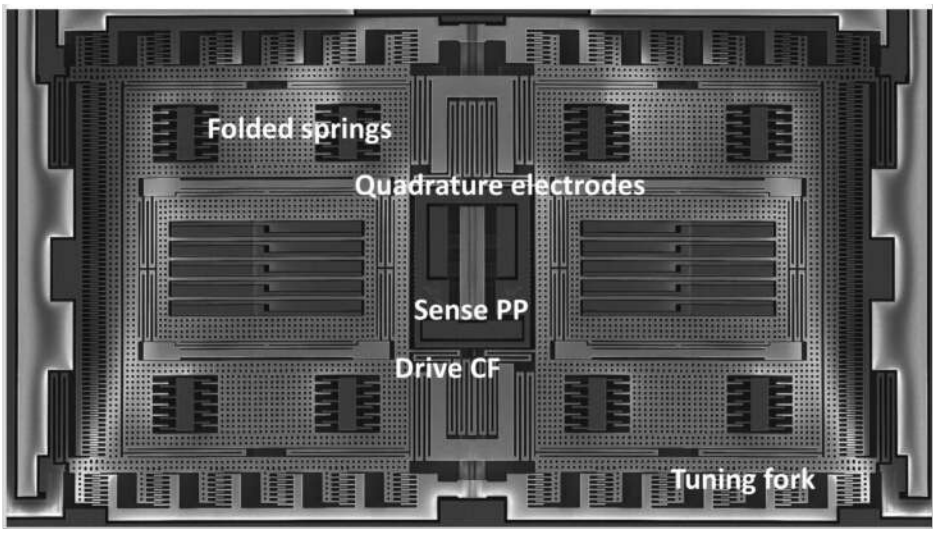
$$F_3 = -\frac{\varepsilon_0 h (L_{ov} + x)}{2 D_q^2} (V_{DC} + \Delta V)^2$$

$$F_4 = \frac{\varepsilon_0 h (L_{ov} - x)}{2 D_q^2} (V_{DC} + \Delta V)^2$$

La somma di queste forze è

$$F_{QC} = -4 \frac{\varepsilon_0 h}{D_q^2} V_{DC} \Delta V \cdot x \cdot N_{QC}$$

è una forza nella direzione y
Possiamo quindi compensare la forza di quadratura



9.11.2021 — **Magnetometro 1**

Tecnologia abbastanza nuova e in realtà ancora allo stadio di ricerca (MEMS)
Tipicamente i magnetometri sono usati nelle misure inerziali (navigazione) per capire in che direzione (rispetto a una prefissata) siamo girati. Altre applicazioni possono essere: Current sensing, Misurare il campo magnetico terrestre (bussola) oppure segnali magnetici Biologici.
Ci sono circa 3 categorie che si differenziano per la sensibilità.
Categoria 3: Alta sensitività < 1nT
Categoria 1: Bassa sensitività > 1mT

Il campo magnetico terrestre va da un valore minimo di <23µT a un massimo di >66µT. Vicino all'equatore il campo magnetico è circa parallelo alla terra, ai poli tende a essere quasi ortogonale.
Noi vogliamo sapere la direzione del campo, per farlo dobbiamo usare F=BIL e quindi ci servono un magnetometro 3 assi e un accelerometro.

The **target specifications for navigation** aims at satisfying the following requirements:

error in orientation < ½ degree	→	sub-µT resolution;
human gesture/movements (no gaming)	→	bandwidth < 50 Hz
Earth field + magnetic disturbances	→	FSR >> max Earth field
consumption in line with inertial sensors	→	current < 500 µA

Questo perché se ci sono delle anomalie noi possiamo rilevarle e compensarle.

- **Lorentz Force Magnetometer.**

- The law describing the **force on a charge moving in an electro-magnetic field** of vector components ***E*** and ***B*** respectively is known to be:

$$\vec F = q\,(\vec E + \vec v \times \vec B)$$

- where
  - the first component is related to the **electrostatic force** on a charge inside an electric field and it is e.g. responsible of current density $\vec J$ flowing through a material of conductivity σ (generalized Ohm's law):

$$\vec J = \sigma\,\vec E = q\,n\,\mu_n \vec E$$

  - the second component is known as **Lorentz force** and occurs in a direction orthogonal to the plane including the charged particle velocity and the magnetic field vector:

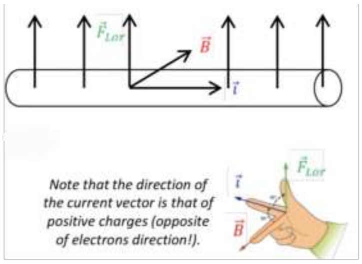
$$\vec F_{Lor} = q\,\vec v \times \vec B$$

Noi vogliamo misurare $\vec B$ perciò dovremo avere una struttura che mi permette di avere cariche in movimento.
Posso fare un filo dove passa corrente e noi misuriamo la forza di Lorentz.

$$F_{Lor} = \underbrace{N_{el}}_{\text{n elettroni}} \cdot q\,\underbrace{\vec v}_{\mu_n \cdot \vec E} \times \vec B$$

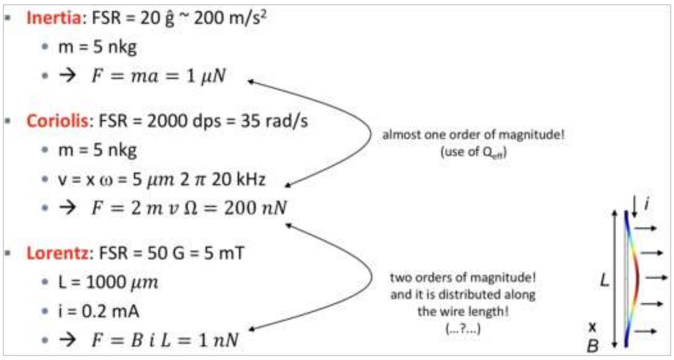
n elettroni $= \underbrace{n}_{\text{densità di elettroni}} \cdot \underbrace{A \cdot L}_{\text{volume}}$

Perciò noi otteniamo che $F_{Lor} = \vec{i} \cdot L \times \vec{B}$



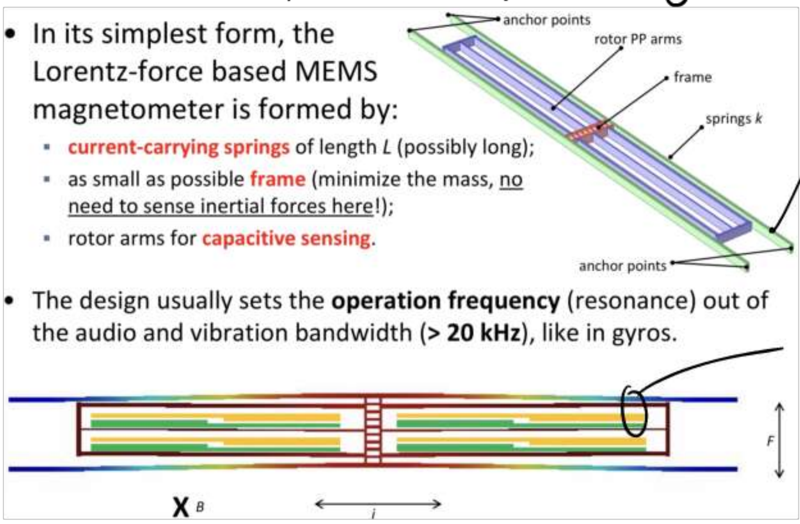
è un crossproduct quindi la direzione è ortogonale.

Capiamo quanto è questa forza paragonabile a quelle viste negli accelerometri/giroscopi:



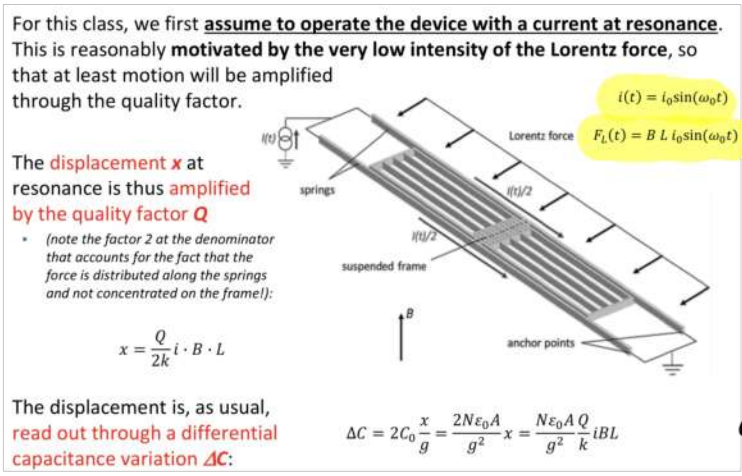
Vediamo che praticamente abbiamo un ordine di grandezza di differenza tra forze inerziali e di Lorentz.

La struttura più facile per il magnetometro è:



Qui facciamo scorrere una corrente

Avremo una differenza di Gap che si traduce in una diff di capacità.



Calcoliamo la sensitività.

Se lavoriamo alla freq di risonanza noi sappiamo che il displacement è

$$x = \frac{F \cdot Q}{K}$$

Noi abbiamo una situazione un attimo diversa perché la forza di Lorentz è distribuita su tutta la trave e non solo su un punto, dobbiamo quindi calcolare un nuovo K. Questo K_{eq} ci viene (no dimostrazione) $K_{eq} = 2K_{originale}$

Quindi $x = \frac{FQ}{2K_0} = \frac{BiL}{2K_0} Q$

Noi sappiamo anche che $\Delta C = 2\frac{C_0}{g} \cdot x = 2\frac{C_0}{g} \cdot \frac{BiL}{2K} \cdot Q$

Noi sappiamo che la forza di Lorentz è piccola e quindi ci verrebbe da mettere molti plates paralleli

$$\frac{\Delta C}{B} = \frac{\cancel{2}\cdot \varepsilon_0 A\cdot N}{g^2}\cdot\frac{iLQ}{\cancel{2}K} = \frac{\varepsilon_0 AN}{g^2}\cdot\frac{iL\cancel{K}}{\omega_0 b\cdot\cancel{K}}$$

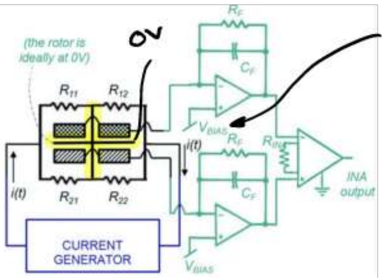
$$= \frac{\varepsilon_0 AN}{g^2}\cdot\frac{iL}{\omega_0 \underbrace{b_{area}}_{b \text{ perchè c'è il layer d'aria}}\cdot 2\cdot N\cdot A}$$

Notiamo che sono indipendente da Area e da N.
Questo succede anche nei giroscopi mode matched.

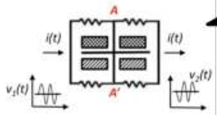
$$\boxed{\frac{\Delta C}{B} = \frac{\varepsilon_0 i L}{2 g^2 b_{area}\,\omega_0}}$$

Come facciamo a misurare questo con la nostra elettronica?
Dobbiamo considerare che la corrente sul rotore è dato della caduta di tensione sul rotore stesso perchè passa una corrente.

- The **readout circuit is similar to the sensing of gyros**. However note that here the **frame cannot be arbitrarily biased**, as its voltage is determined by the current flowing in the springs.



- If we model each spring as a pair of identical resistances, and if we inject a current through a differential voltage, **we can reasonably assume that the voltage on the springs central points (AA') is always constant and null**.



Mettiamo Vbias e non ØV così abbiamo una ddp tra rotore e statore.
Idealmente noi vogliamo che il rotore sia a ØV

Per fare ciò noi vorremo che le tensioni ai capi della struttura siano uguali e opposte così la tensione del rotore è ØV.

$$i_{C_F,i} = V_{BIAS}\frac{dC_{S,i}}{dt} = V_{BIAS}\frac{dC_{S,i}}{dx}\frac{dx}{dt} = V_{BIAS}\frac{dC_{S,i}}{dx}\,x\,\omega_0 = V_{BIAS}\Delta C_{SE}\,\omega_0$$

$$\Delta V_{out} = 2\frac{i_{C_F,i}}{\omega_0 C_F} = \frac{V_{BIAS}\,\Delta C\,\omega_0}{\omega_0 C_F} \rightarrow \frac{\Delta V_{out}}{\Delta C} = \frac{V_{BIAS}}{C_F}$$

$$\boxed{\frac{\Delta V_{out}}{B} = \frac{\Delta C}{B}\frac{\Delta V_{out}}{\Delta C} = \frac{\varepsilon_0\, i\, L}{2\,\omega_0\, g^2\, b_{area}}\frac{V_{BIAS}}{C_F}}$$

(apparently a factor 2 is missing in the formula but it is already included and "hidden" in the differential capacitance variation per unit field)

è il guadagno del charge amplifier!!!

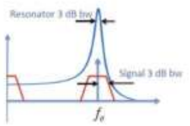
- Resonant operation issues.

Già nei giroscopi abbiamo visto i problemi di lavorare in risonanza.

- BANDA

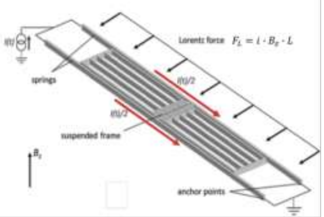
Like for gyroscopes, the information on the value of the magnetic field is **modulated around the drive frequency** (which in this case is the **Lorentz current frequency**).

The **maximum sensing bandwidth** is again given by the half **width at half maximum** (i.e. -3 dB) of the resonance peak:



$$\Delta\omega_{BW} = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{b}{2m}$$

$$\Delta f_{BW} = \frac{f_0}{2Q} = \frac{b}{4\pi m}$$



Nel futuro vedremo che avremo il tradeoff rumore - banda come avevamo nei giroscopi.

Proviamo a calcolare il rumore:

$$\sqrt{S_{Fn}} = \sqrt{4k_BTb}$$

$$\sqrt{S_{xn}} = \frac{iLQ}{2K}\sqrt{S_{Bn}}$$

$$\sqrt{S_{Bn}} = \frac{\sqrt{4k_BTb\left(\frac{Q}{K}\right)^2}}{\frac{iLQ}{2K}} = \frac{4}{iL}\sqrt{k_BTb} = NEMD$$

Noise Equivalent Magnetic Field Density

- To **calculate the Brownian noise** we start as usual from the force noise density and we turn it in terms of displacement and then into magnetic field:

$$S_{Fn} = \sqrt{4k_BTb} \qquad \frac{x}{B} = \frac{iL}{2k}Q \qquad \sqrt{S_{Bn}} = \frac{\sqrt{4k_BT\,b\left(\frac{Q}{k}\right)^2}}{\frac{iL}{2k}Q}$$

- Note: the Lorentz force is distributed along the springs (factor 2 aside k); the force density $4k_BTb$ on the contrary acts directly on the suspended frame; → we do not put a factor 2 at the denominator in the noise expression!

$$\boxed{NEMD = \sqrt{S_{Bn}} = \frac{4}{i\cdot L}\sqrt{k_B\,T\,b}} \qquad [T_{rms}/\sqrt{Hz}]$$

- **Challenges** in improving the minimum detectable field:
  - either **increase the length** (pay in area, and chip size and cost…),
  - or **increase** the injected **current** (pay in power consumption!),
  - or **decrease the damping coefficient** (e.g. by decreasing the pressure).

Un modo per calcolare in modo facile il rumore è:

- Just write noise in terms of force density…

$$\sqrt{S_{Fn}} = \sqrt{4k_BT\cdot b}$$

- Then divide it by the transduction factor between the quantity you want to measure, and the corresponding force

$$\frac{F_{inertial}}{a} = m \qquad \frac{F_{Coriolis}}{\Omega} = 2m_s x_{D,0}\omega_0 \qquad \frac{F_{Lorentz}}{B} = \frac{i\,L}{2}$$

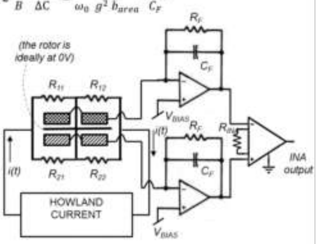
$$NEAD = \frac{\sqrt{S_{Fn}}}{m} \qquad NERD = \frac{\sqrt{S_{Fn}}}{2m_s x_{D,0}\omega_0} \qquad NEMD = \frac{\sqrt{S_{Fn}}}{i\,L\,/2}$$

$$NEAD = \frac{\sqrt{4k_BT\cdot b}}{m} \qquad NERD = \frac{1}{m_s x_{D,0}\omega_0}\sqrt{k_BT\cdot b} \qquad NEMD = \frac{4}{i\,L}\sqrt{k_BT\cdot b}$$

il rumore dell'elettronica al contrario è:

- Like in the case of gyros, **electronic noise** is given by two major contributions, the feedback **resistance** and the **OpAmp noise**.

$$\frac{\Delta V_{out}}{B} = 2\frac{\Delta C}{B}\frac{\Delta V_{out}}{\Delta C} = \frac{\varepsilon_0\, i\, L}{\omega_0\, g^2\, b_{area}}\frac{V_{BIAS}}{C_F}$$



$$S_{Bn,R_F} = \frac{\sqrt{2\cdot\frac{4k_bT}{R_F}}\frac{1}{\omega_0 C_F}}{\frac{\Delta V_{out}}{B}} = \frac{\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}2\,g^2\,b_{area}}{\varepsilon_0\, i\, L\, V_{BIAS}}$$

$$S_{Bn,CA} = \frac{\sqrt{2\cdot S_{n,op}}\left(1+\frac{C_P}{C_F}\right)}{\frac{\Delta V_{out}}{B}} = \sqrt{2\cdot S_{n,op}}\left(1+\frac{C_P}{C_F}\right)\frac{2\,\omega_0\, g^2\, b_{area} C_F}{\varepsilon_0\, i\, LV_{BIAS}} \approx \sqrt{2\cdot S_{n,op}}\, C_P\,\frac{2\,\omega_0\, g^2\, b_{area}}{\varepsilon_0\, i\, LV_{BIAS}}$$

- Difference w.r.t. the gyro case: here the **constant voltage V_{BIAS}** at the stators **cannot be as high as it was for the rotor in gyros** (up to 10 V), because the **OpAmps operate between the power supply**!

Perciò posso dire che l'overall noise è:

- We can put together the found expressions to write the **overall input-referred noise in terms of magnetic field density**:

$$\sqrt{S_{Bn,tot}} = \sqrt{\left(\sqrt{2\cdot S_{n,op}}\, C_P\,\frac{2\,\omega_0\, g^2\, b_{area}}{\varepsilon_0\, i\, LV_{BIAS}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}2\,g^2\,b_{area}}{\varepsilon_0\, i\, L\, V_{BIAS}}\right)^2 + \left(\frac{4}{i\cdot L}\sqrt{k_B\,T\,b}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{i\,L}\sqrt{\left(\sqrt{2\cdot S_{n,op}}\, C_P\,\frac{2\,\omega_0\, g^2\, b_{area}}{\varepsilon_0 V_{BIAS}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}2\,g^2\,b_{area}}{\varepsilon_0\, V_{BIAS}}\right)^2 + \left(4\sqrt{k_B\,T\,b}\right)^2} \qquad \left[\frac{T}{\sqrt{Hz}}\right]$$

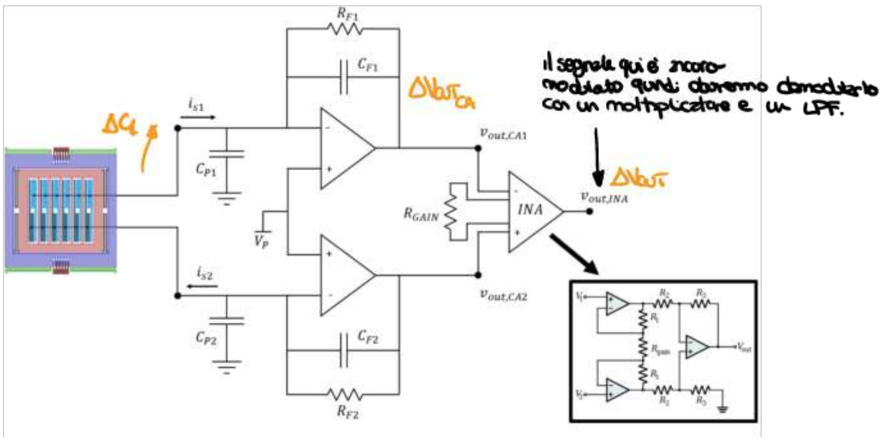
- Acting on *i* and *L* increases the Lorentz force
  - with mentioned area and power constraints;
- **If** the **electronic** noise dominates:
  - you can act on **any parameter related to the sensitivity** (gap, bias voltage…);
  - you should **minimize parasitics (C_p)** and **maximize the feedback resistance R_F**;
- **If device** noise dominates:
  - you have **not so many options**, as already discussed above…

11.11.2021 — Esercitazione

We are asked to design the sense electronics of a mode-split capacitive MEMS gyroscope. The device parameters are reported in Table 1 (C_P is the parasitic capacitance between stator pads and ground). The circuit topology is shown in Fig. 1.

1. Calculate the sensitivity in terms of sense capacitance per unit angular rate, CA output voltage per unit angular rate, and INA output voltage per unit angular rate. Additionally, calculate the FSR.
2. Evaluate the intrinsic resolution of the sensor, due to thermo-mechanical noise only.
3. Size the feedback resistance of the CA-based front-end, in order to obtain a well-balanced system in terms of noise performance.
4. Calculate the voltage noise PSD of the INA required not to worsen the resolution of the sensor, and the needed bias current of the input op-amps of the INA, in order to fulfill this requirement.

Structure		
Process thickness	h	22 μm
Gap	g	1.9 μm
External mass (half structure)	m_e	2 nKg
Internal mass (half structure)	m_i	8 nKg
Sense axis		
Sense resonance frequency	f_{rs}	19800 Hz
Sense damping (half structure)	b_s	2 μN/(m/s)
Parallel-plate length	L_{PP}	329 μm
Parallel-plate cells (whole structure)	N_{PP}	15
Rotor-to-stator DC voltage	V_{DC}	10 V
Drive axis		
Drive displacement amplitude	x_{da}	6 μm
Drive resonance frequency	f_{rd}	19000 Hz
Drive damping (half structure)	b_s	100 nN/(m/s)
Electronics		
Amplifier supply voltage	V_{DD}	0-3.3 V
CA feedback capacitance	C_F	2 pF
Parasitic capacitance	C_P	10 pF
INA resistance	R_{GAIN}	4.94 kΩ
INA gain	G_{INA}	1 + 49.4 kΩ / R_{GAIN}
CA op-amp voltage noise PSD	$s_{n,OAv,V}$	3.3 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$
CA op-amp current PSD	$s_{n,OAi,I}$	1 fA/$\sqrt{\text{Hz}}$
INA op-amp MOS overdrive voltage	V_{OV}	200 mV
INA op-amp MOS γ coefficient	γ	2/3



Sappiamo che il displacement dato l'angolo (?) è:

$$\frac{y}{\Omega} = \frac{x_d}{\Delta\omega_{ds}} = \frac{x_d}{2\pi(f_s - f_d)} = \frac{6\,\mu m}{\underbrace{2\pi}_{rad} 800\,\frac{}{Hz}} = 1{,}19\ \frac{nm}{rad/s} = 1{,}19\ \frac{nm}{\frac{180}{\pi}°/s} = 20{,}8\ \frac{pm}{dps}$$

Calcoliamo la Capacità su angolo:

Quello calcolato prima

$$\frac{\Delta C_s}{\Omega} = 2\frac{dC_s}{dy}\cdot\frac{dy}{d\Omega} = 2\cdot\frac{C_{so}}{g}\cdot\frac{x_d}{\Delta\omega_{ds}} = 2\ \frac{\varepsilon_0 h L_{pp} N_{pp}}{g^2}\cdot\frac{x_d}{\Delta\omega_{ds}}$$

Per avere la differenziale

$$= \frac{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 22\,\mu m\cdot 329\,\mu m\cdot 15}{(1{,}9\,\mu m)^2}\cdot 20{,}8\frac{pm}{dps}$$

$$\simeq 2\cdot\frac{506\,fF}{1{,}9\,\mu m}\cdot 20{,}8\ \frac{pm}{dps} = 11{,}1\ \frac{aF}{dps}$$ atto farad

Da tensione a angolo

questo lo abbiamo già considerato in questo

$$\frac{\Delta V_{out,ca}}{\Omega} = 2\cdot\frac{dV}{dC_s}\cdot\frac{dC_s}{\Omega} = \frac{V_{rotor}}{C_F}\cdot 11{,}1\ \frac{aF}{dps} = \frac{10\,V}{2\,pF}\cdot 11{,}1\ \frac{aF}{dps} = 55{,}5\,\mu V/dps$$

e finiamo con

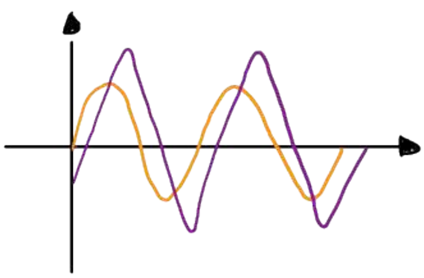
$$\frac{\Delta V_{out}}{\Omega} = \frac{\Delta V_{out,CA}}{\Omega}\cdot G_{INA} = 55{,}5\,\frac{\mu V}{dps}\,(1+10) = 610\,\mu V/dps$$

Ci viene anche chiesto la FSR di questo sistema (supponiamo di non avere quadratura)

$$FSR = 0 \div 3{,}33V \rightarrow \frac{\pm 1{,}65V}{610\,\mu V/dps} = \pm 2700\,dps$$

Per questo ci serve che il segnale sia centrato a 1,65V, per farlo usiamo il reference pin dell'INA.

E se avessimo una quadratura non compensata come calcoliamo il FSR?



Allora dobbiamo fare la stessa cosa ma sommando quadraticamente i 2 segnali per calcolare il valore massimo.

• PUNTO 2

$$S_{Fn} = 4k_BT\cdot b \quad [N^2/Hz]$$

$$F_{cor} = 2m_s v_d\cdot\Omega = 2m_s x_d\omega_d\cdot\Omega$$

Perciò $S_{Fn} = (2\, m_s x_d \omega_d)^2 S_{\Omega b}$

Sappiamo quindi che

$$\sqrt{S_{\Omega b}} = NERD_{HLF} = \frac{\sqrt{4 K_B T b_s}}{2 m_s x_d \omega_d} = \frac{\sqrt{K_B T b_s}}{m_s x_d \omega_d}$$

$$= \frac{\sqrt{1{,}38 \cdot 10^{-23}\, J/K \cdot 300K \cdot 2 \cdot 10^{-6}\, Kg/s}}{8\, mKg \cdot 6\, \mu m \cdot 2\pi\, 19000\, KHz}$$

Avremo il risultato in $\left[\frac{rad/s}{\sqrt{Hz}}\right]$

Se lo voglio in dps ottengo

$$= \text{''} \cdot \frac{180}{\pi} \left[\frac{dps}{\sqrt{Hz}}\right] \simeq 900 \frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}$$

Questi conti sono fatti per la singola massa, se abbiamo un sistema a 2 masse abbiamo che è come avere 2 sistemi in parallelo allora vediamo che la NERD si riduce di $\sqrt{2}$

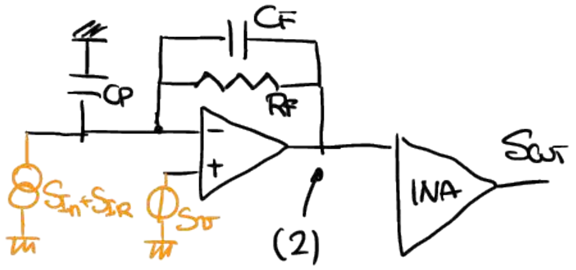
$$NERD = \frac{NERD_{HLF}}{\sqrt{2}} = 620 \frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}$$

Per capire sta roba vedo che bs raddoppia con 2 masse ma anche la massa raddoppia.

PUNTO 3 Dimensionare RF per far si che il rumore meccanico = rumore elettronico.

Ci sono state date le noise density per la corrente e la tensione.

Considerariamo tutto single ended



il trucco è calcolare tutto all'output e poi dividere per la sensitività trovata prima

$S = 610\, \mu V/dps$

xè differenziale

$$S_{out,Vn} = 2 \cdot S_{Vn} \left(1 + \frac{C_P}{C_F}\right)^2 \cdot G_{INA}^2$$

$$S_{\Omega,Vn} = \frac{\sqrt{S_{out,Vn}}}{610\,\mu V/dps} = \frac{\sqrt{2}\,(33\, nV/\sqrt{Hz}) \cdot \left(1 + \frac{10p}{2p}\right) \cdot 11}{610\,\mu V/dps} = 510 \frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}$$

$$S_{out,In} = 2 \cdot S_{In} \cdot \left(\frac{1}{2\pi f_d C_F}\right)^2 \cdot G_{INA}^2$$

$$\sqrt{S_{\Omega,In}} = \frac{\sqrt{S_{out,In}}}{610\,\mu V/dps} = \frac{\sqrt{2}\;\; 1 fA/\sqrt{Hz} \cdot \frac{1}{2\pi\, 19KHz \cdot 2pF} \cdot 11}{610\,\mu V/dps} = 106 \frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}$$

Perciò abbiamo che per avere il tutto ben bilanciato dobbiamo avere che

$$\sqrt{S_{\Omega,V_n}+S_{\Omega,I_n}+S_{\Omega,R_F}} = NERD$$

$$S_{\Omega,R_F} = NERD^2 - (S_{\Omega,V_n}+S_{\Omega,I_n}) = \left(620\frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}\right)^2 - \left(521\frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}\right)$$

$$\sqrt{S_{\Omega,R_F}} = 377\frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{4K_BT}{R_F}}\cdot\frac{1}{\omega_D\cdot C_F}\cdot G_{INA}}{610\mu V/dps}$$

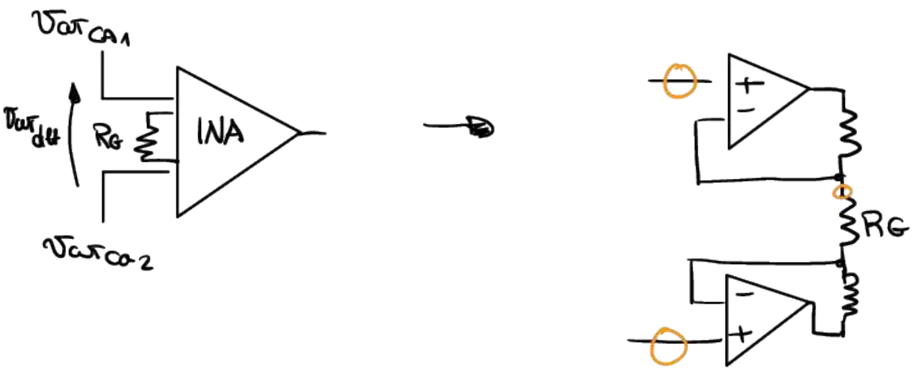
Perché abbiamo 2 resistenze una per ogni opamp differenziale

Da qui ricaviamo $R_F = 1{,}38\,G\Omega$.

Adesso dobbiamo checkare che con questo valore di resistenza il circuito funzioni come charge amplifier

Vediamo che il polo è a 160Hz mentre noi lavoriamo a 19KHz

<u>PUNTO (4)</u> Rumore dell'INA



Dai valori calcolati prima ricaviamo che l'overall noise all'input dell'INA

$$\sqrt{S_{V,INA}} = \underbrace{900\frac{\mu dps}{\sqrt{Hz}}}_{\text{è il rumore totale d'uscita(?)}}\cdot 55\frac{\mu V}{dps} = 50\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

← Capire bene sta cosa.

$$\sqrt{S_{R_G,INA}} = \sqrt{4K_BTR_G} = 9\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

← è il rumore della resistenza R_G che possiamo considerarlo trascurabile $9 \ll 50$

Possiamo dire che un rumore è trascurabile quando è 1/3 di quell'altro.

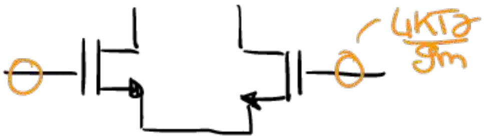
$$\frac{50\frac{nV}{\sqrt{Hz}}}{3} = 16{,}5\frac{nV}{\sqrt{Hz}}$$

Calcoliamo il rumore degli amplificatori (la target noise di questi per renderli trascurabili è $\leq 16{,}5\ nV/\sqrt{Hz}$)
Ma attenzione che 16,5 deve essere il rumore del differenziale perciò il singolo deve avere rumore $16{,}5 nV/\sqrt{2} \simeq 11 nV/\sqrt{Hz}$

$$S_{Vn,INA} = \frac{2\, 4 K_B T \cdot \gamma}{g_m} = \left(11 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right)^2 \qquad g_m = \frac{2 I_D}{V_{ov}}$$

RUMORE DEL MOSFET

$$= 2\,\frac{4 K_B T \gamma V_{ov}}{2 I_D} \longrightarrow I_D = \frac{4 K_B T \gamma V_{ov}}{S_{V,INA}} = 22 \mu A$$

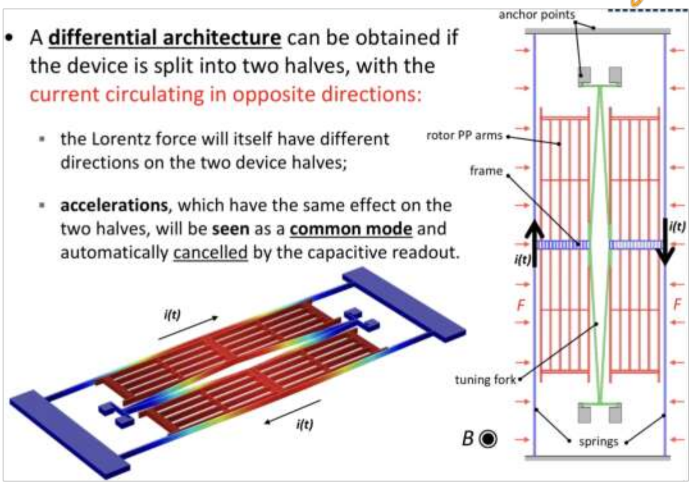


il 2 nella formula è dovuto al fatto che abbiamo 2 mosfet che fanno rumore.

Magnetometro 2

Uno dei vantaggi principali di fare i magnetometri MEMS è quello che possiamo fare un device quasi tutti sullo stesso chip in polysilicon e senza l'uso di compognenti magnetiche.
Ma ho anche lati negativi (con la struttura vista in precedenza)
- Trade off tra noise density e banda (con la struttura mode matched)
- robustezza contro le accelerazioni
- Area (ci servono grandi molle per rendere possibile rilevare la forza di Lorentz)

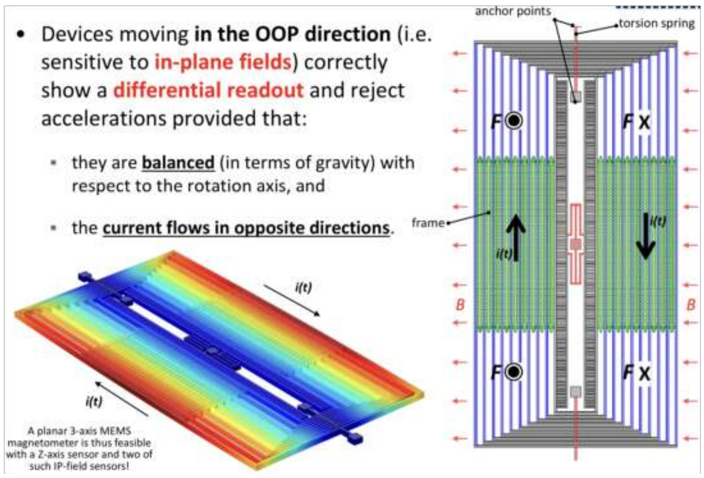
Architetture avanzate per fare un rejecting delle accelerazioni.



Vogliamo che il movimento sia in antifase perciò la forza di Lorentz deve essere opposta, ergo cambiamo il verso della corrente

In questo caso lo scale factor è uguale a quello del caso precedente solo moltiplicato x2.
Quando abbiamo un accelerazione questa sarà di common mode e quindi possiamo eliminarla

Possiamo poi fare anche una struttura per rilevare in-plane magnetic fields:
Abbiamo dei piatti paralleli sotto la struttura e poi la forza di Lorentz farà tiltare la struttura. Se il punto di rotazione è esattamente al centro di gravità allora l'accelerazione non fa tiltare niente.
Per avere forza torsionale (cioè avere segnale differenziale) invertiamo la corrente da un lato all'altro.



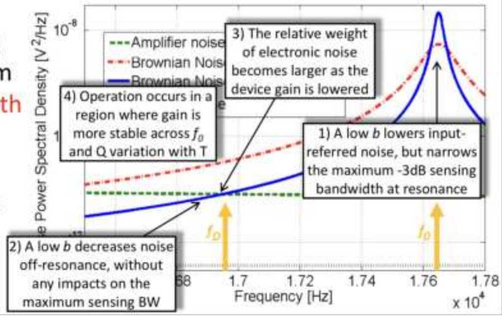
Il trucco per far scorrere la corrente bene nel sistema mettiamo un piccolo film di metallo. Non è uno step in + perché già mettiamo il metallo per avere i pin quindi non dobbiamo aggiungere niente al processo.

OFF-RESONANCE (MODE SPLIT) OPERATION

Unlike axels and gyros, mags suffer from a **non-negligible thermo-mechanical noise**. Lowering the damping coefficient would imply a consistent reduction in the maximum achievable bandwidth.

Mimicking the behavior of **mode-split gyroscopes**, our lab first proposed the operation of MEMS magnetometers with a **frequency split** between driving current and resonance frequency, with the aim of solving the bandwidth-resolution trade-off.

The figure summarizes potential advantages and issues.



Lavoriamo ad una frequenza che non è quella di risonanza.
Questo ci permette di lavorare in una zona molto più stabile termicamente e separiamo la banda dal rumore.
Avremo un impatto maggiore del rumore dell'elettronica però (e questo è dovuto al fatto che lo scale factor è + basso perché Qeff è + piccolo)

- The **sensitivity** can be calculated **as in the case of resonant operation**, provided the quality factor is substituted by the gain at a distance $\Delta f = f_0 - f_D$, which we called **effective quality factor** (a.k.a. Leeson's effect):

f_0 resonance frequency of the magnetometer sensing mode

f_D frequency at which the AC current is injected into the magnetometer

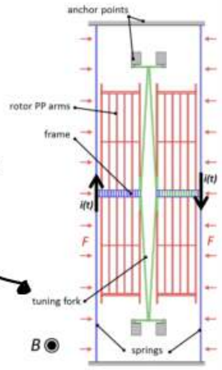
$$Q_{eff} = \frac{f_0}{2\,\Delta f} = \frac{\omega_0}{2\,\Delta\omega}$$

- For **a tuning-fork structure**, you can evaluate the scale-factor expression for just half of the device and then simply multiply by a factor 2:

$$k_{1/2} = k_{1-beam} + k_{1/2\ TF} \qquad x = B\,i\,L\frac{Q_{eff}}{2\,k_{1/2}}$$

$$\Delta C = 2\frac{C_0}{g}x = \frac{C_0}{g}B\,i\,L\frac{Q_{eff}}{k_{1/2}} = \frac{C_0}{g\,k_{1/2}}B\,i\,L\,\frac{f_0}{2\,\Delta f}$$

$$\boxed{\frac{\Delta V_{out}}{B} = \frac{V_{BIAS}}{C_F}\frac{C_0}{g}\frac{i\,L}{k_{1/2}}\frac{f_0}{2\,\Delta f}}$$



NOTE: C_0 = single-ended capacitance of the whole structure (includes the factor 2 associated to the tuning fork configuration) $K_{1/2}$ = stiffness of half the structure

Facciamo il conto per metà struttura e poi moltiplichiamo per 2
K1/2TF è la stiffness di metà della tuning fork.

(Qui non mette il fattore 2 perché considera Co come la capacità dell'intera struttura)

Abbiamo visto che la sensitività è indipendente da b e quindi possiamo aggiungere piatti paralleli per aumentare Co e conseguentemente la sensitività e recuperare un po' quello che abbiamo perso nella off resonant operation.
Inoltre ai magnetometri non serve una grande massa perché non sono sensori inerziali quindi piccola m → piccolo K e quindi guadagno in sensitività.

NEMD (rumore termodinamico e banda)

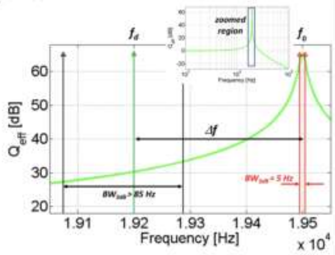
- What about **the achievable SNR**? All the expressions found for resonant operation are still valid, provided that
  - we substitute the quality factor Q with the effective quality factor Q_{eff};
  - the -3 dB bandwidth value Δf_{eln} is now given by an electronic LPF

$$\frac{x}{B} = \frac{i\,L}{2k_{1/2}}Q_{eff}$$

$$\sqrt{S_{xn}} = \sqrt{4\,k_B\,T\,b\left(\frac{Q_{eff}}{k_{1/2}}\right)^2}$$

  - the NEMD does not change:

$$NEMD = \sqrt{S_{Bn}} = \frac{\sqrt{S_{xn}}}{x/B} = \frac{4}{i\,L}\sqrt{k_B\,T\,b}$$



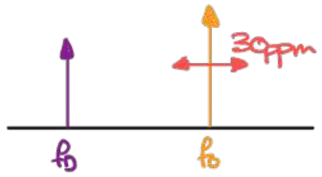
NOTE: the so-calculated NEMD refers to a single half of the device. Like for gyroscope, an improvement by a factor √2 is obtained using a T.F. structure.

Usiamo Qeff al posto di Q ma vediamo che come nei giroscopi il rumore termomeccanico non cambia minimamente

Se usiamo una struttura con 2 device allora la NEMD totale si riduce di √2
(è come avere 2 volte il segnale e √2 il rumore).

Problemi nella generazione della corrente di drive alla giusta freq.

Per ora abbiamo sempre supposto che la frequenza della corrente sia costante e giusta. Il problema principale è che se la corrente è ad una frequenza fissa e precisa allora rimane fissa anche con variazioni di temperatura, il problema è che la freq di risonanza del sistema varia con la temperatura e questo fa sì che la distanza tra le 2 freq non sia fissa

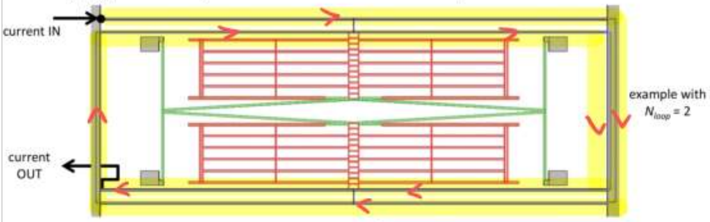


Un modo per risolvere questo è quello di far sì che la frequenza con cui viene modulata la corrente sia creata da un risonatore MEMS così anche lui varia con la temp.

Architetture Multiloop

C'è un altro problema che non abbiamo considerato, noi vogliamo ridurre il rumore elettronico così che possiamo avere bassi livelli di rumore quando lavoriamo fuori dalla frequenza.
Infatti dato che lo scale factor è + piccolo allora il rumore dell'elettronica risulta maggiore. Dobbiamo trovare un modo per fare un boost dello scale factor e senza consumare + potenza

- The **only way** to boost the sensitivity is to **act on the Lorentz force**:
  - we cannot act on the length (area constraints);
  - we cannot act on the current intensity (power dissipation constraints), but…
  - … we can **reuse the same current and make it re-circulate several times** (N_{loop}) to boost by the same factor the sensitivity!



- New expressions of **sensitivity** and **NEMD** become:
  - electronic noise is thus also reduced by a factor N_{loop}.

$$\frac{\Delta V_{out}}{B} = \frac{V_{DC}\,\epsilon_0\,A\,N_{PP}}{C_F\ g^2\,k_{1/2}}\,i\,N_{loop}L\,Q_{eff}$$

$$NEMD = \frac{4}{N_{loop}\,i\,L}\sqrt{k_B\,T\,b}$$

Intuitivamente se vogliamo + forza aumentiamo la corrente ma no xè consumeremo di +, allora l'idea geniale è quella di far ricircolare la corrente + volte sullo stesso ramo.
Però corrispondentemente abbiamo un fattore moltiplicativo
Perciò adesso la sensitività sarà moltiplicata per il numero di loop.
Dal punto di vista del rumore questo non ne crea di nuovo ma la electronic noise totale è ridotta perché la sensitività è aumentata

$$\sqrt{S_{Bn,tot}} = \sqrt{\left(\sqrt{2\cdot S_{n,op}}\frac{C_P}{V_{BIAS}}\frac{g^2\,k_{1/2}\,2\,\Delta\omega}{\epsilon_0\,A\,N_{PP}\,i\,L\,\omega_0\cdot N_{loop}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}\frac{g^2\,k_{1/2}\,2\Delta\omega}{2\,\epsilon_0\,A\,N_{PP}\,i\,LV_{BIAS}\,\omega_0^2\cdot N_{loop}}\right)^2+\left(\frac{4}{N_{loop}\cdot i\cdot L}\sqrt{k_B\,T\,b}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{N_{loop}\,i\,L}\sqrt{\left(\sqrt{2\cdot S_{n,op}}\frac{C_P}{V_{BIAS}}\frac{g^2\,k_{1/2}\,2\,\Delta\omega}{\epsilon_0\,A\,N_{PP}\,\omega_0}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}\frac{g^2\,k_{1/2}\,2\Delta\omega}{2\,\epsilon_0\,A\,N_{PP}V_{BIAS}\,\omega_0^2}\right)^2+\left(4\sqrt{k_B\,T\,b}\right)^2}\quad\left[\frac{T}{\sqrt{Hz}}\right]$$

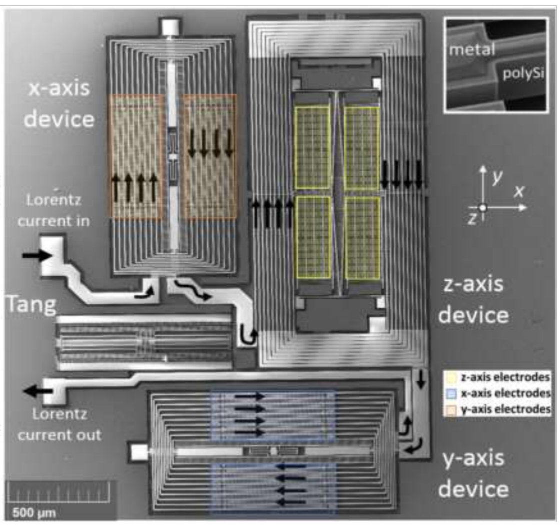
- Acting on *i* and *L* increases the Lorentz force
  - with mentioned area and power constraints;
- **If** the **electronic** noise dominates:
  - you can act on **any parameter related to the sensitivity** (gap, bias voltage…);
  - you should **minimize parasitics** (**C_p**) and **maximize the feedback resistance R_F**;
- **If device** noise dominates:
  - you can lower the damping coefficient, as already discussed above…
- Adding recirculating loops **decreases all input-referred noise contributions**, as **it directly increases the Lorentz force**!
  - required **extra area is not so huge** (large part of area is taken up by PP readout cells!).

Un magnetometro 3 assi totale sarà dunque tipo

3 magnetometers and one Tang resonator

STM **22-µm-thick surface machining**
- **Al-on-metal deposition** for the loops.

Acceleration rejection:
- tuning fork (Z-axis device) and torsion springs (X-axis device).

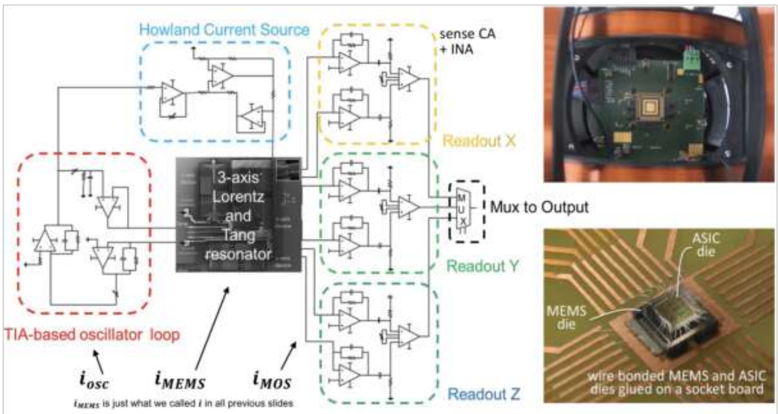


L'unico lato negativo di questa struttura è che è un po' grandino

Tutta questa struttura è circa 2,5mm

Magnetometri 3

Data una max corrente che possiamo consumare come la splittiamo tra l'elettronica e la corrente per la forza di Lorentz?



- Note: a single current recirculating in all the 3 devices **implies a 3x saving in power dissipation**! This is feasible only in off-resonance mode (at resonance, it would be impossible to have the frequencies of the 3 axes perfectly matched)!

Se noi lavoriamo in off resonance possiamo comandare tutte e 3 gli assi con la stessa corrente (Questo perché non mi interessa quali siano le freq di risonanza dei 3 assi che possono essere diverse ma li comando tutti e 3 a f_{ref}).
e così risparmio corrente.

Per il resto ci serve la corrente per generare l'oscillazione e la chiamiamo i_{os}. Poi abbiamo la corrente che scorre per generare la forza di Lorentz che chiamiamo i_{MEMS} e infine abbiamo la corrente che scorre nei mos per l'amplificazione. Come ci dividiamo tra queste correnti? Per semplicità diciamo che la corrente i_{osc} non ha effetti sul rumore e quindi quella sarà la minima corrente che possiamo avere per avere l'oscillazione.

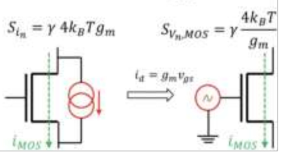
Sappiamo poi che il rumore dell'ampli dipende dalla corrente.

- The **current consumed by the sense CAs**, on the contrary, determines to a large extent the electronic noise S_{Vn}:
  - assume to operate in saturation ($i_{MOS} = k_n V_{ov}^2$)

$$S_{i_n} = \gamma\, 4k_BTg_m \qquad S_{V_n,MOS} = \gamma\frac{4k_BT}{g_m}$$

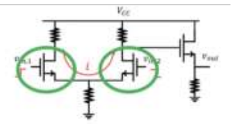
$$g_m = \frac{2i_{MOS}}{V_{OV}} = 2\sqrt{k_n\, i_{MOS}} \qquad \left(k_n = \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}\right)$$

$$S_{V_n,MOS} = \frac{\gamma 4k_BT}{g_m} = \frac{\gamma 4k_BT}{2\sqrt{k_n\, i_{MOS}}}$$



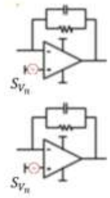
Quanti mos dovremo tenere conto nel nostro conto del rumore?

A typical **differential operational amplifier has a pair of input transistors**, each with its own voltage noise component.



The amplifier noise that we modeled so far, which we named S_{V_n}, corresponds thus to **twice the noise of a single transistor**. We neglect noise of transistors of the following stages, which is usually made negligible.

$$S_{V_n} = 2\frac{\gamma 4k_BT}{g_m} = \frac{\gamma 4k_BT}{\sqrt{k_n\, i_{MOS}}}$$



Note that, if you have two amplifiers for differential sensing, then noise power spectral density should be multiplied by another factor 2. We already took it into account in past classes.

Abbiamo il differential pair quindi consideriamo il doppio del rumore di un singolo MOS.
Inoltre tipicamente abbiamo una struttura differenziale perciò dobbiamo considerare che ci sono 2 S_{vn}.

Scriviamo l'eq del rumore completo in funzione della corrente.

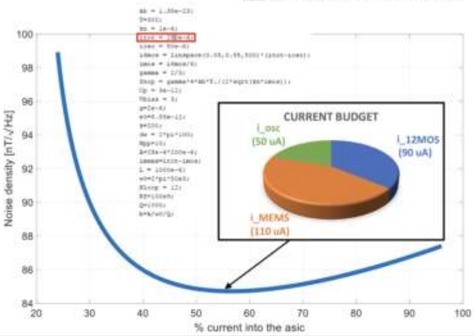
- We now write the overall noise equation as a function of the current injected in the MEMS ($\boldsymbol{i_{MEMS}}$) and that of the input pair ($\boldsymbol{i_{MOS}}$).

$$\sqrt{S_{Bn,tot}} = \frac{1}{N_{loop}\, i_{MEMS}\, L}\sqrt{\left(\sqrt{2\frac{\gamma 4k_BT}{\sqrt{k_n\, i_{MOS}}}}\frac{C_P}{V_{BIAS}}\frac{g^2\, k_{1/2}\, 2\,\Delta\omega}{\epsilon_0\, A\, N_{PP}\, \omega_0}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{8\,k_bT}{R_F}}\frac{g^2\, k_{1/2}\, 2\Delta\omega}{2\,\epsilon_0\, A\, N_{PP}\, V_{BIAS}\, \omega_0^2}\right)^2 + \left(4\sqrt{k_B\,T\,b}\right)^2}$$

i_{MEMS} is just what we called i in all previous slides

Vediamo che i_{MEMS} è fuori della radice mentre i_{MOS} è sotto. Perciò uno sarebbe tentato di mettere la maggior parte della corrente sul MEMS. Questo è parzialmente corretto ma ad un certo punto non è più conveniente. Perché ad un certo punto la componente del rumore dato da i_{MEMS} cala meno rispetto a quanto sale il rumore di i_{MOS}.

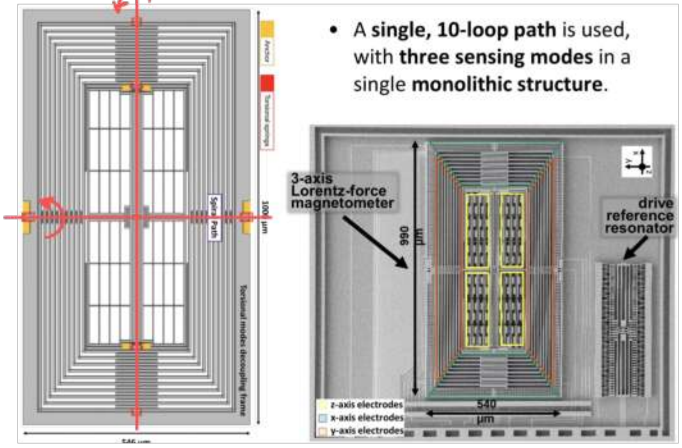
- As an example, assuming a current of 50 µA to sustain the oscillator (no AGC needed), the optimum partitioning between MEMS current and overall ASIC current results to be well balanced (about 50%).



Notiamo in modo analitico che se supponiamo 50µA per i_{os} allora una buona approx è dividere la restante corrente a metà tra i_{MOS} e i_{MEMS}.

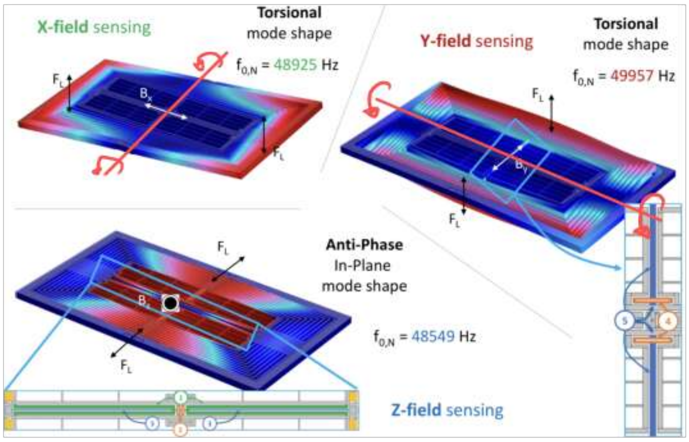
Area

Come avevamo già detto il magnetometro consuma un botto di area dobbiamo trovare un modo per ridurre questa area.
Devo trovare un modo che mi permetta di avere solo un unico loop che mi faccia funzionare tutti e 3 gli assi del magnetometro.



Se voglio fare il sensing monolitico di più direzioni devo fare sì che
1) le modalità risonanti non siano alla stessa f perché con il cross coupling posso eccitare anche un'altra modalità.
2) Una modalità tenderà a deformare il circuito e questa deformazione non deve fare sì che si inducano crosstalk con le altre modalità (cross-talk sia meccanico che elettronico)

L'idea di questa struttura è che è ancorata nei punti gialli e può girare sui punti torsionali espressi con i rettangoli rossi. Per il capacitive sensing abbiamo 3 paia di elettrodi come si può vedere nella foto accanto 2 paia sono elettrodi complanari e quelli gialli sono in plane sensing.



X-field: tilt avanti e indietro, Notiamo che la parte centrale di B non si muove così non avremo cross-talk. gli elettrodi di Y non vedono variazione di capacità anche se la parte sopra si muove perché si muovono in common mode

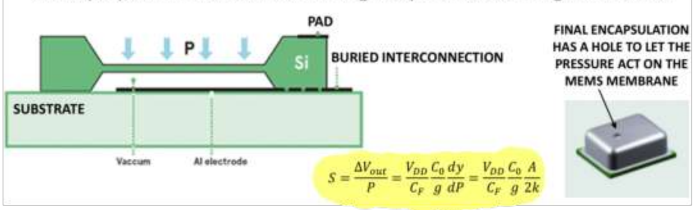
Y field: stessa roba di x solo per y.

Z field: Standard.

Esempi di altri sensori MEMS

Sensore di Pressione

- General concept: use a **hermetic-sealing membrane** between a known pressure level (typically much lower than ambient pressure) and the **quasi-DC** ambient absolute pressure value.
  - the **membrane can be obtained from an epitaxial growth** and a further, **selective, thinning** and **filling of the release holes**.
- The **difference in pressure makes the suspended membrane deflect** as a function of the outside pressure.
- The deflection generates a **capacitive change** (single ended, in this example), which is readout through capacitive sensing interfaces.



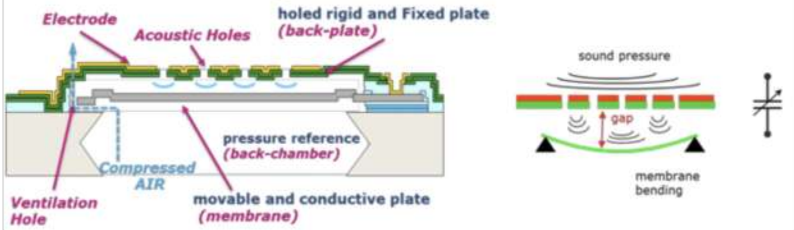
$$S = \frac{\Delta V_{out}}{P} = \frac{V_{DD}}{C_F}\frac{C_0}{g}\frac{dy}{dP} = \frac{V_{DD}}{C_F}\frac{C_0}{g}\frac{A}{2k}$$

Lo scale factor è questo perché abbiamo una single ended capacitance.

Microfono.

Acoustic waves are pressure waves: a **microphone** needs thus to **sense the AC pressure**, usually from 20 Hz to 20 kHz, while **leaving out the DC value of pressure**.

To let this happen, a **fixed membrane** features **specific holes** (acoustic holes), in such a way that there is **no DC pressure difference** between outside and the two chambers. However, for AC waves, there is an **effective AC pressure difference** between the back chamber and the front chamber, which **makes the membrane deflect**. Details will be given in a dedicated numerical exercise.



A magnetometer shall be coupled to the integrated circuit shown in Fig. 1. The circuit is formed by two front-end charge amplifiers, a passive AC coupling and an INA.

1. Choose the split between drive frequency and resonance frequency so to cope with a required 50 Hz bandwidth, and calculate the electromechanical sensitivity [F/T].
2. Find the feedback capacitance, in order to use the full rail-to-rail dynamics at the end of the electronics chain at the full scale range ($FSR = 3\,\mathrm{mT}$).
3. Considering only the intrinsic MEMS thermo-mechanical noise, what is the MEMS limit to the system resolution?
4. A current budget of $150\mu A_{rms}$ has to be split between MEMS driving and front-end electronics. Your IC technology allows transistors with a maximum $W/L = 150/1$ and a $\mu_n C_{ox} = 100\,\frac{\mu A}{V^2}$: what is the electronics limit to your system resolution?
5. A well-balanced design is obtained if MEMS and electronics resolution are equal. Considering the design constraints, is it possible to reach the optimal situation?

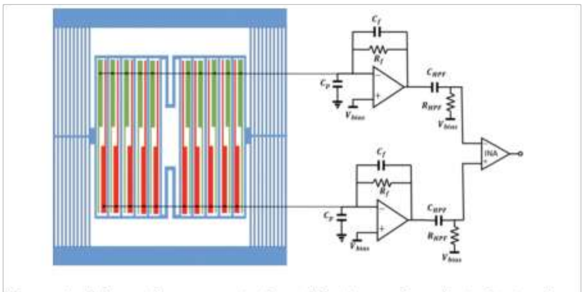
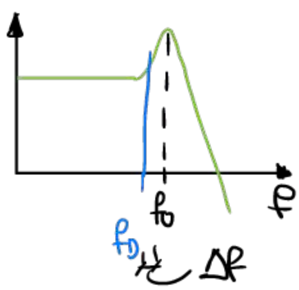


Figure 1: Schematic representation of device and readout electronics.

Device Parameters		
rest gap	g	1.5 μm
single-ended rest capacitance	C_0	390 fF
anti-phase resonance frequency	f_0	18000 Hz
drive current	$i_{MEMS,rms}$	50 μA_{rms}
current loop number	N_{loop}	10
spring length	L	1400 μm
half-structure stiffness	$k_{1/2}$	60 N/m
parallel-plate cells	N_{PP}	10
parallel-plate length	L_{PP}	400 μm
sealing pressure	P_0	0.25 mbar
damping coefficient	b	$4.22 \cdot 10^{-8}$ kg/s
Bandwidth	BW	50 Hz
drive current	$i_{MEMS,rms}$	50 μA_{rms}
supply voltage	V_{DD}	5 V
stators bias voltage	V_{bias}	2.5 V
$\mu_n C_{ox}$	$\mu_n C_{ox}$	100 μA/V^2
parasitic capacitance	C_P	1.5 pF
INA resistance	R_{GAIN}	495 Ω
INA gain	G_{INA}	$1 + 49.4\,\mathrm{k}\Omega / R_{GAIN}$

• PUNTO 1)

mini recap di quello che abbiamo detto:

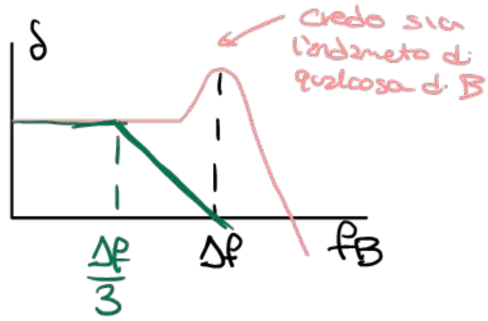


abbiamo una f drive diversa da f_0 e dobbiamo scegliere f_D per avere banda di 50Hz

Sappiamo che la forza è $F = B i L \cdot N_{loops}$

Se B ha una componente alternata allora questa sarà modulata attorno ad f_D allora ho 2 toni attorno a f_D.

Allora avrò che l'andamento in frequenza sarà



Noi non vogliamo prendere il picco perciò lo filtriamo prima. Tipicamente un buon valore si ha per $\Delta f/3$, allora

$$\Delta f = f_0 - f_d = 3 \cdot BW = 150\,Hz$$

Adesso posso calcolare che

$$\frac{\Delta C}{B} = \frac{i L N_{loop}}{K_{1/2}} \cdot Q_{eff} \cdot \frac{C_0}{g}$$

è $K_{1/2}$ perché è solo di metà struttura dato che ho la tuning fork

(NOTA, nel testo ci viene data la corrente rms ma noi nello scale factor dobbiamo usare il valore di picco $i = i_{RMS} \cdot \sqrt{2} = 71\,\mu A$)

$$Q_{eff} = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{18000}{2 \cdot 150} = 60$$

allora possiamo calcolare lo scale factor

Perciò

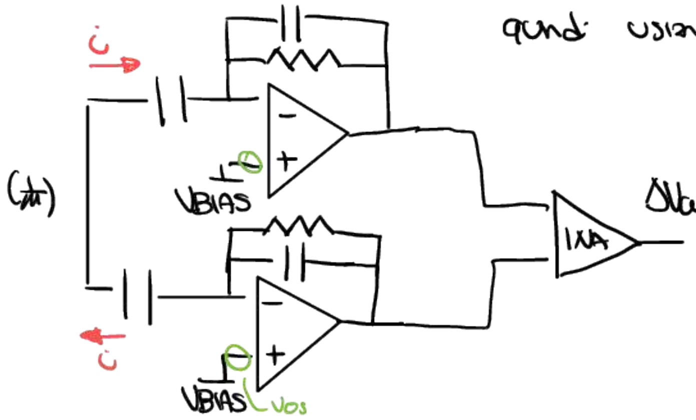
$$\frac{\Delta C}{B} = \frac{71\,\mu A \cdot 1400\,\mu m \cdot 10}{60\,N/m} \cdot 60 \cdot \frac{390\,fF}{1{,}5\,\mu m} = 257 \cdot 10^{-15}\,\frac{F}{T}$$

$$= 257\,\frac{fF}{T}$$

PUNTO 2

$FSR = \pm 3mT$

C'è un po' di differenza rispetto ai giroscopi perché quelli hanno Vrot che si può imporre qui è un casino quando usiamo VBIAS



$$\frac{\Delta V_{out}}{B} = \frac{\Delta C}{B} \cdot \frac{V_{BIAS}}{C_F} \cdot G_{INA}$$

non ho messo il 2 perché già prima ho considerato il fattore che sono differential sensing

Sappiamo che VDD=5V e GND, devo calcolare CF. Se VBIAS è a metà dinamica (2,5V) allora no che noi vogliamo che per il massimo B noi abbiamo 5V rispetto ai 2,5V di bias

$$\frac{2{,}5}{3mT} = \frac{\Delta C}{B} \cdot \frac{V_{BIAS}}{C_F} \cdot G_{INA} \rightarrow C_F = \frac{\Delta C/B \cdot V_{BIAS} \cdot G_{INA}}{2{,}5/3{,}5mT} = 77\,fF$$

• PUNTO 3

Calcoliamo l'equivalent noise density

$S_{Fn} = 4 K_B T b$ ← La calcoliamo per metà struttura e poi divideremo per $\sqrt{2}$

Mi serve poi la relazione tra forza e campo magnetico

$$F = \frac{i L N_{loop} \cdot B}{2}$$

Perciò

$$S_{Fn} = \left(\frac{i L N_{loop}}{2}\right)^2 S_{Bn}$$

e dunque

$$\sqrt{S_{Bn}} = NEMD = \frac{\sqrt{S_{Fn}} \cdot 2}{i L N_{loops}} = \frac{4}{i L N_{loop}} \cdot \sqrt{K_B T b} \quad [T/\sqrt{Hz}]$$

perciò

$$NEMD_{1/2} = \frac{4}{71\,\mu A\, 1400\,\mu m \cdot 10} \cdot \sqrt{1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 300K \cdot 4{,}22 \cdot 10^{-8} \frac{Ks}{s}} = 53\,nT/\sqrt{Hz}$$

Perciò

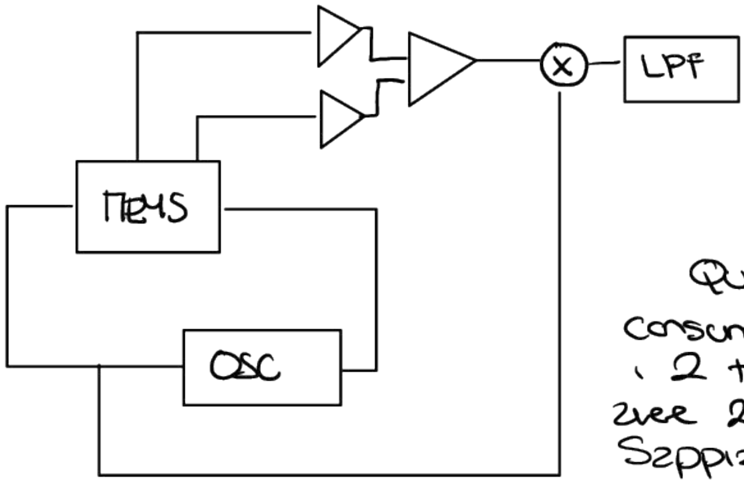
$$B_{min,dev\,1/2} = NEMD_{1/2} \cdot \sqrt{BW} = 53 \frac{nT}{\sqrt{Hz}} \cdot \sqrt{50Hz} = 377\,nT\,rms$$

Se abbiamo che le 2 metà sono uguali abbiamo che il campo magnetico minimo rilevabile è dato da

$$B_{min,dev} = \frac{377\,nT_{rms}}{\sqrt{2}} = 267\,nT_{rms}$$

PUNTO 4)

Abbiamo un budget di corrente di 150μArms.
Noi sappiamo che per comandare il MEMS prima abbiamo usato 50μA.
Mi chiede il limite elettronico per la mia risoluzione.

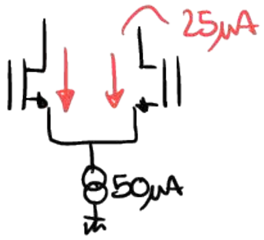


TOT = 150μA

MEMS = 50μA

FRONT-END = 100μArms = 100μA

Quindi ognuno dei 2 amplificatori può consumare 50μA e se ci vediamo i 2 transistor di input significa che posso avere 25μA l'uno
Sappiamo poi che il rumore di un singolo mos è $i_n = \frac{4K_BT\gamma}{g_m}$



Noi abbiamo che $\mu_n C_{ox} \cdot \frac{W}{L}\Big|_{MAX}$

allora $g_m = \frac{2I_D}{V_{ov}}$ $\quad I_D = \underbrace{\frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}}_{K_n}(V_{ov})^2$

Dove $V_{ov} = \sqrt{\frac{I_D}{K_n}}$ perciò:

$$g_m = \frac{2I_D}{\sqrt{\frac{I_D}{K_n}}} = 2\sqrt{I_D K_n} = 2\sqrt{I_D \cdot \frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}} = \sqrt{2I_D\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}}$$

$$= \sqrt{2I_D\mu_n C_{ox}\frac{W}{L}\Big|_{MAX}} = \sqrt{2\cdot 25\mu A\cdot 100\frac{\mu A}{V^2}\cdot 150} = 866\,\frac{\mu A}{V}$$

dato dai 2 MOS

$$S_{vn} = 2\cdot\frac{4K_B\cdot T\cdot\gamma}{g_m} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\,J/K\cdot 300K\cdot 2/3}{866\,\mu A/V}} = 5\,nV/\sqrt{Hz}$$

Perciò il minimo campo magnetico dato dall'elettronica sarà

Questo 2 è dato dal fatto che abbiamo 2 amplificatori

$$B_{min,elec} = \sqrt{\frac{2\cdot S_{vn}^2\cdot\left(1+\frac{C_P}{C_F}\right)\cdot G_{INA}}{2{,}5/3\,mT}}\cdot\sqrt{BW}$$

Attenzione potrebbero esserci errori nel testo

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{5nV/\sqrt{Hz} \cdot \left(1 + \frac{5pF}{77pF}\right) \cdot 100}{2{,}5/3mT} \cdot \sqrt{50Hz} = 398\,nT_{rms}$$

il minimo campo magnetico dato dalle resistenze è:

$$B_{min,R} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4K_BT}{R_F}} \cdot \frac{1}{\omega_D C_F} \cdot G_{INA}}{2{,}5V/3mT} < 398\,nT_{rms}$$

e da qui ricaviamo RF per ottenere quel valore per rendere il rumore della resistenza trascurabile.

Vediamo che il sistema non è bilanciato abbiamo 398nTrms dell'elettronica e 267nTrms del dispositivo.

PUNTO 5)

Quali sono le strategie con cui posso bilanciare i 2 rumori?
Noi sappiamo che il minimo campo dato del device è:

$$B_{min,dev} = \frac{4}{i L N_{loop}} \sqrt{K_BTb}$$

Noi potremmo decidere di aumentare questa noise contribution.

Se non ci sono motivi per non farlo non facciamolo ma possiamo anche aumentare un po' il rumore se ad esempio abbiamo problemi con il vuoto per b.

Potrei cambiare L e Nloop non generale dovrei cambiare il design intero.
Posso decidere di aumentare b e quindi la pressione

$$\sqrt{b} \propto \sqrt{p} \qquad p_{max} = \left(\frac{398}{267}\right)^2 \cdot p = 0{,}56\,mbar$$

è il rapporto tra i 2 rumori

i vantaggi e svantaggi di questa struttura sono

PRO) rilasso la pressione del mems → + facile da fare + affidabile

CONTRO) Aumentiamo il rumore

L'altra cosa che potremmo fare è ridurre il rumore dell'elettronica

$$B_{min,elec} \div \frac{\sqrt{1/g_m}}{S}$$

l'unico parametro su cui potrei operare è gm

$$\div \sqrt{\frac{1}{\sqrt{I_D}}}$$

ma come vediamo gm dipende da ID e quindi dovrei aumentare di molto ID per ridurre il rumore

$$I_{D,new} = \left(\frac{398}{267}\right)^4 I_D = 124\,\mu A$$ per transistor (al posto che 25μ)

PRO → il rumore totale cala

CONTRO → consumi molto alti e non well distributed current contributions

$$B_{min,tot} = \sqrt{\left(\frac{4}{i L B}\right)^2 K_B T b + \frac{2 \cdot 4 K_B T}{2\sqrt{K_m I_D}} \cdot \underbrace{\left(\frac{K_{1/2}\ldots}{i L N_{loop}}\right)^2}_{\text{scale factor}}} \cdot \sqrt{BW}$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \sqrt{\ldots} \cdot \sqrt{BW}$$

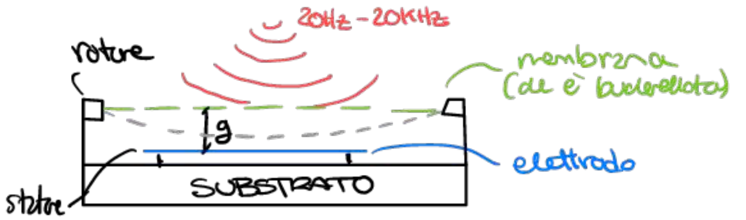
18.11.2021 — **Esercitazione** — 2h

We have to design a MEMS microphone. The schematic of the device is shown in Fig. 1. The system parameters are reported in Table 1. We are asked to...

1. Choose the diameter of the membrane in order to comply with noise requirements, aiming at a well-balanced sensor in terms of noise performance. Calculate then the electromechanical sensitivity.
2. Calculate the required bias voltage, V_{DC}, in order to have a well-balanced sensor in terms of noise performance.
3. Suitably dimension the feedback network of the front-end and graph the final transfer function from input pressure to output voltage.

Structure		
Membrane thickness	h	1 μm
Vertical gap	g	1 μm
Poly-Si density	ρ	2390 kg/m^3
Normalized damping coefficient	b_{area}	350 N/(m/s)/m^2
Electronics		
Parasitic capacitance	C_l	5 pF
Op-amp voltage noise	$s_{n,OA,v}$	20 nV/$\sqrt{\text{Hz}}$
Maximum analog voltage swing	V_{max}	$\pm$ 2.5 V
Requirements		
Min. detectable pressure	$p_{a,min,dBSPL}$	33 dBSPL
Max. detectable pressure (acoustic overload point)	$p_{a,max,dBSPL}$	123 dBSPL
Min. detectable frequency	f_{min}	20 Hz
Max. detectable frequency	f_{max}	20 kHz

Com'è fatto un microfono?
Possiamo vederlo fatto così



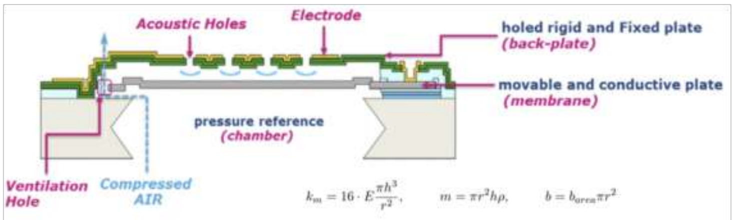
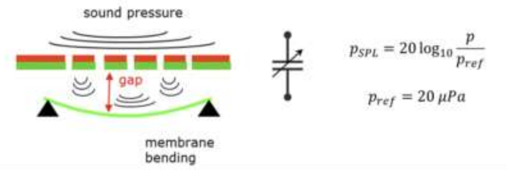


Figure 1: MEMS microphone sketch and spring-mass-damper formulas.



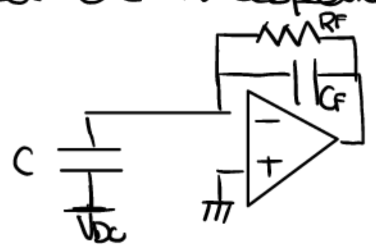
è un single ended capacitive sensing
Posso vedere il suono come una sinusoide
$p = p_A \sin(\omega_a t)$

La pressione in DC tra i 2 lati della membrana è uguale ma non in AC.

Data una pressione in pascal P_a [Pa] definiamo il livello in decibel come

$$P_{a,spl} = 20\log_{10}\left(\frac{P_a}{P_{ref}}\right) \quad [dB_{SPL}]$$ dove $P_{ref} = 20\mu Pa$

L'elettronica che mi aspetto è



La stiffness per una membrana che si piega è $K_m = 16 \cdot E \cdot \frac{\pi h^3}{r^2}$ (Km)?

• PUNTO 1) $\bar{y} = \frac{F}{K_m}$ il displacement è dato dalla forza sulla membrana fratto la stiffness

Devo cercare di trovare la noise equivalent pressure density.

$S_{Fn} = 4K_BTb$ (Force noise density)

Mi serve la relazione tra forza e pressione S_{Pn}

$$S_{Fn} = X \cdot S_{Pn} \longrightarrow \sqrt{S_{Pn}} = NEPD$$

So che $p = \frac{F}{Area} \rightarrow F = p \cdot Area$

$$S_{Pn} = \frac{S_{Fn}}{Area^2} \longrightarrow NEPD = \frac{\sqrt{4K_BTb}}{Area} \propto \frac{1}{\sqrt{Area}}$$

$$= \sqrt{\frac{4K_BTb_{area}}{Area}} = \sqrt{\frac{4K_BTb_{area}}{\pi}} \cdot \frac{1}{r}$$

Io voglio che il rumore sia ben bilanciato

Il rumore totale sarà 33dBSPL perciò devo andare in Pa

$$33 = 20\log_{10}\left(\frac{Pa}{Pref}\right) \longrightarrow \frac{Pa}{Pref} = 10^{\frac{33}{20}}$$

Perciò

$$Pa = Pref\, 10^{\frac{33}{20}} \; [Pa] \simeq 900\mu Pa$$

La massima pressione è $P_{Amax} = Pref \cdot 10^{\frac{P_{max}}{20}} = 28 Pa$ (FSR)

Adesso io lo divido per la banda so che la banda è $\simeq$ 20KHz perciò

$$\text{Noise density} = \frac{Pref}{\sqrt{20K}}$$

Perciò, io voglio che il tutto sia ben bilanciato perciò divido per 2 il rumore

$$\text{Rumore dispositivo} = \frac{Pref}{\sqrt{2}\sqrt{20K}} = \sqrt{\frac{4K_BT\,b_{area}}{\pi}} \cdot \frac{1}{r}$$

Attenzione è metà rumore ma dobbiamo mettere $\sqrt{2}$ perciò

$$\sqrt{\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$r = \frac{\sqrt{\frac{4K_BT\,b_{area}}{\pi}}}{\frac{Pref}{\sqrt{2}\sqrt{20K}}} = 30\mu m$$

Devo poi calcolare la sensitivity ma devo sapere dove sono nella FDT
• Calcolo un po' di parametri

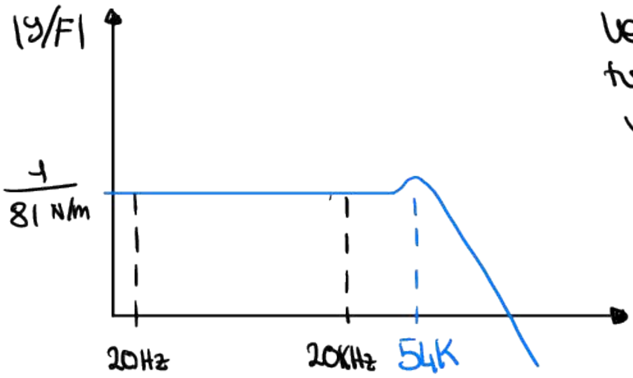
$$K_m = 16 \cdot E \cdot \frac{\pi h^3}{r^2} = 81\ N/m \qquad m = \pi r^2 h \cdot \rho = 0{,}69\ nKg \qquad b = b_{area} \cdot \pi \cdot r^2 = 10^{-4}\ Kg/s$$

La freq di risonanza è

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_m}{m}} = 54KHz$$

e il fattore di qualità che è $Q = \frac{\sqrt{K_m \cdot m}}{b} = 2{,}3$

Questo significa che il device funziona così



Vedo che la risposta è piatta attorno a tutta la banda che è esattamente quello che voglio.

Quindi adesso posso scrivere la sensibilità come

$$\frac{\Delta C}{P} = \underbrace{\frac{\Delta C}{y}}_{\frac{C_0}{g}} \cdot \underbrace{\frac{y}{F}}_{\frac{1}{K_m}} \cdot \underbrace{\frac{F}{P}}_{Area} = \frac{C_0}{g} \cdot \frac{1}{K_m} \cdot Area = 9{,}2\ \frac{fF}{Pa}$$

PUNTO 2

è legato sempre alle stesse considerazioni ma solo all'elettronica.
Vogliamo che la voltage noise density sia uguale a quella del dispositivo.
Supponiamo poi che il rumore della resistenza sia trascurabile.
Perciò voglio che la noise density dell'elettronica sia

$$ND_{elettronica} = \frac{P_{min}}{\sqrt{2}} = \frac{900\,\mu Pa}{\sqrt{2}}$$

Abbiamo quindi che

$$S_{OUT,n} = S_{Vn} \cdot \left(1 + \frac{C_0 + C_P}{C_F}\right)^2$$

Perché o C_0 o C_P non sono + piccole come al solito, (presumo C_0)

Perciò $S = \frac{\Delta V_{OUT}}{P} = \frac{\Delta C}{P} \cdot \frac{V_{DC}}{C_F}$

e quindi il rumore dato dall'elettronica sarà uguale a

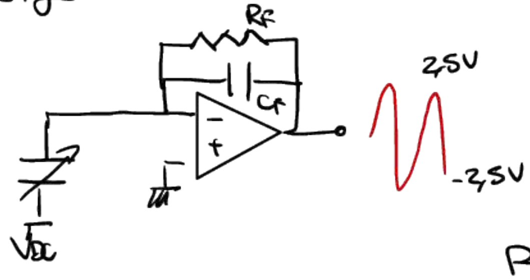
Così togliamo la dipendenza da CF.

$$\sqrt{S_{P,n}} = \frac{\sqrt{S_{V,n}} \cdot \left(1 + \frac{C_0 + C_P}{C_F}\right)}{\frac{\Delta C}{P} \cdot \frac{V_{DC}}{C_F}}$$ quando $C_0 + C_P \gg C_F$ allora $$= \frac{\sqrt{S_{V,n}} \cdot \frac{C_0 + C_P}{\cancel{C_F}}}{\frac{\Delta C}{P} \cdot \frac{V_{DC}}{\cancel{C_F}}} \quad \left[\frac{Pa}{\sqrt{Hz}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{S_{V,n}}\,(C_0 + C_P)}{\frac{\Delta C}{P} \cdot V_{DC}} \cdot \sqrt{BW} = \frac{900\,\mu Pa}{\sqrt{2}}$$ perciò $V_{DC} = 3{,}7\,V$

PUNTO 3)

Dobbiamo dimensionare la rete di feedback per andare a pieno full scale range



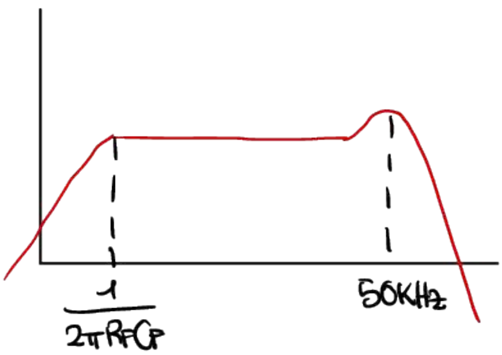
lo scale factor è

$$\frac{\Delta V_{OUT}}{P} = \frac{\Delta C}{P} \cdot \frac{V_{DC}}{C_F} = \frac{2{,}5\,V}{28\,Pa}$$

perciò $C_F = 9{,}2\,\frac{fF}{Pa} \cdot 28\,Pa \cdot \frac{3{,}7\,V}{2{,}5\,V} = 383\,fF$

che conferma quello che avevamo supposto prima $C_F \ll C_0 + C_P$

Dobbiamo adesso dimensionare la nostra resistenza



Noi decidiamo di fare sì che $\frac{1}{2\pi R_F C_F}$ sia a 20Hz

non perdiamo una decade prima perché tanto a 20 Hz non c'è niente e perdo solo 3dB.

$$R_F = \frac{1}{2\pi\, 383\,fF \cdot 20\,Hz} = 20\,M\Omega$$

Adesso devo controllare che il rumore come supposto prima sia trascurabile

$$\sqrt{S_{P,R}} \cdot \sqrt{BW} = \frac{\sqrt{\frac{4KBT}{R} \cdot \frac{1}{sC_F} \cdot \sqrt{BW}}}{2{,}5V/28Pa}$$

Supponiamo il caso peggiore con $s = 2\pi\, 20\,Hz$

$\simeq 188\,\mu Pa$

Notiamo che è ok (non ottimo ma ok)

Characterization: vedere che i parametri siano appropiati per gli obiettivi richiesti

Andiamo a vedere un metodo di caratterizzazione che tiene in modo adeguato il rumore e la stabilità. Questo metodo è conosciuto come allan varianza.

Caso di studio: navigazione inerziale senza GPS

Cosa succede se non possiamo usare il GPS e dobbiamo navigare? Sapendo la nostra posizione e usando i sensori inerziali potremo sapere dove siamo (questa tecnica si chiama dead reckoning)

In linea di principio potremo integrare l'accelerazione 2 volte per avere la posizione e integrare una volta l'output del giroscopio per ottenere l'angolo

- **position**: reconstruction of x, y and z

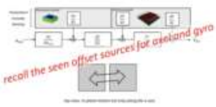
$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt = x_0 + \int_0^t \left[v_0 + \left(\int_0^t a(t)\, dt \right) \right] dt$$

- **angle**: reconstruction of θ, δ and γ

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \Omega(t)dt$$

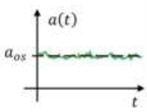
Ma questo è un caso ideale perché nella realtà avremo il rumore e offset. Ad oggi non si riescono ad usare MEMS consumer per fare questo.

- Let us assume (reasonably) a constant **offset** associated to the noisy sensor output. The equations can be written as:



$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(v_0 + \int_0^t a_s(t) + a_{OS} + a_{noise}(t)\, dt \right) dt$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \Omega_s(t) + \Omega_{OS} + \Omega_{noise}(t)\, dt$$



- Offset **quickly results in positioning errors** while **time** is passing:
  - e.g. a position error of 71 m
    - *after an integration for 2 minutes (120 s) of a **1 mĝ** offset*
  - e.g. an angle error of 60°
    - *after an integration for 2 minutes of a **0.5 dps** offset*
- In the following, we will first **assume** that at time $t=0$ such offsets can be perfectly **compensated** (at least at a reference temperature T_0):
  - with a digital calibration, if not natively possible in the MEMS design phase;
  - later, we will comment on effects of unavoidable offset drifts at $T \neq T_0$.

Nella realtà avremo un offset e del rumore.

Vediamo che anche con un piccolissimo offset abbiamo che dopo poco tempo abbiamo un errore molto grande

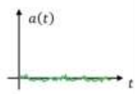
È fondamentale quindi che le calibrazioni per gli offset siano fatte estremamente accuratamente.

Supponiamo ora di aver annullato l'offset ma di avere del rumore bianco

- Offset is not the only non-ideality affecting the sensor output.
- We also have unavoidable noise, with the different physical origins that we studied deeply during the course (electronic, thermo-mechanical, quantization…).
- **Noise**, as a statistical quantity, cannot be compensated during a calibration phase, so we need to take into account its effect.

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(\left(\int_0^t a_s(t) + a_{noise}(t)\, dt \right) + v_0\, dt \right)$$

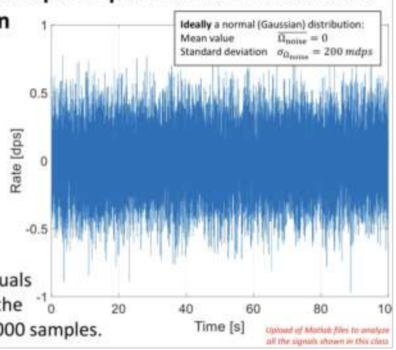
$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \Omega_s(t) + \Omega_{noise}(t)\, dt$$



- The **goal** becomes the **study of consequences deriving from integration of** (nominally) **"zero-mean" noise**!

Continuiamo le considerazioni semplificando la navigazione supponendo un accelerometro ideale e supponendo il giroscopio con rumore.
Supponiamo che non abbiamo movimento angolare ($\Omega=0$) perciò l'uscita del giroscopio sarà data solo dal rumore.
L'approssimazione di solo rumore bianco è realistica perché tipicamente lavoriamo con segnali modulati.

- The figure is **a 100-s noisy gyroscope output** with nominal standard deviation (**input-referred as an angular rate**) of 200 $mdps_{rms}$.
- The **output data rate - ODR** (frequency of output refresh) is of 200 Hz = 200 Sample/s. According to the sampling theorem, this corresponds to a maximum BW ≤ 100 Hz:
  - the **total number of samples** equals the **ODR** (200 Hz) multiplied by the **observation time** (100 s): → 20000 samples.



avrà una distribuzione gaussiana con teoria media ∅ ma nella realtà la media non sarà ∅

ODR: ogni quanto tempo viene preso un sample del rumore.

- **At any point in time**, the **angle** (which should be ideally 0) **can be estimated from the rate values up to the actual point**. We zoom on the figure of two slides ago for the first sampled time steps:

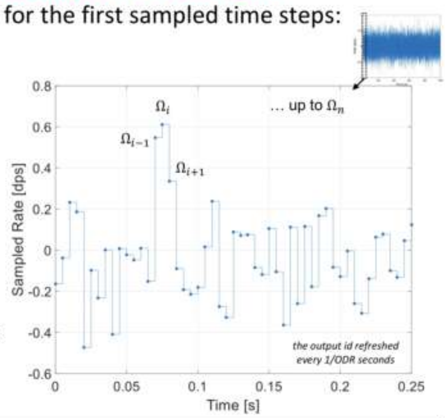
$$\theta=\theta_0+\int_0^t \Omega_s(t)+\Omega_{noise}(t)\,dt$$

$$\Omega_s=0 \qquad \theta_0=0$$

$$\theta=\int_0^t \Omega_{noise}(t)\,dt$$

- As the output is update at discrete points in time, we write the above integral as:

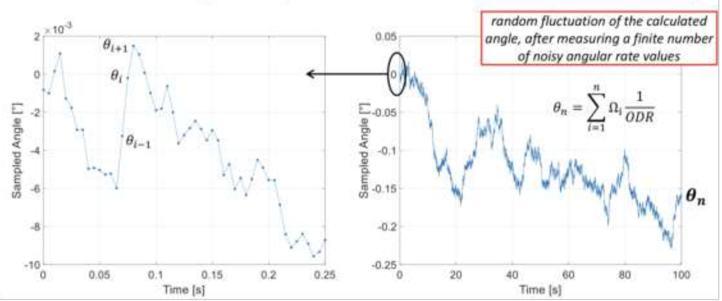
$$\theta_n=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\,\Delta t_i=\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\frac{1}{ODR}$$



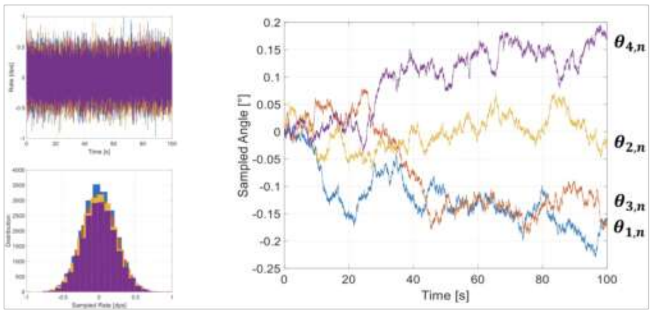
Se integriamo questo rumore cosa succede? Prima di tutto passiamo al dominio discreto vedendo i sample uno a 1

Perciò nel discreto possiamo scrivere l'integrale come →

- We define "**angle random walk**" the **random behavior that the angle undergoes** as a consequence of the **noise integration** described in the previous slide.
- An **example** of the result is given, **for just one random noise** distribution lasting 100 s (the one considered in the last two slides).



Vediamo che anche se il rumore ha media nulla ma noi lo studiamo su un numero finito di campioni allora questo significa che il valore finale non è nullo e può statisticamente cambiare

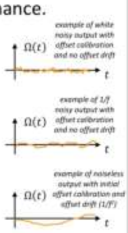


Questa cosa la chiamiamo angle random walk.

Allan variance

Vogliamo un grafico che ci dica subito le performance in ambito di offset drift e noise, e anche performance sulla stabilità dell'output.

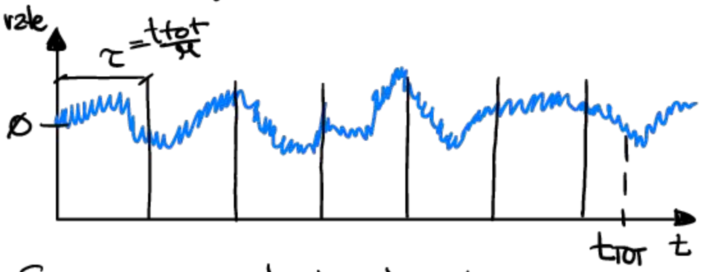
- We look for a single technique that simultaneously identifies effects of offset drift and noise (ARW) on the sensor performance.
- You can **see offset drift and noise in a similar way**:
  - white noise causes **rapid random variation of the output**;
  - 1/f noise causes **slower** random output **variations**;
  - offset drift causes **very slow variation of the output** (this variation depends e.g. on temperature or relative humidity in a deterministic manner; however if offset variations vs T/RH are not calibrated, the behavior can be assumed as random – we do not know how T/RH are changing) → $1/f^2$.
- Stability in time of the output signal (affected by noise and drift only) is calculated as the minimum average change in consecutive gyroscope rate measurements when analyzed under no rate over varying sampling times. The AV is defined so to capture this effect:
  - stability in an AV plot is qualified by the minimum rate and its corresponding observation time.



In questo caso teniamo conto di tutti i possibili rumori e anche l'offset drift (dato ad esempio dalla temperatura).

Stabilità è intesa come stabilità dell'output tra 2 campionamenti diversi.

Definiamo quindi l'Allan Variance:



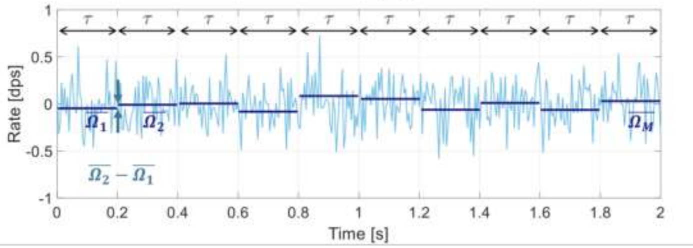
- **Acquire a signal** for an overall **time length t_{TOT}**.
- **Split** the acquisition interval **in M slots, each of** a same **duration τ**.
- Calculate the **average value $\overline{\Omega}_k$** of the signal **along each slot**.
- Calculate the **changes in consecutive measurements**.
- We **define the Allan Variance** for a specific observation interval τ the quantity:

$$\sigma^2_{AV,\Omega}(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \sum_{k=1}^{M-1} (\overline{\Omega}_{k+1} - \overline{\Omega}_k)^2$$

average for the k-th +1 measurement

average for the k-th measurement

average change in consecutive gyro measurements, each lasting an interval τ



Supponiamo di dividere il tutto in M intervalli uguali di durata τ chiamata observation time.

Per ognuno di questi intervalli calcoliamo il valore medio e li chiamiamo $\overline{\Omega}_1, \overline{\Omega}_2 \dots$

Adesso vediamo la distanza tra la media di un intervallo e l'altro, che possiamo scrivere come

$$\overline{\Omega}_{K+1} - \overline{\Omega}_K$$

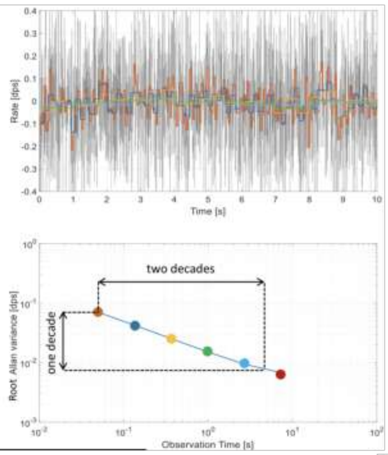
e da questa poi possiamo ricavare la varianza

$$\sigma^2_{AV}(\tau) = \frac{1}{2(M-1)} \cdot \sum_{K=1}^{M-1} (\overline{\Omega}_{K+1} - \overline{\Omega}_K)^2$$

abbiamo quindi ricavato la allan varianza.

Se adesso riduciamo l'intervallo τ le medie dei singoli intervalli fluttueranno di + mentre se aumentiamo τ le variazioni tra le medie saranno minori. Tuttavia dobbiamo prendere un numero M accettabile, almeno 10.

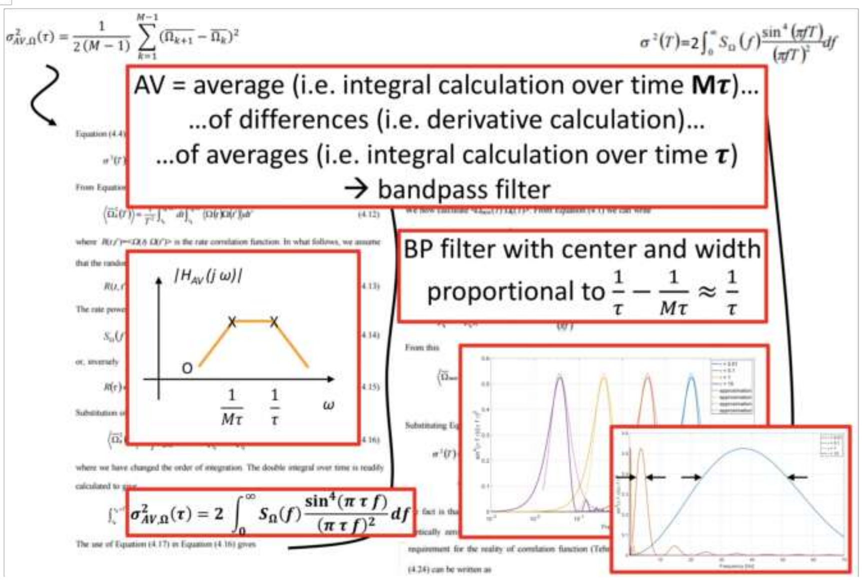
- For **white noise** only, one finds that the root **Allan Variance graph decreases with a slope equal to -½** in a log log scale ($1/\sqrt{\tau}$):
  - this is expected, as white noise gets averaged with the square root of the n. of samples, so with the averaging time τ.
- Let us see **how this is intuitively (and analytically) justified**.



Per il rumore bianco vediamo che l'allan varianza scende con $\propto 1/\sqrt{\tau}$

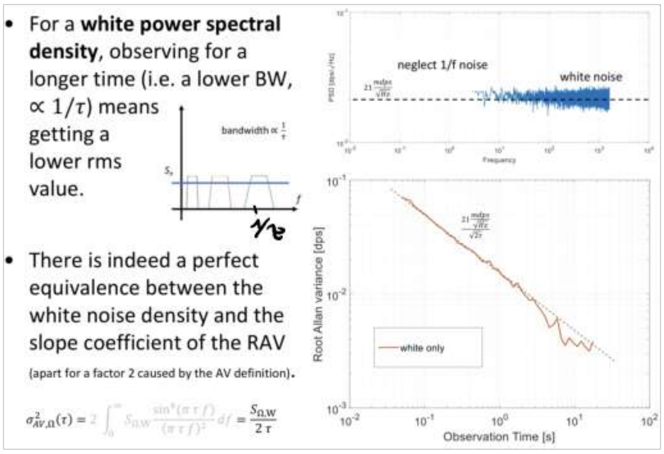
Questo grafico dell'allan varianza serve per vedere che componenti danno rumore all'uscita (?)

Portiamo l'allen varianza nel dominio della frequenza



Posso vederlo come un filtro passa banda centrato su $1/\tau$ e di banda $1/\tau$

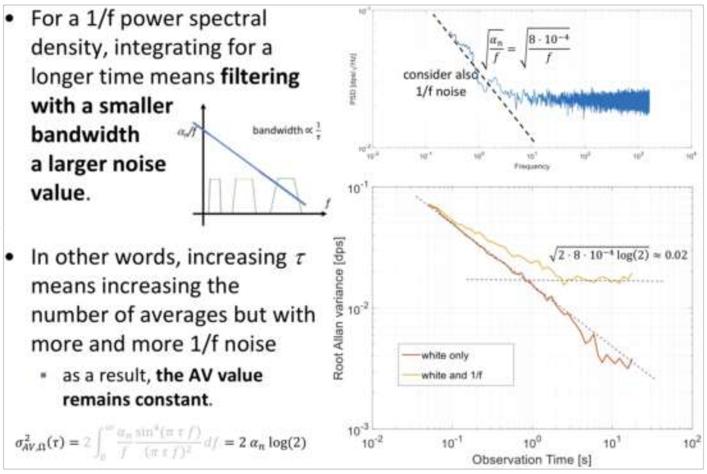
Cosa succede se abbiamo rumore bianco



So che in frequenza il rumore bianco è costante perciò ho che maggiore e minore sarà la banda del filtro dato dall'allan variance e quindi ho meno rumore

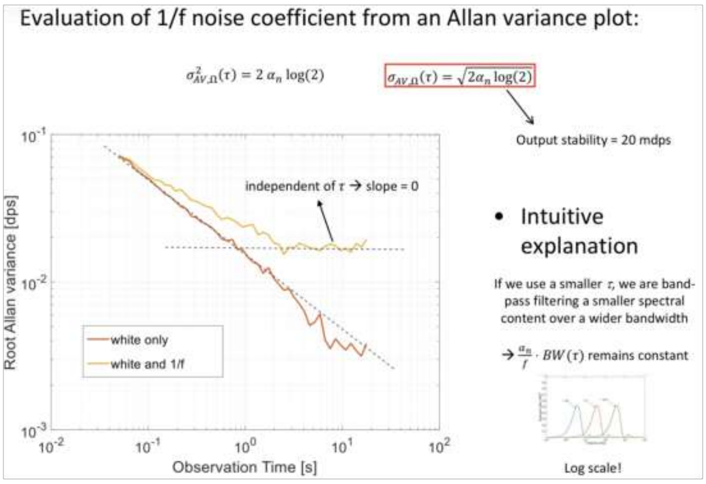
$$\sigma^2_{AV,\Omega}(\tau) = \frac{S_{\Omega,W}}{2\,\tau} \qquad \boxed{\sigma_{AV,\Omega}(\tau) = \sqrt{\frac{S_{\Omega,W}}{2\,\tau}}}$$

Ma per il rumore 1/f la cosa cambia



Se abbiamo pochi τ il grafico ci va a basse f ma avremo piccole banda, al contrario se aumentiamo τ avremo + banda ma ci sposteremo + avanti in frequenza

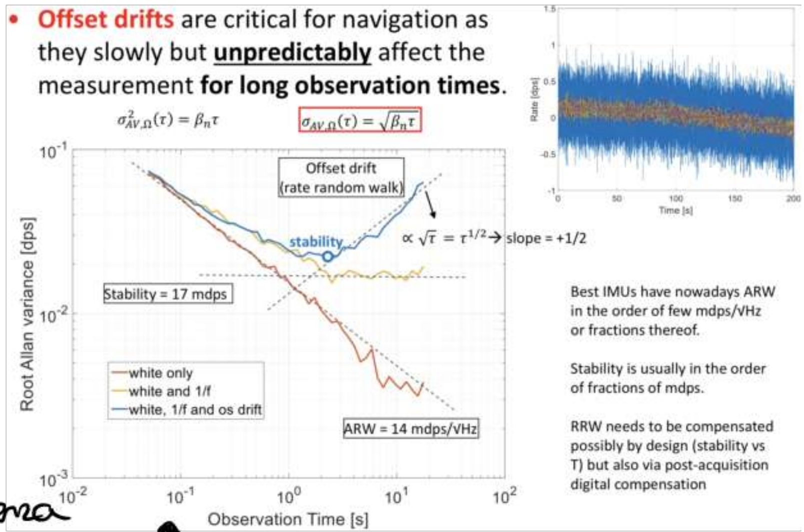
Notiamo che l'allan variance è una costante e vedendo il grafico dell'allan variance posso capire subito che ho rumore 1/f perchè vedo una costante



La parte piatta dell'allan variance viene prende il nome di stabilità perciò arrivo al limite per cui posso diminuire l'allan variance perciò arrivo ad un punto di stabilità.

E per quanto riguarda gli offset?

La stabilità la consideriamo come il minimo possibile intervallo tra la media di uno e l'altro intervallo.



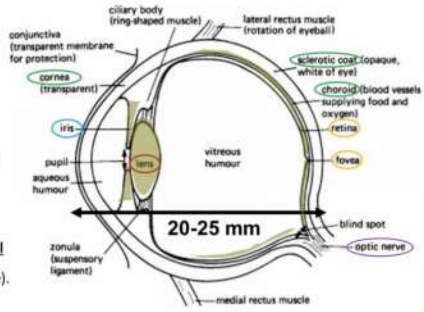
Se posso ricompensare l'offset in funzionamento lo faccio con una frequenza pari al minimo dell'allan variance (linea blu)

Negli esami potrebbe chiedermi partendo da un allan variance graph di ricavare i rumori ecc..
Sarà il caso di rivedere bene sta lezione!

La luce e i colori hanno una definizione che si basa sul modo in cui funzionano gli occhi umani. Perciò dobbiamo capire come funziona l'occhio umano.

Five major system components:

- Membranes
  - transparent to let the light in;
  - opaque to avoid backscatter within the optical globe.
- Iris
  - part of the choroid, it contracts or expands **to control the light amount entering the eye**;
  - the **opening (pupil) varies in diameter** between 1 and 8 mm;
    - this gives **roughly a 64:1 ratio of "programmable" brightness control** (it is not the only factor that allows the broad dynamic range of the eye).
- Lens
  - its major function is **to focus the image on the retinal plane**;
  - its **shape** is **controlled** by ciliary body muscles: it flattens to focus far objects; it becomes thicker to focus near objects (it is basically a flexible device that adjusts focus on demand)!
- Retina
  - it covers the whole inner posterior portion of the eye, **where light rays are imaged**;
  - **structured vision** is obtained from **photoreceptors** spread on the retina (our *"image sensor"*);
  - receptors density is the highest in the **central region** (**Fovea**).
- Optic nerve
  - brings stimuli **from the retina to the brain**, where **elaboration takes place**.



simplified horizontal cross-section of the human eye

La retina è la parte più interessante dell'occhio per noi visto che ci sono i fotorecettori.

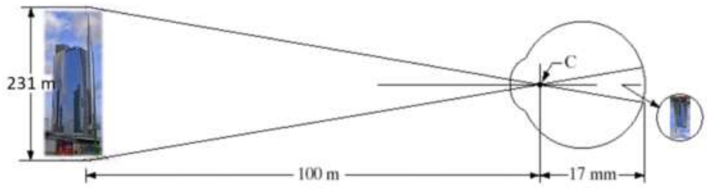
La dimensione della retina ~25mm non è diversa dalle dimensioni di un sensore full frame.

La retina però è curva ed è fatta in modo che tutti i punti sono equidistanti dalla lente così non c'è distorsione. Inoltre i fotorecettori dell'occhio sono molto maggiori rispetto ai pixel di qualunque camera. Nella retina poi la densità di fotorecettori non è costante ma c'è una regione centrale chiamata fobia dove abbiamo + fotorecettori questa regione è chiamata regione d'interesse.

The distance between the lens center and the retina (~ **eye focal length**) can vary thanks to ciliary muscles from approximately 17 mm to 14 mm.

From a focusing distance of **> ~ 4 m**, the lens exhibits its **lowest refractive power (most flattened)**.

With the dimensions in the figure one can easily find that the size of the tower on the retina is de-magnified to about 39 mm: → lenses in digital imaging will also apply a **demagnification**!



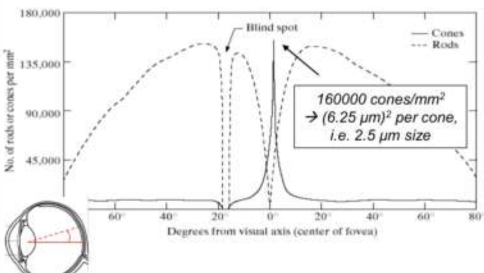
Another important point is that, in the human eye, it is not only the "sensor" size that determines the field of view: there is a **'central' region** (1.5 mm, ~ 50° field of view) **where the visual attention is the highest**.

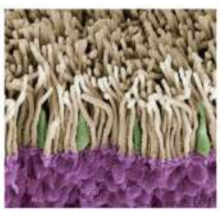
Fotorecettori

Nell'occhio abbiamo 2 fotorecettori coni e travi. A noi ci interessano solo i coni (che in realtà sono di 3 tipi) ognuno dei quali ha probabilità diversa di assorbire un fotone a una certa frequenza.
I coni funzionano solo con molta luce quando la luce è bassa usiamo le travi e perciò non vediamo il colore.
Ogni cono ha una connessione diretta al cervello tramite un nervo. Al contrario più travi sono connesse assieme con un un singolo nervo.

Distribuzione dei fotorecettori

- In the distribution below you can note a **blind spot** per eye (corresponding to the optical nerve termination). This is however in the peripheral area and it is compensated by stereoscopic vision and brain elaboration.
- To check your **poor rods density in the central part of the retina** try to look at a faint star in the night sky. Actually you'll better see it if you look at a point slightly shifted from the star shine.



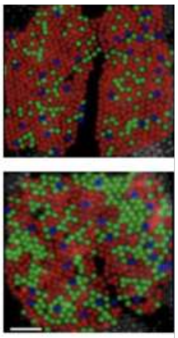

microscope image of the retinal tissue

We now focus on cones only as our primary interest is on color imaging

Abbiamo che i coni sono concentrati di più nella fobia mentre le travi nelle altre regioni.
Abbiamo anche un blind spot nell'occhio perché lì è dove si collega il nervo ottico.
E abbiamo anche ∅ travi nella zona della fobia questo significa che a basse luci nella zona di focus non vediamo una pera ma vediamo con la visione periferica.

Parliamo adesso solo dei coni

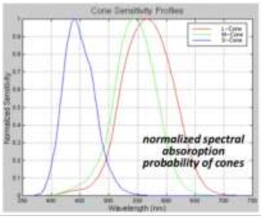
- These figures show the cones arrangement for two *"color-normal"* subjects. They are pseudo-color images: cones were falsely colored in order to represent the three classes.
  - cones classes are randomly distributed in both subjects;
  - in addition, the relative number of cones differs greatly between the subjects. Yet, both subjects have normal color vision.



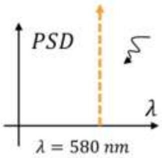
- On-average values: **65.3%** of the cones contain **L** (*"red"*), **33.1%** contain **M** (*"green"*), **1.6%** contain **S** (*"blue"*) photo-pigments.

Cone type
S (OPN1SW) - "tritan", "cyanolabe"
M (OPN1MW) - "deutan", "chlorolabe"
L (OPN1LW) - "protan", "erythrolabe"

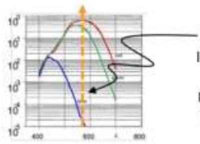
- The cones are actually named after their sensitivity (**probability of absorption**) in the short (**S**), medium (**M**) or long (**L**) wavelength range.
  - the **S** pigment has a peak response at about **445 nm**. It is insensitive (i.e. almost zero probability of light absorption) to wavelength longer than about 520 nm;
  - the other two types of pigments (**M** and **L**) are maximally sensitive to **535** and **575 nm** respectively. Both respond over almost the whole visual range.



Noi vogliamo riprodurre immagini come le vede l'occhio perciò dobbiamo seguire delle curve che sono uguali alla photonic line



this light ray is NOT orange. Its only property is to oscillate at 517 THz, carrying an energy of 2.1 eV

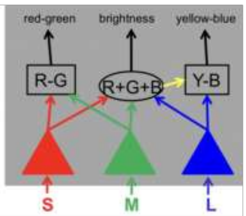


however, a large number of such light ray will excite, on average, S, M and L pigments with a certain probability, and thus a certain ratio. This ratio, elaborated by the brain, gives us a *sensation* of orange

- How is color perceived by the brain? Color results from the interaction between radiation spectrum, the cones, the nervous system and the brain.

Dopo che i coni sono attivati ho che per interpretare il colore ho un ulteriore passaggio nel cervello, cioè rielaborano il tutto

Information is first re-elaborated:
- in a channel giving the **red to green ratio**;
- in a channel giving the **blue to yellow (Y=R+G)** ratio;
- in a channel giving the **overall brightness**;
- → a different but still a 3D color space.



Cioè passiamo da SML a yellow-blue brightness e red-green.

Possiamo quindi dire che il colore è una grandezza a 3 dimensioni

La risposta S (short range) sarà uguale a

$$S = \int_{380}^{780} s(\lambda) \cdot r(\lambda) \cdot t(\lambda) \cdot \underline{s_{cone}(\lambda)} d\lambda$$

illuminante — riflettanza dell'oggetto da guardo — trasparenza membrana occhio $\simeq 1$ — risposta del cono S

e la stessa cosa per M e L

$$M = \int_{380}^{780} s(\lambda) r(\lambda) \cdot t(\lambda) \cdot m_{cone}(\lambda) d\lambda$$

$$L = \int_{380}^{780} s(\lambda) r(\lambda) t(\lambda) \ell_{cone}(\lambda) d\lambda$$

visto che questi sono integrali definiti ho che data una PSD che va nel mio occhio ho 3 numeri che definiscono quello che vedo

Vogliamo cercare di imitare questo nel mondo digitale

Una cosa importante è che le coordinate del colore cambiano quando cambia l'illuminante (es quando con la luce rossa vedo i colori diversi) il cervello fa un bilanciamento del bianco automatico e quindi quando vedo il bianco in presenza di un illuminante il cervello si adatta e mi fa capire che quello è bianco.

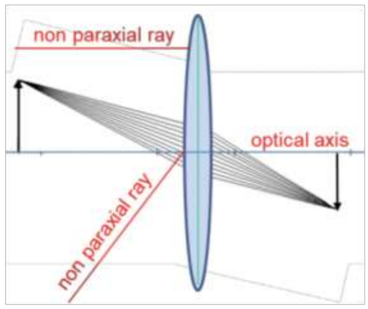
CMOS sensor basics 2

La qualità principale di una fotocamera è data dall'ottica. L'ottica darà anche delle limitazioni spaziali (affligge la risoluzione, se dobbiamo scegliere il n° di pixel è saggio basarci su queste limitazioni).
Le dimensioni dell'ottica mi determinano il numero di fotoni sul sensore e quindi mi limita la SNR.
Data una fonte di luce e un oggetto che la luce riflette e un ottica è possibile ricavare il n° di fotoni che mi arrivano sul sensore?

Geometric optics

Tipicamente le lenti sono chiamate sferiche perché hanno forma come intersezione di 2 sfere anche di raggio diverso.

I raggi sono parassiali se sono vicini al centro della lente e se formano piccoli angoli attorno allo stesso.

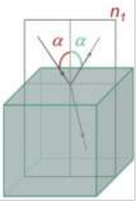


Ricordiamo poi la legge di Snell

Snell's law describes reflection and refraction at the boundary between media with different refractive index:

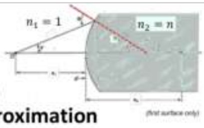
- incident, reflected and refracted rays belong to a single plane;
- **the incident angle α is the same as the reflected one**;
- **the refraction angle β is related to α through the Snell's law:**

$$n_1 \sin(\alpha) = n_2 \sin(\beta)$$



Nel caso di raggi parassiali possiamo scrivere $n_1 \alpha = n_2 \beta$
Possiamo quindi calcolare la formula della lente in paraxial approx.

The general equation of a **thin lens in paraxial approximation** relates the distance of the object (s_1) and of the image (s_2) from the lens center.



$$\left(\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_0}\right) = (n-1)\frac{1}{R_1} \qquad \left(\frac{1}{s_2} - \frac{n}{s_0}\right) = (n-1)\frac{-1}{R_2}$$

$$\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

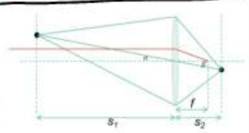
It is thus possible to relate object and image distance from the lens to geometrical and optical parameters (note: radii should be taken with their sign).

Possiamo quindi calcolare il rapporto tra la distanza dell'oggetto S1 e quella dell'immagine S2.

The following formula is obtained by defining the **focal length *f*** as a single parameter that depends on the lens **geometry** (R_1, R_2) and **material** (n):

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f} \qquad with \qquad \frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

questa è 1/lunghezza focale



- it relates the object and image distance from the lens (s_1 and s_2) to the focal length f of the lens;
- in **typical** digital imaging **systems** it holds $s_1 >> s_2$ and images are formed close to the focal length ($s_2 \sim f$).

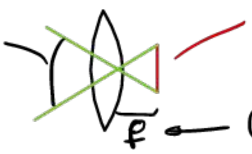
note: lens materials are glass and plastic (n between 1.3 and 2)

rays coming from objects at infinite distance s_1 are focused exactly on the lens focal plane

1/S1 è così piccolo che tipicamente è trascurabile rispetto a 1/S2.

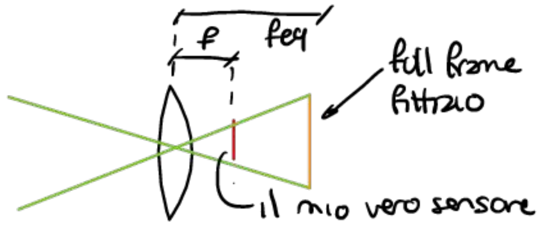
Nella scorsa lezione abbiamo visto che l'occhio ha un angolo di visione di circa 50°. Allora vediamo che possiamo estendere il concetto alle ottiche

Field of View



Una volta c'erano solo i sensori Full frame e quindi si era unita la lunghezza focale con la field of view.

Adesso però abbiamo sensori di dimensioni sempre diverse e quindi la FOV cambia e non c'è più l'associazione tra lunghezza focale e FOV.
Per semplicità si può introdurre l'equivalent focal lenght come: la focal lenght di un sensore fullframe che ci darebbe la stessa FOV del nostro sistema



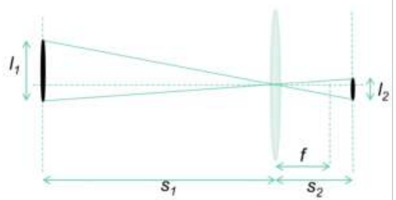
(Tipo sul telefono che ci dicono che è 28mm e noi capiamo che è un grandangolo).

Negli esercizi tranne quando detto altrimenti la lunghezza focale sarà sempre quella vera.
Abbiamo poi anche uno zoom (tipicamente minore di 1)

By definition, the magnification factor m represents the ratio of a dimension l_2 in the image with respect to the dimension l_1 in the object:

$$m = \frac{l_2}{l_1}$$

Through simple counts one can verify that it is equal to the ratio of the distances from the lens:



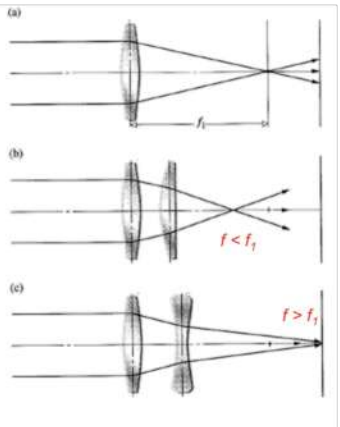
$$m = \frac{s_2}{s_1} \sim \frac{f}{s_1}$$

Area is magnified by a factor m^2:

- this is useful to calculate which area, belonging to the scene, each pixel captures photons from.

L'area del pixel corrisponde all'area dell'oggetto moltiplicata per un fattore m^2, dove $m << 1$.

- As we cannot use a variable-shape lens, **more lenses with variable distance** can be combined to obtain a variable focal length.
- Adding a positive (**convex**) **lens decreases** the **focal** length.
- Adding a negative (**concave**) **lens increases** the **focal** length.
- **Moving** the **relative** lens **distance changes** the **focal** length.



*Systems of multiple lenses can be **approximated** through a **lens** of **equivalent focal** length. We thus hold this assumption and proceed assuming that **a lens system** is always described through a **single f value**.*

Tipicamente non usiamo solo una lente ma + di una così spostandole relativamente posso cambiare la focal lenght.

Nelle camere più pro tipicamente possiamo avere che

This is usually achieved by:

1. a **first convex** group (large lens aperture and light gathering, low refractive power);
2. a **second, movable, concave group** mostly responsible for zoom control;
3. a **third convex group** that handles the focusing using small movements.

*Design of such complex lens systems is done using simulators (known as **raytracing** tools).*

This type of simulator can account for light propagation in simple paraxial approximation, or account for other effects like aberrations and diffraction.

Nei telefoni abbiamo molto meno spazio ma cerchiamo comunque di mettere + lenti questo perché
1) La lunghezza focale è molto piccola e quindi il sensore deve essere piccolo altrimenti la field of view viene troppo grande

2) Inoltre visto che voglio il sensore piccolo la focale dovrebbe focalizzare tutto in poco spazio. Per facilitare allora usiamo + focali

Comportamento realistico delle lenti

Abberrazione: fenomeni che fanno sì che ci sia un peggioramento della qualità dell'immagine. Immagine e oggetti reali non hanno la stessa forma (i punti e i piani non appaiono giusti)

L'abberrazione diventa evidente quando:

Aberrations become evident when two phenomena are considered:

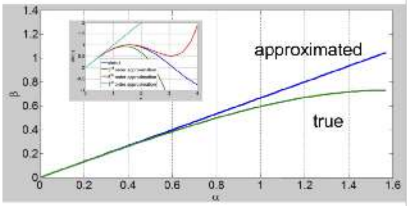
- errors due to first order **paraxial approximation**: $\sin(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots$ (known as **3rd order** or **spherical aberrations**, as they appear as soon as the 3rd-order term is considered in a spherical lens).
- the fact that radiation is **not monochromatic** and the **refractive index** (e.g. of glass) is a **function** of the **wavelength**, $n_1 = n_1(\lambda)$ (known as **chromatic aberrations**).

- Effects of aberrations are:
  - a **resolution** worsening;
  - the appearance of **color fringes**.
- Aberrations can be mitigated:
  - via **hardware** (lens shape and material);
  - in **operation** (closing the aperture);
  - via **software** (their math origin is known).

Studiamo il caso della spherical abberration

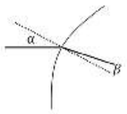
Small angle approximation:

- $\sin(\alpha) = \alpha$
- $\sin(\beta) = \beta$
- $\beta = n_1/n_2 * \alpha$



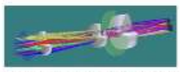
True solution:

- $\beta = \arcsin[n_1/n_2 * \sin(\alpha)]$



From a mathematical point of view you should re-consider the thin lens without paraxial approximation – or at least taking into account third-order terms.

Calculations quickly become hard to solve and require raytracing tools.

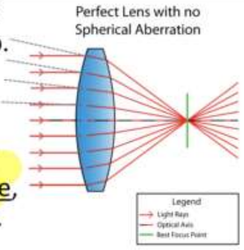


From a **system point of view** we analyze the origin of spherical aberrations, their effects and possible ways to correct them.

For large incident angles, the true refractive power is thus larger than in the approximation.

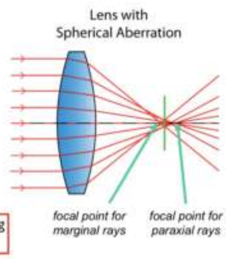
Vediamo che abbiamo un'approssimazione tra il caso ideale e quello reale. Maggiore è α maggiore è la rifrazione.

They occur as spherical surfaces are not suited to make "ideal" lenses, though easy and cheap.



Consider light coming from a point like object at ∞ distance, and the ideal spherical lens. Aberrations are due to increased refraction of rays when striking a spherical lens near its edge, compared to those striking close to the center.

Marginal and paraxial rays have thus different focus points (**at large angles α, refraction power is larger**). The point of best focus with the smallest *"disk of least confusion"* is illustrated as the thick green line.



A point-like object is not imaged as a point:

- → resolution worsens!

There will be (almost) no use in designing pixels smaller than the spot size!

Capiamo che è inutile fare i pixel + piccoli di quello che è il disk of least confusion perché non abbiamo + definizione.

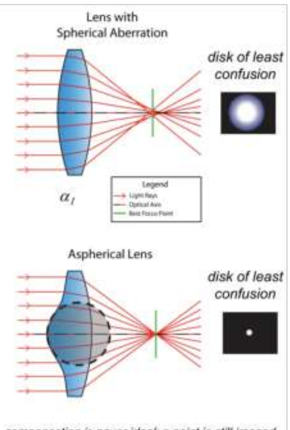
Com'è possibile immaginare questa abberrazione diventa peggiore quando il diaframma è tutto aperto. perché ho che i raggi di luce arrivano + sui bordi.

Un modo per ridurre l'effetto di questa abberrazione è l'aspheric lens cioè delle lenti che non sono più dei pezzi di sfere, queste lenti però costano un botto.

Spherical aberrations can be avoided using **aspheric lenses**.

An aspheric lens is a lens whose **surface profiles at the edges are not portions of a sphere** or cylinder. It is typically more complicated to build and therefore more expensive. **Plastic** is preferable with respect to glass in this sense.

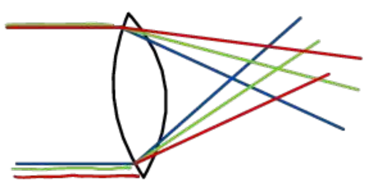
The definition of the surface profile takes into account third-order terms and reduce by a large amount the effects of aberrations.



compensation is never ideal: a point is still imaged as a spot, however with much smaller size.

Abberrazione cromatica

l'indice di rifrazione non è costante ma dipende dalla lunghezza d'onda



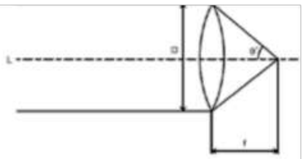
In questo caso chiudere l'apertura non è molto utile

Esistono però materiali che compensano un po' l'abberrazione cromatica.

Numero F# di una lente

The **F# number** of a lens is defined as the **ratio** between the **focal length** and the **lens diameter** (or aperture) *D*,

$$F_\# = f/_D$$



It therefore defines also the maximum aperture cone of the focused rays:

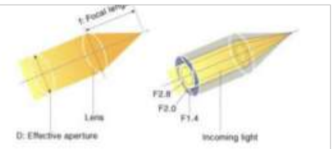
$$\theta = \arctan\left(\frac{D}{2f}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2F_\#}\right)$$

It is an important parameter in the optics of a camera as it affects:
- **gathered light signal (and SNR);**
- **spatial resolution;**
- (**depth of field;**)

Our interest, to answer our initial questions of today, is on the first two points.

A noi ci interessa per sapere l'SNR e la spatial resolution.

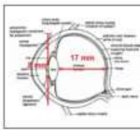
Lenses of high-end cameras usually have adjustable aperture.
- a lens is characterized by the F# corresponding to the widest allowed opening.



A lens with a **smaller F#** provides **brighter images** (more light in).

DSC lenses use a standard F-stop scale, which includes numbers corresponding to the sequence of powers of the square root of 2.

Mobile phone lenses do not use such "fixed" scale:
- they have either a fixed F#...
- ... or two cameras at different F#:
  - e.g. Iphone X has a dual rear camera with F# 1.8 and F# 2.2, and a front camera with F# 2.2.



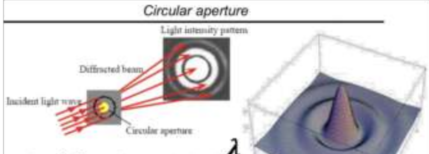
For human eyes, the aperture of the pupil can range from 8 mm, wide open in dark, to 1 mm in bright light. For an infinite object distance, the focal length of the eye is equal to the distance between the lens and the retina, ~ 17 mm. The resulting F# number ranges between ~2, quite a bright one, and ~16.

Diffrazione

Quando la luce passa in un buco si crea la diffrazione è molto visibile quando l'apertura è comparabile con la lunghezza d'onda della luce. Questo non è il nostro caso ciononostante abbiamo comunque che se abbiamo un punto a distanza infinito questo sul sensore si presenterà come la figura di diffrazione e non come un punto.

è così perché l'apertura è circolare.
Perciò un punto lo vedo come un disco.

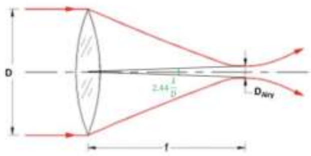
Circular aperture



$$\sin(\vartheta) \sim \vartheta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

- The lens circular aperture diffracts light. We are interested in evaluating how a **far, on-axis, monochromatic point-like** source is imaged on the sensor.

- Incoming light can be considered parallel. Huygens theorem can be applied.



- The first Airy disk diameter turns out to be:

$$\boxed{d_{Airy} = 2.44\frac{\lambda}{D}f = 2.44\cdot\lambda\cdot F\#}$$

- **A point-like object is not imaged as a point:**
  - → resolution worsening!

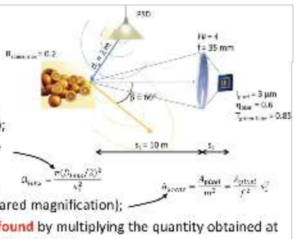
The **higher the F#**, the **larger** the diffraction and therefore the **spot size** of an ideal lens.

There will be (almost) no use in designing pixels smaller than the spot size!

C'è un trade off tra abberrazione e diffrazione per quanto riguarda il numero F#.

Rispetto alle domande iniziali allora

Calculation of the photons/s impinging on a single pixel:
- start with **source PSD** in W/nm;
- calculate how this is (on average) **reflected by an object**, per unit area of reflection and solid angle (W/nm/m$_2$/sr);
- calculate the **solid angle** from which the **lens** is seen by a point in my object;
- calculate the **area** that – in the **scene** – **corresponds** to a **pixel** (through the squared magnification);
- the light impinging on the pixel area is found by multiplying the quantity obtained at point 2, by the two formulas found at points 3 and 4.



You will see in a **numerical exercise** that photon flux (so, the pixel photocurrent) is thus proportional to pixel area and to the $F_\#$ number squared inverse:

$$\boxed{\phi_{pixel} \propto \frac{A_{pixel}}{F_\#^2}}$$

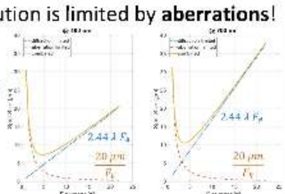
- at typical pixel size and F#, for generic scenes of variable light intensity, you will find photocurrents in the order of <0.1 to >100 fA per pixel.

Come la risoluzione spaziale viene limitata dall'ottica?

Minimum diffraction disk occurs at short λ and **wide-open lens**.

However, for wide-open lenses, resolution is limited by **aberrations**!
- the $F_\#$ at which **best optical resolution** is achieved is typically two stops below the widest aperture, **i.e.** $F_\#$**=4 - 5.6**. In this case diffraction-limited **resolution has a spot**:

$$d_{Airy} = 2.44\ \ 400\ nm\ \ 4 = \mathbf{3.9\ \mu m}$$



At other λ or $F_\#$, resolution worsens.
Mobile phones, having small $F_\#$, usually suffer from aberrations.

In order **not to worsen the resolution with sensor spatial sampling**, the **pixel size** should be **comparable to the numbers given above**:
- **pixel sizes ranging between 2 μm and 6 μm match this target.**
  - larger pixel size may worsen the resolution and cause aliasing (why?);
  - smaller pixel size worsens other performance (see next slide) but prevent aliasing.

Posso avere stesse performance con un telefono?

A **smaller sensor** allows, in **mobile photography**, to obtain the **same field of view of digital cameras**. To fit within a small thickness, **high refractive power is needed**
- → relatively large aberrations...
- → focal length adjusted by combining acquisition from multiple cameras.

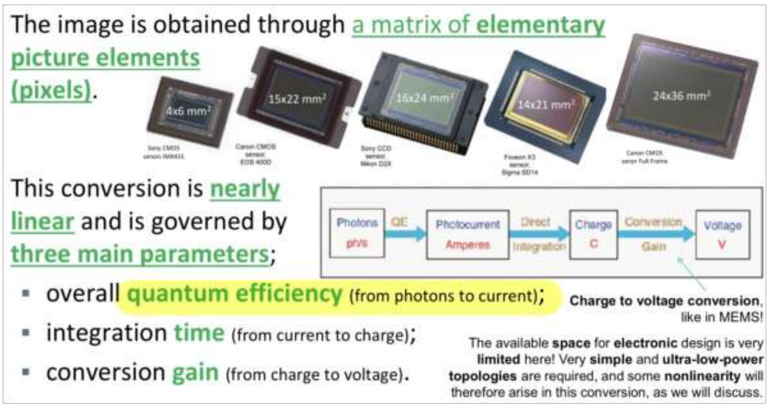
For the same number of pixels, a smaller sensor size corresponds to a smaller pixel size (often smaller than optic limitations)
- → in mobile imaging, the **resolution** is almost **always limited** by the **optics** rather than by the sensor (and in particular by aberrations);
- → in mobile imaging, the **amount of light per pixel** (for the same exposure time) **is small** and this will affect the **pixel performance**...

In general we conclude that **native performance of mobile imaging are unavoidably lower than digital cameras**
- such a difference is **partially compensated** by the heavy role of digital post processing of mobile images... and simply by the fact that most images are viewed only through a relatively small mobile phone screen!

Active Pixel Sensors 1

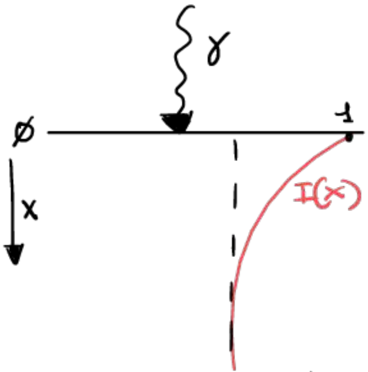
Per ogni singolo pixel vogliamo le 3 coordinate del colore.

Fotogenerazione in una giunzione PN



Abbiamo 3 step principali, da fotoni a photocurrent la quale integrata nel tempo da una carica la quale la convertiremo in un uscita di tensione.
Occhio che la conversione carica/tensione è da fare per ogni pixel quindi dobbiamo usare pochissima area (Non possiamo usare un OPAMP per tutti i pixel)

Tutto inizia quando il fotone arriva sulla giunzione



L'intensità I del fotone possiamo scriverla come un esponenziale decrescente

$$I(x) = I(0)\, e^{-\alpha(\lambda) \cdot x}$$

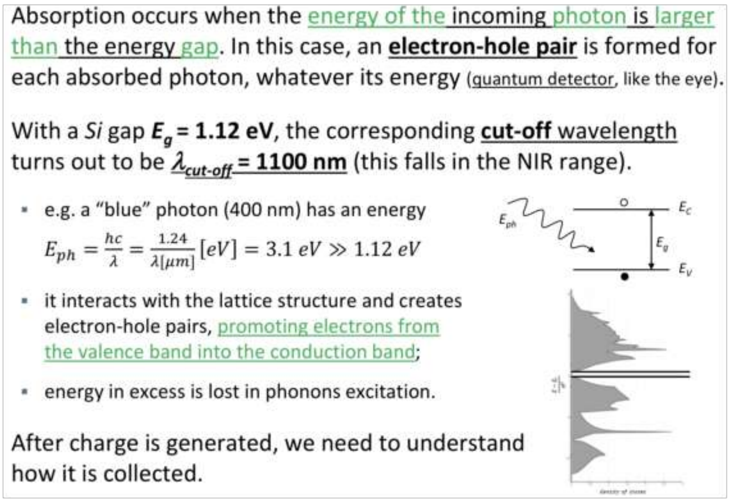
Perciò l'intensità all'interno del materiale avrà andamento a esponenziale decrescente

Tipicamente a noi interessa solo l'intensità tra 2 estremi la quale possiamo scriverla come:

$$\text{Percentuale di luce assorbita tra } x_1 \text{ e } x_2 = \frac{I(0)\left[e^{-\alpha(\lambda)x_1} - e^{-\alpha(\lambda)x_2}\right]}{I(0)}$$

Ovviamente l'absorption lenght dipende dalla lunghezza d'onda.

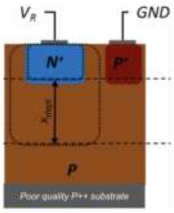
Generazione di Carica



i fotoni devono avere un energia maggiore di 1,12 eV, ma tutta la luce visibile ha energia maggiore di questa quindi nessun problema.
Quando un fotone con energia sufficiente entra nel silicio avviene fa sì di promuovere un elettrone in banda di conduzione e rimane una lacuna in banda di valenza

Dobbiamo ora decidere la topologia del nostro fotodiodo.
Usiamo la teoria + facile cioè una giunzione PN reverse biased.

In the simplest case, the **active area of the pixel is a reversely biased PN junction** (usually N^+ over P-epitaxial layer).



Typical doping values: $V_R > 0$
- peak of the N^+ implant: $N_D \sim 10^{20}\ cm^{-3}$
- uniform P-type epitaxial layer: $N_A \sim 10^{15}\ cm^{-3}$;

A few important parameters to understand the true operation of the image sensor:

- **depletion layer width** (e.g. at a typical reverse voltage $V_R = 3.3\ V$): $$x_{depl} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{Si}(V_R + V_{bi})}{qN_A}} = 1.5\mu m$$
- **diffusion length** at $\tau_n \sim 1\text{-}5\ \mu s$, $D_n \sim 10\ cm^2/s$ (epitaxial layer): $x_{diff} = \sqrt{D_n\tau_n} > 10\ \mu m$
- **diffusion length** at $\tau_n < 0.1\ ns$: $D_n \sim 3\ cm^2/s$ (surface layer): $x_{diff} = \sqrt{D_n\tau_n} < 50\ nm$

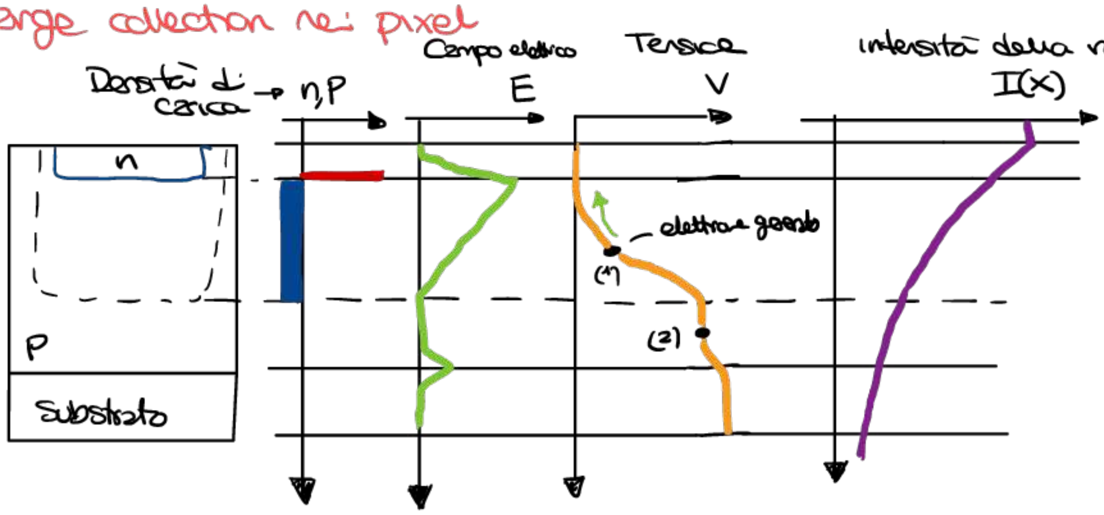
lifetime is dependent on Si quality (impurities, proximity to surface, ecc…, not only doping)

Prendiamo l'epitaxial layer dopato poco perché così la zona depleta sarà più grande

formula per calcolare la zona depleta.

La diffusion lenght è la tipica distanza che un elettrone può fare senza la presenza di un campo elettrico. Noi sappiamo che nella zona depleta abbiamo il campo elettrico ma dalle altre parti no non abbiamo nulla.

Charge collection nei pixel



L'elettrone generato 1 per drift si sposterà per drift, il 2° elettrone non sente il campo elettrico quindi per diffusione si muove e arriverà nella zona depleta la quale poi lo farà spostare per drift.

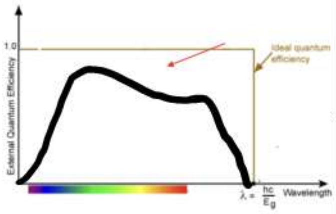
Quantum efficiency

Tutti i fotoni generano coppie elettrone lacuna? e tutti gli elettroni generati arrivano?

The ratio of collected electrons over incident photons is called **quantum efficiency**.

$$\eta(\lambda) = \frac{collected\ electrons}{incident\ photons}$$

Usually η is < 1 due to
- **surface recombination at short λ** (junction depth $x_1 > 1/\alpha(400\ nm)$);
- **uncollected carriers at long λ** (depletion depth $x_2 < 1/\alpha(700\ nm)$);
- transmittance $T_{Si}(\lambda)$<1 at Si-air interface.



$$\eta(\lambda) = \frac{I_0 e^{-\alpha(\lambda)x_1} - I_0 e^{-\alpha(\lambda)x_2}}{I_0} T_{Si}(\lambda) = \approx (e^{-\alpha(\lambda)x_1} - e^{-\alpha(\lambda)x_2}) T_{Si}(\lambda)$$

Nel mondo ideale con materiale infinito e puro allora la quantum efficiency è sempre 1

Nella realtà abbiamo molti difetti perciò è possibile che gli elettroni che arrivano vicino alla giunzione (quelli con poca energia) si ricombinino prima di arrivare a causa dei difetti.
Poi abbiamo anche che i fotoni ad alta potenza (rosso) hanno + probabilità di ricombinazione perché viaggiano di + nel silicio

Another commonly used parameter is the **responsivity**, which gives the ratio of the output current to the input optical power.

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{i_{ph}}{P_{in}} = \frac{q \cdot collected\ electrons\ per\ second}{E_{ph} \cdot incident\ photons\ per\ second} = \frac{q}{E_{ph}}\eta(\lambda) = \frac{q\lambda}{hc}\eta(\lambda)$$

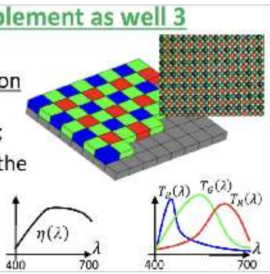
Definiamo un altro parametro chiamato responsività che mi dà la ratio tra la corrente di output e la potenza ottica

Però così generano solo un elettrone per fotone e non possiamo sapere se è rosso/blu/verde. Sappiamo che dobbiamo avere 3 grandezze quindi al posto di usare un singolo pixel monocolore possiamo mettere dei filtri monocolore sui pixel.

To retrieve color information, **a camera should implement as well 3 different functions of the incoming wavelength**:

- there are different approaches to this, the most common being the use of a mosaic of **Color Filter Arrays** (CFA), where μfilters are deposited on top of the Silicon layer;
- the **overall quantum efficiency** of each pixel becomes the product of the Silicon quantum efficiency and the filter transmittance.

$$\eta(\lambda) = \left(e^{-\alpha(\lambda)x_1} - e^{-\alpha(\lambda)x_2}\right)T(\lambda)T_{FIL}(\lambda)$$



Segnale e Rumore

$$PSD(\lambda) = \frac{dP(\lambda)}{d\lambda}$$

detta la photocurrent ho che

$$i_{ph} = \int_{Si} PSD(\lambda)\cdot R(\lambda)\, d\lambda$$

noi supponiamo che la potenza sia confinata tutta ad una lunghezza d'onda $\bar{\lambda}$

$$i_{ph}(\bar{\lambda}) = P(\bar{\lambda})\cdot R(\bar{\lambda})$$

Posso poi scrivere la corrente anche come:

$$i_{ph} = I(\bar{\lambda})\, A_{px}\cdot R(\bar{\lambda}) = I(\bar{\lambda})\, A_{px}\cdot \frac{q\,\lambda}{hc}\cdot\eta(\bar{\lambda})$$

Area del pixel

è l'energia del fotone a quella lunghezza d'onda

$$= \Phi_{ph}(\bar{\lambda})\cdot A_{px}\cdot q\cdot\eta(\bar{\lambda})$$

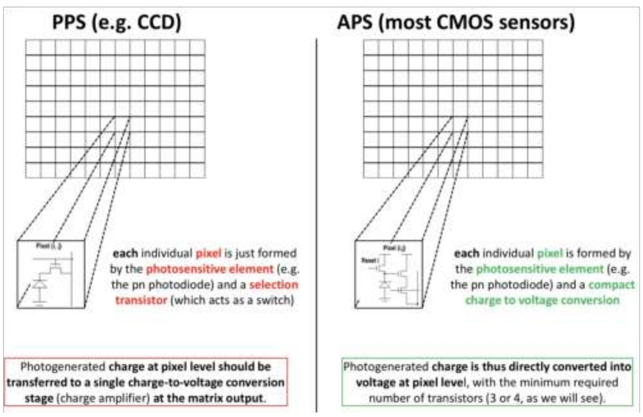
è il photon flux.

Però nella realtà abbiamo che l'agitazione termica possa dare abbastanza energia da liberare un elettrone. Questo effetto è chiamato dark current.

Possiamo distinguere 2 tipi di rumore

- Rumore che fluttua nel tempo
- Rumore che fluttua nello spazio (differenza tra i guadagni o negli offset ecc.. questo rumore si vede nell'immagine finale).

Passive Pixel vs Active Pixel



Nei passive pixel abbiamo solo il photodetector nel pixel mentre nell'active pixel abbiamo già l'elettronica dentro.

Ma perché ha vinto l'active pixel contro il passive pixel

- CCD/PPS readout architecture requires **minimal pixel overhead (almost no electronics)**, making it possible to design very small pixel sizes.
- In PPSs the charge transfer is passive and therefore does not introduce **pixel to pixel variations known as** fixed-pattern noise (FPN).
- In PPSs, charge transfer readout is **serial with** limited readout speed.
- CCDs/PPSs are fabricated in specialized technologies solely optimized for charge transfer. The disadvantage of using such **specialized technologies** is the inability to integrate other camera functions (processing) on the same chip.
- **Voltages needed for charge transfer** are rather high (e.g. -8/15 V) for fast drift transport.
- A **larger pixel area** directly requires higher voltage or longer time to hold an acceptable efficiency in transferring the charge, making it **difficult to reduce consumption** at an acceptable frame rate.
- The charge to voltage conversion at pixel level enables a simple voltage "scanning" mechanism, **high-speed readout** and **window-of-interest operations.**
- It however introduces **gain/offset nonuniformity (FPN, which needs thus to be compensated).**
- CMOS image sensors are **mostly** fabricated in **standard technologies and thus can be readily integrated with other processing and control circuits**, enabling analog and digital processing (e.g. FPN compensation!) in the same chip.
- **Voltages** needed for CMOS operation are usually in the order of **2.5 V to 5 V.**
- In CMOS APS, a **larger pixel area does not require larger voltages.**
- Because of a CMOS sensor X–Y **address scanning scheme, only selected pixels consume power** at any given time.

In light of all previous comments:
- CMOS sensors **dissipate** less power **than CCDs of equal size**;
- **the difference in power consumption grows as chip size and frame rate increase.**

APS 2

Come abbiamo detto nei pixel attivi abbiamo anche l'elettronica

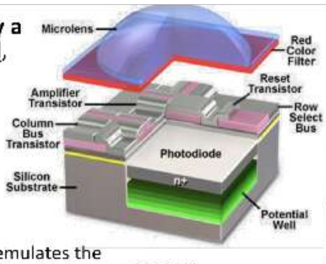
CMOS ACTIVE PIXEL SENSOR

il fotodiodo è come un generatore di corrente. la carica che generiamo è

$$Q_{ph} = \int_0^{t_{in}} i_{ph}(t)dt = i_{ph} t_{in}$$

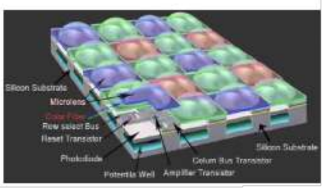
dove i_{ph} è la photocurrent e visto che noi facciamo foto a oggetti fissi allora $i_{ph}(t)$ lo possiamo considerare costante

The **photodiode is only a part of the active pixel**, which includes as well **transistors**, electrical **interconnections**, pixel-level **μ-lenses** and **color filters**:
- the mostly adopted **CFA configuration** is the **GRGB** pattern (**G** is used twice as it better emulates the photopic curve than B/R, and lets **more light in**).



scheme and scanning electron microscope cross-sectional view of an active pixel

Additional filters (not shown) are placed on top of the whole sensor to:
- **cut-off UV/IR light** (RGB filters let some light pass in the IR range);
- **avoid aliasing** by "blurring" images to ensure a spatial frequency of the optical signal lower than $f_{Nyq} = 1/(2 \cdot d_{pixel})$. This is not needed **if** diffraction and aberrations already blur the image enough, compared to pixel size (small pixels are used in mobile applications).

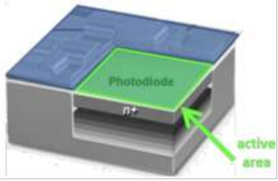


Abbiamo anche delle microlenti che servono a mandare tutta la luce sul fotodiodo e non sui transistor.

Inoltre tipicamente c'è un filtro anti infrarossi e anche un filtro anti aliasing

Fill factor è il rapporto tra area del fotodiodo e area dell'intero pixel

The fill factor is the **ratio** of the pixel **active area** over the **whole pixel area**, including electronics, interconnections, dead Si area...
- the FF for PPS can be as high as >90%;
- typical fill factor for the simplest active pixel sensor (**APS** with 3 transistors) and front-side illumination is **in the order of 35% to 45%.**
- the lower the fill-factor, the lower the signal to noise ratio (see next slides).



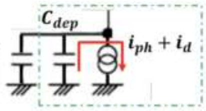
Usando le microlenti possiamo migliorare di molto il fill factor.

Come facciamo l'elettronica per un pixel? Noi generiamo della carica e come nel caso MOS base potremo integrare la carica. Ora dove integriamo questa carica? potremo fare una terra virtuale e integrarla su un'altra capacità (come abbiamo fatto fino ad ora con i MOS), questa tecnica è chiamata integrazione indiretta, ma richiede troppa area.
Posso allora usare l'integrazione diretta, integro la photocurrent + darkcurrent sulla stessa capacità del fotodiodo.

If the anode sees only high impedances, the photocurrent i_{ph} and the dark current i_d are **integrated over a capacitance** that sums:

- the diode depletion capacitance C_{dep};
- the gate capacitance of one transistor, C_g.

$$C_{dep} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{Si} A_{pd}}{x_{depl}}$$



PN-junction photodiode small-signal model

This kind of integration which occurs directly on the anode capacitance is called <u>**direct integration**</u>.

Assuming to first reset the photodiode reverse bias, the <u>voltage across the capacitance **decreases during integration**</u>. This **charge-to-voltage conversion gain**, measured in μV/electron, is governed just by one parameter (the **integration capacitance**) and is almost linear:

$$G = \frac{\Delta V_{out}}{N_{el}} = \frac{Q_{ph}}{(C_{dep}+C_g)N_{el}} = \frac{qN_{el}}{(C_{dep}+C_g)N_{el}} = \frac{q}{(C_{dep}+C_g)}$$

e.g. with 1 fF capacitance the conversion gain is about 160 μV/e⁻

Integriamo la corrente direttamente su Cdep e Cg (questo perché dopo vedremo che abbiamo il gate di un MOS collegato lì)

Se voglio fare sì che ci sia integrazione qui devo avere che ho impedenza ∞.

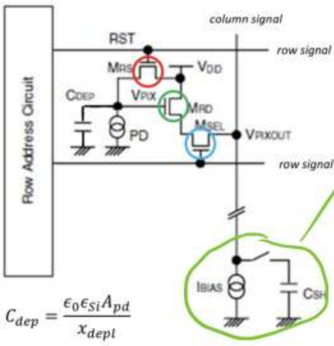
Possiamo quindi calcolare il conversion gain.

Ci bastano solo 3 Mosfet come elettronica.

According to previous slides, we can get **direct integration** and **fast scan** if we guarantee (i) <u>**high input impedance**</u> seen by the anode and (ii) <u>**low output impedance**</u> towards the column bus.

The **simplest active pixel to readout the photocurrent** within a large matrix is formed by the PN junction and <u>**three transistors**</u>:

- a transistor M_{RD} arranged in a <u>**source follower** configuration to buffer the signal</u> to the output node with low impedance;
- a reset transistor M_{RS} <u>whose gate is pulsed on **to reset (*begin*) the pixel operation**</u> before a new image acquisition is taken;
- a <u>row-selection</u> transistor M_{SEL} that latches the voltage to the column bus when the pixel is to be **read** (i.e. at the ***end*** of the "electronic" exposure).



$$C_{dep} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{Si} A_{pd}}{x_{depl}}$$

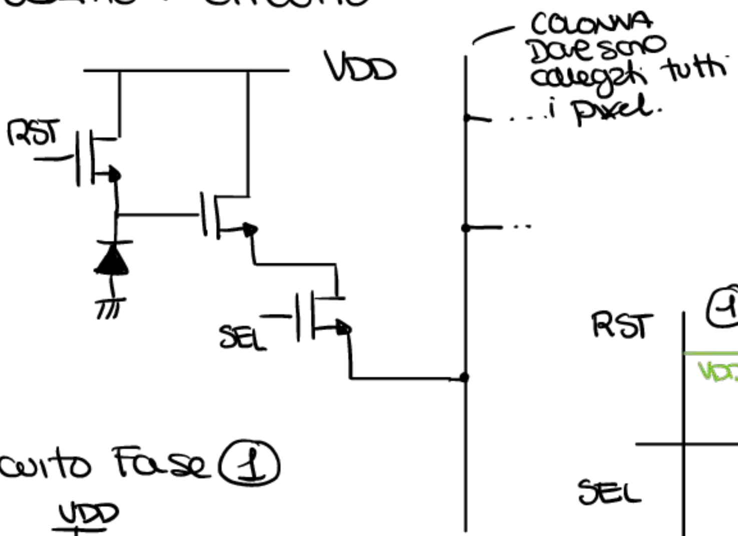
M_{RS} and M_{SEL} can be seen as switches (initially ideal, then with nonidealities).

Sono tutti NMOS transistor

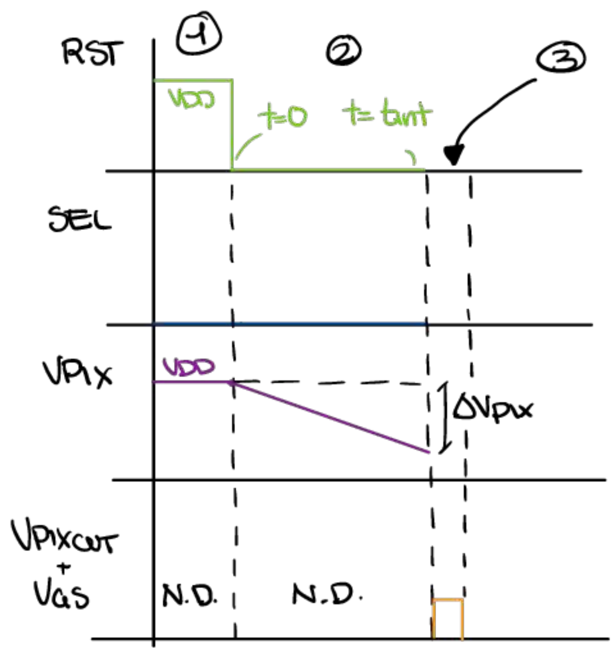
MRS e MSEL vengono usati come interruttore. Il rimanente transistor ha la funzione di Source Follower

Questo gen di corrente non fa parte del pixel ma è condiviso con tutta la colonna.

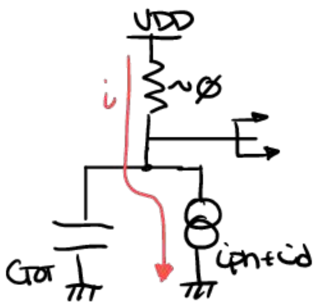
Studiamo il circuito



Ho 3 fasi
1) Reset
2) Integration
3) readout.

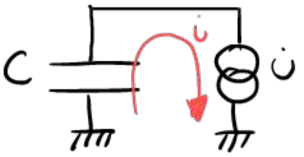


Circuito Fase 1



Visto che R è molto piccola la tensione sull'anodo è ≃ VDD

Circuito Fase ②



La tensione sul condensatore va calando perché era caricato a VDD.

$$V_{PIX}(t) = V_{DD} - \frac{\Delta Q}{C_{dep}+C_g} = V_{DD} - \frac{(i_{ph}+i_d)\,t_{int}}{C_{dep}+C_g}$$

Allora $\Delta V_{PIX} = \dfrac{(i_{ph}+i_d)}{C_g+C_{dep}} \cdot t_{int} = (\Phi_{ph} \cdot q \cdot \eta \cdot A_{PIX} \cdot FF + i_d)\dfrac{t_{int}}{C_g+C_{dep}}$

Possiamo quindi scrivere che

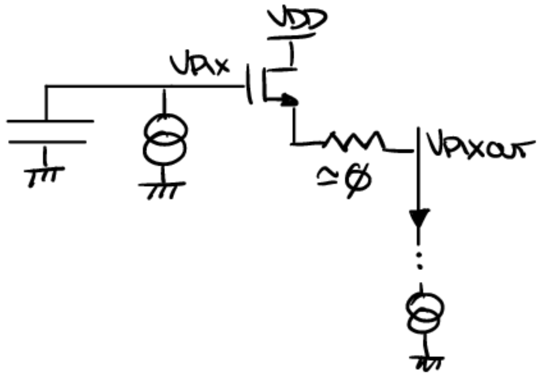
Fill Factor

$$\frac{\Delta V_{PIX}}{\Phi_{ph}} = \frac{q\,\eta\,A_{PIX} \cdot FF \cdot t_{int}}{C_g + C_{dep}} = G \cdot \eta A_{PIX}\, FF \cdot t_{int}$$

è la sensitività del pixel.

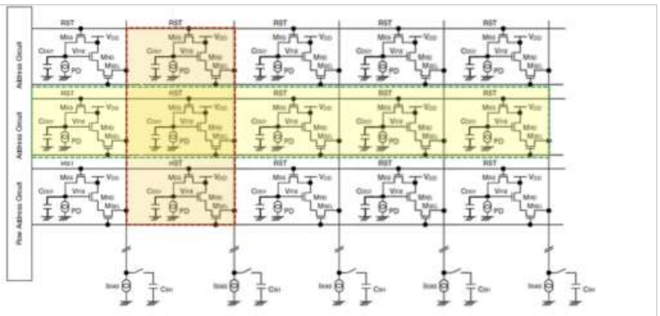
conversion gain

Circuito fase ③ Readout.



all'output abbiamo VPIX − VGS del mosfet

Non ci sarà uno shutter meccanico per decidere l'intervallo d'integrazione della luce, facciamo tutto elettronicamente usando questi 2 switch.



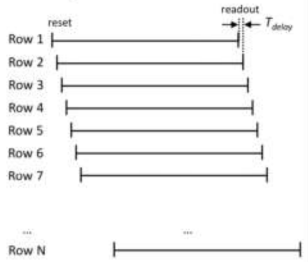
According to the described operation

- all the pixels of the same row have their reset transistor simultaneously active, and then, they have their selection transistor simultaneously active. Therefore, they **integrate light during the same time interval** (from reset end to readout);
- on the contrary, all the pixels of the same column have their readout transistor M_{RD} connected **sequentially** to a single column output:
  - they **are thus readout in a sequential manner**.

leggiamo le righe nello stesso momento ma non le colonne.
Noi vogliamo che l'intervallo d'integrazione sia uguale per tutti quindi dobbiamo mettere un delay tra i diversi reset.

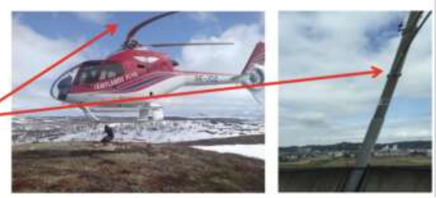
However, the total exposure time of each pixel in the image should be the same!

- **if integration ends at different time instants** (impossibility to have simultaneous readout for different rows) **then integration needs also to start at different time instants** for the pixels of different rows.



As a consequence, in order to have the same exposure time for all pixels, the reset signal that triggers the charge integration inside each pixel must be delivered with the same delay T_{delay}. This kind of operation is called "**rolling shutter**" mode.

In other words, all the pixels acquire the image for the same amount of time but **not all parts of the image are recorded at exactly the same time**: this may produce **noticeable distortion** of fast-moving objects relative to the camera.



Apparentemente vedendo la sensitività ci parrebbe che la risposta del pixel sia lineare alla quantità di luce. Nella realtà non è così come vedremo ora.

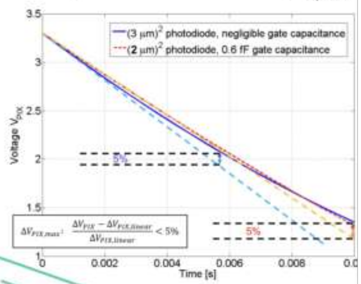
Abbiamo infatti visto che $\Delta V_{PIX} \div \dfrac{1}{C_{dep}+\dots}$ ma la C_{dep} dipende da ΔV_{PIX}.

quindi il comportamento non è lineare.

The photodiode junction capacitance is a function of the reverse bias, giving **a nonlinearity** in conversion gain G and sensitivity $\frac{\Delta V_{PIXOUT}}{\Phi_{ph}(\lambda)}$

$$C_{dep}(V_{PIX}) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{Si} A_{pd}}{x_{dep}(V_{PIX})} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{Si} A_{pd}}{\sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_{Si}(V_{PIX}+V_{b.i.})}{qN_a}}}$$

The constant gate capacitance luckily mitigates the effect.



Numerical example:

- $(3\ \mu m)^2$ pixel area with x_{dep}=1 μm;
- $(180x400)nm^2$ 4-nm-thick SiO_2 gate.

$C_{dep} = \frac{\varepsilon_{Si} A_{pd}}{x_{dep}} = 0.9\ fF$

$C_g = \frac{\varepsilon_{ox} A_g}{x_{ox}} = 0.6\ fF$

Usually, **acceptable** linearity errors are in the **order of 5-7%** (the human eye itself is rather nonlinear! The increase in C_{dep} reduces gain and delays saturation).

La full scale range è:

As the voltage across the pixel decreases, the PN junction approaches the built-in condition.

At the saturation condition:

$$\Delta V_{PIX,max} \sim V_{DD}$$

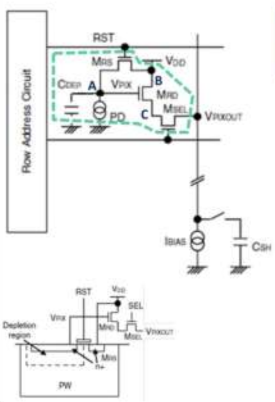
the potential well of the diode is completely full of electrons. Any electrons in excess flows out of the well eventually creating blooming to neighbor pixels.

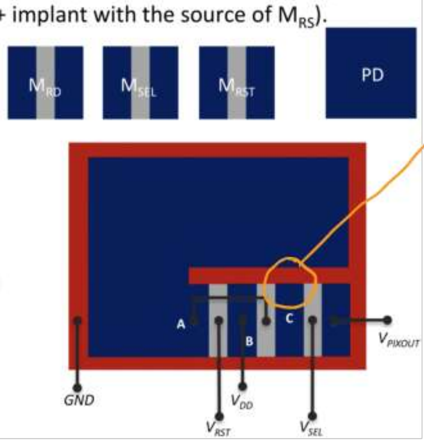
The correct signal information is completely lost for saturated pixels.

← Ad esempio in quest'immagine avremo solo un paio di pixel che saturano ma per effetto blooming abbiamo che + pixel saturano

Miglioramento dell'allocazione di spazio dei transistor sul pixel

- Where possible the transistor implants are shared to save space (e.g. the PD shares the N+ implant with the source of M_{RS}).





in pratica overlappano i vari mosfet così risparmiamo molto spazio.

SNR nella topologia a 3 transistor

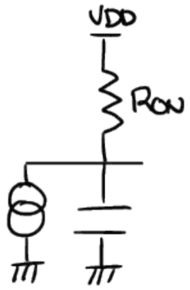
To evaluate the signal to noise ratio for a given photo- and dark current i_{ph} and i_d, we need to take into account:

- current **shot noise**: $S_{i,shot} = 2q\,(i_{ph} + i_d)$ $\left[\frac{A^2}{Hz}\right]$
- **kTC noise** due to the periodical reset of the anode capacitance connected to the MOS *"on"* resistance: $S_{V_{Ron}} = 4\,k\,T\,R_{on}$ $\left[\frac{V^2}{Hz}\right]$
- **other ("readout") noise** contributions: **quantization** noise that occurs in the ADC (usually at column level before multiplexing to the output), **1/f** and **thermal** noise of the **source follower**...
  - typically made negligible (→ not discussed in depth but verified in the CAD class).

S_x indicates a power spectral density, σ_x^2 indicates a variance, σ_x indicates a standard deviation

Iniziamo calcolando il rumore KTC.
Il circuito eq sappiamo essere (Nella fase di reset)

è un rumore indipendente dal segnale!!



$$S_{v_{Ron}} = 4K_BTR_{ON} \quad [V^2/Hz]$$

Qesto rumore è integrato su una banda pari a

$$BW = \frac{1}{4R_{ON}(C_g + C_{dep})}$$

Perciò $\sigma^2_{V,KTC} = \dfrac{4K_BTR_{ON}}{4R_{ON}(C_g+C_{dep})} = \dfrac{K_BT}{C_g + C_{dep}} \quad [V^2]$

Possiamo scrivere qesto valore anche in termini di carica

$$\sigma^2_{q,KTC} = \frac{K_B \cdot T}{C_g + C_{dep}}(C_g + C_{dep})^2 = K_BT(C_g + C_{dep}) \quad [C^2]$$

← è per qesto che si chiama rumore KTC

Ma cosa ci interessa il rumore nella fase di reset?
Ci interessa perché con qesto rumore carichiamo C e quindi il valore da cui parte l'integrazione dipende dal rumore.

• Shot Noise

$$S_{i,shot} = 2q(i_{ph} + i_d) \quad A^2/Hz$$

La banda equivalente è $\dfrac{1}{2t_{int}}$ (è un gated integrator), perciò

$$\sigma^2_{i,shot} = \frac{q(i_{ph}+i_d)}{t_{int}} \quad [A^2]$$

Anche qesto posso scriverlo in funzione della carica

$$\sigma^2_{q,shot} = \sigma^2_{i,shot} \cdot t_{int}^2 = q(i_{ph}+i_d)t_{int} \quad [C^2]$$

Qesto è un signal dependent noise source.

Rumore di quantizzazione

Errore dovuto dal fatto che digitalizziamo il segnale

$$LSB = \frac{VDD}{2^n}$$

$$\sigma^2_{quant} = \left(\frac{VDD}{2^n\sqrt{12}}\right)^2 \quad [V^2]$$

Anche qesta la posso scrivere in funzione della carica

$$\sigma^2_{q,quant} = \left[\frac{VDD}{2^n\sqrt{12}}\cdot(C_g+C_{dep})\right]^2 \quad [C^2]$$

Perciò possiamo scrivere il rapporto segnale rumore come:

$$SNR = 20\log_{10}\frac{S}{N} = 20\log_{10}\frac{i_{ph}\cdot t_{int}}{\sqrt{K_BT(C_g+C_{dep})+q(i_{ph}+i_d)t_{int}}}$$

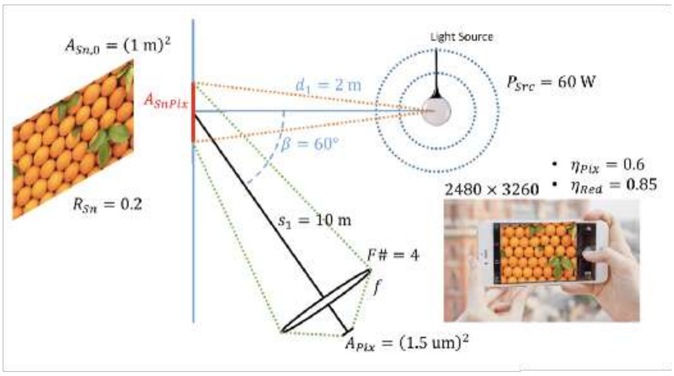
(considerando trascurabile il rumore di quantizzazione)

+ aumentiamo l'integration time t_{int} + aumenta l'SNR e quindi a noi va bene. Possiamo aumentare t_{int} finché non andiamo alla saturazione dei pixel.
A parità di pixel il sensore + grande avrà meno SNR.
Dopo circa SNR >30dB noi non riusciamo a vedere differenza.

1.12.2021 Esercizio CMOS 2h

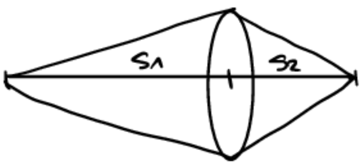
We use a smartphone to take a picture of a basket of oranges. A lamp with 60-W emitting optical power illuminates the scene, which reflects light as a Lambertian reflector with a 0.2 coefficient. Oranges are 2 m away from the light source, and we are 10 m away from the scene. Compared to the direction orthogonal to the scene surface, we are off by 60°. Our smartphone features a sensor with 3260x2480, 1.5 μm-side pixels, with 0.6 quantum efficiency. The photograph is shot with an F-number of 4. Fig. 1 sketches the situation.

- Evaluate the focal length that is suited to fit 1 m^2 of the scene in the final picture.
- Calculate the photon flux per unit area incident on one pixel, in $[ph/s/m^2]$.
- Find the photocurrent generated within a red pixel (transmittance of 0.85).
- Verify whether an anti-alias filter is required.



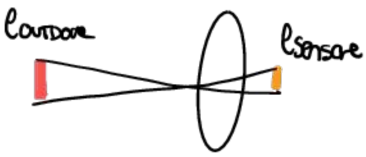
T_{red} alla frequenza d'interesse è 0,85.
Noi ci aspettiamo che la luce riflessa abbia $\lambda = 650$nm arancione.

PUNTO 1)
Ricordiamo la lens maker formula



$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{1}{f}$$

Nel nostro caso $S_1 \gg S_2$ quindi $1/S_1$ è trascurabile
perciò la lunghezza focale è $f \simeq S_2$
Quando abbiamo un oggetto ad una certa distanza da una lente abbiamo che

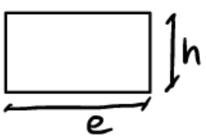


$$m = \frac{l_{arancia}}{l_{sensore}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{f}{S_1}$$

(fattore di magnificazione)

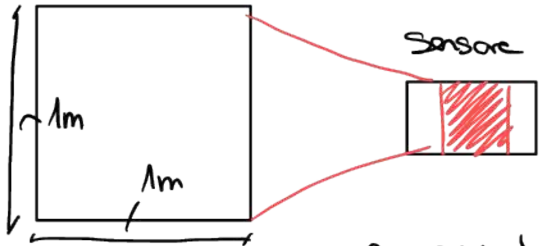
Perciò scegliere la lunghezza focale cambia il fattore di magnificazione

Noi vogliamo che un area di 1m×1m vada su un sensore di esatte dimensioni



$h = l_{Pix}\cdot 2480 = 1{,}5\mu m\cdot 2480 = 3{,}7$ mm

$l = l_{Pix}\cdot 3260 = 4{,}9$mm



Perciò il fattore di magnificazione deve essere

$$m = \frac{37mm}{1m} = 3,7 \cdot 10^{-3}$$

scelgo questa dimensione perché è la più limitante

e quindi ottengo

$$f = m \cdot s_1 = 37mm.$$

• PUNTO 2

Noi sappiamo che il fattore di magnificazione funziona anche per i pixel perciò il pixel prenderà luce solo da una certa porzione della scena.
Ma non tutta la luce che va su quel punto della scena verrà rilevata dal pixel perché ho rifrazione e riflessione anche in altre direzioni.

Dovrò quindi trovare
- area del pixel
- solid angles → lenti
- optical power → reflected light intensity.

} Con questi 3 calcoliamo Φ_{pn}

Iniziamo

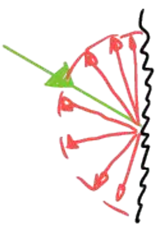
$$\frac{P_{opt}}{4\pi r^2}$$

La potenza ottica cala con la distanza perché questa distanza si deve sparpagliare su + area

Noi sappiamo che a una distanza di 2 metri ci sono le zanche quindi ho un intensità pari a

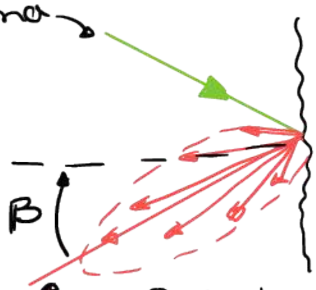
$$I = \frac{P_{opt}}{4\pi r^2} = \frac{60W}{4\pi(2m)^2} = 1,19\ W/m^2$$

CONCETTO IMPORTANTE
Noi conosciamo la legge di Snell ma quella vale solo con oggetti stile specchio. All'opposto quando abbiamo una superficie rugosa abbiamo che la luce viene riflessa in modo isotropico



L'intensità per unit solid angle sarà $I/2\pi$

Per semplicità noi consideriamo un mix tra le 2 leggi
Cioè che si espandono con questa forma



Questa si chiama Lambertian reflection e l'intensità della luce

$$\frac{I}{\pi}\cos(\beta)$$

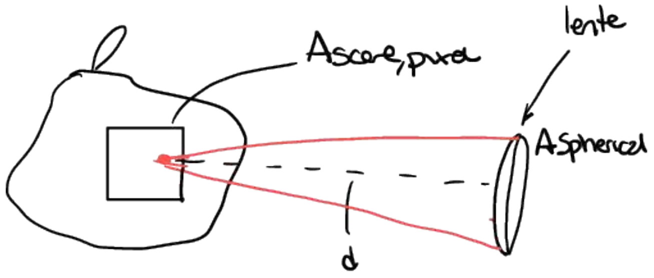
Questa ha la massima intensità

Abbiamo anche un coeff di riflessione che indica la % della luce che viene riflessa.
Dobbiamo adesso calcolare la reflected intensity per unit solid angle

$$\frac{I_{rif}}{\Omega} = \frac{I}{\pi}\cos(\beta)\cdot \underset{\text{coeff di riflessione}}{R} = \frac{1{,}19\ W/m^2}{\pi}\cdot\cos(60°)\cdot 0{,}2 = 37{,}9\ \frac{mW}{m^2\cdot SR}$$

SR ← stera Radiant (unità di misura del solid angle)

Dobbiamo adesso trovare l'area relativa al pixel



il solid angle della rete è

$$\Omega = \frac{A_{spherical}}{d^2}$$

Per piccoli solid angle possiamo approssimare l'area della superficie sferica con l'area della sfera piatta, perciò:

$$\Omega = \frac{A_{lens}}{d^2}$$

Quindi

$$\Omega = \frac{\pi(D/2)^2}{d^2} \quad \text{ricordiamo} \quad F_{\#} = \frac{f}{D} \rightsquigarrow D = \frac{f}{F_{\#}}$$

$$= \frac{\pi\left(\frac{f}{F_{\#}\cdot 2}\right)^2}{d^2} = \frac{\pi\left(\frac{37mm}{4\cdot 2}\right)^2}{(10m)^2} = 0{,}67\,\mu SR$$

(che è ≪ 4π e quindi la nostra approx a piccoli è vera)

Adesso devo vedere il relativo dell'area sul pixel

$$\frac{A_{pixel}}{A_{scene,pixel}} = \frac{(\ell_{pixel})^2}{(\ell_{scene,pixel})^2} = m^2$$

Perciò $$A_{scene,px} = \frac{A_{px}}{m^2} = \frac{(1{,}5\,\mu m)^2}{(3{,}7\cdot 10^{-3})^2} = 405\,\mu m^2$$

Perciò la potenza ottica per singolo pixel sarà

$$P_{px} = \frac{I}{\Omega}\cdot \Omega_{lens}\cdot A_{scene,px} = 37{,}9\ \frac{mW}{m^2 SR}\cdot 0{,}67\,\mu SR\cdot 405\,\mu m^2$$
$$= 4{,}2\ fW.$$

Dobbiamo adesso ricavare il photon flux

L'energia di un fotone è $E_{ph} = \frac{h\cdot c}{\lambda} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}\,J\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{650\,nm}$

$= 3{,}06\cdot 10^{-19}\,J/ph$ ci conviene usare questo

$\simeq 1{,}91\,eV$

Dato che la potenza è l'energia per unità di tempo, allora posso ricavare il n° di fotoni per unità di tempo

$$\frac{N_{ph}}{\Delta t} = \frac{P_{px}}{E_{ph}} = \frac{4{,}2\,fJ/s}{3{,}06\cdot 10^{-19}\,J/ph} = 13700\,ph/s$$

perciò il photon flux è

$$\Phi_{ph} = \frac{13700\,ph/s}{A_{px}} = 6{,}1\cdot 10^{15}\,\frac{ph}{s\cdot m^2}$$

PUNTO 3

Sappiamo che la corrente fotogenerata sarà:

$$i_{ph} = \underbrace{\Phi_{ph}\cdot A_{px}}_{}\cdot q\cdot \eta\cdot T_{red} = 6{,}1\cdot 10^{15}\,\frac{ph}{s\cdot m^2}\cdot(1{,}5\,\mu m)^2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}6\cdot 0{,}85$$

che è il numero di fotoni per unità di tempo

$$= 1{,}1\,fA$$

PUNTO 4

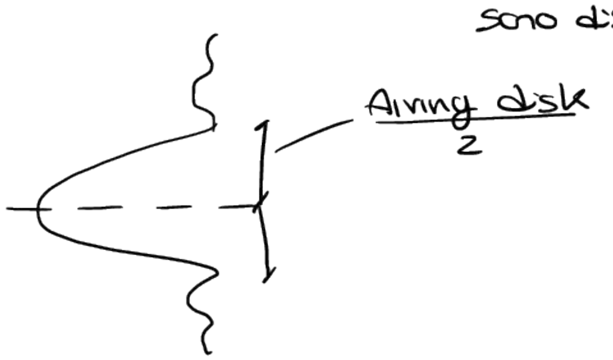
Serve un filtro anti aliasing? (in pratica mi chiede la risoluzione del sistema)

Noi facciamo un sampling spaziale con il nostro filtro.

$f_{sample} = \frac{1}{\ell_{px}} = 0{,}67/\mu m$ prendo un punto per ogni $0{,}67\,\mu m$

ho poi che

non avrò un punto ma avrò una figura di diffrazione se vedo ad avvicinare molto i 2 punti otterrò un unico segnale che non mi fa più discriminare i 2 punti. Noi diciamo che riusciamo a discriminare i 2 punti se sono distanti almeno un Airy disk



Nel nostro caso

$$d_{Airy} = 2\cdot 1{,}22\cdot \frac{\lambda}{D}\cdot f = 2{,}44\cdot \lambda\cdot F_{\#} = 6{,}3\,\mu m$$

Questo significa che il max spacial frequency sarà < del Airy disk.

$$f_{signal,max} = \frac{1}{d_{Airy}} = 0,16/\mu m$$

Questo significa che il nostro sistema è limitato dalla diffrazione e che dato che

$f_{sample} > 2 \cdot f_{signal,MAX}$ e quindi non abbiamo bisogno di un filtro anti aliasing.

Anche in questo caso un sistema ben equilibrato si ha per un good matching tra diffrazione e grandezza dei pixel.