

Accelerometri MEMS

Linear spring mass equation: $m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F_{ext}$

dove K è il coefficiente elastico e b quello di damping.

Da questa si può ricavare la funzione di trasferimento (usiamo laplace):

$$ms^2 X(s) + bsX(s) + KX(s) = F_{ext}(s)$$

$$FDT = \frac{X(s)}{F_{ext}(s)} = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}}$$

OBTENIAMO

$$FREQ. DI RISONANZA: \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$FAITORE DI QUALITA': Q = \frac{\omega_0 m}{b}$$

Tipicamente gli accelerometri funzionano a freq minori rispetto a quella di risonanza. Inoltre dobbiamo sapere che la tau di risposta del nostro sistema è:

$$\tau = \frac{Q}{\pi \cdot \omega_0} \quad \text{Quindi minore il Q più sarà veloce la risposta in frequenza del sistema.}$$

Torsional spring-mass damper system:

$$I\ddot{\theta} + b_p\dot{\theta} + K_{\theta}\theta = \tau_{ext}$$

Dove:

I = MOMENTO D'INERZIA

τ_{ext} = TORQUE

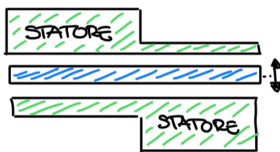
Forze elettrostatiche: Nelle formule appena viste non abbiamo considerato che i condensatori hanno delle forze elettrostatiche che tendono ad attrarre tra loro i piatti paralleli.

SAPPIAMO CHE UN CONDENSATORE HA FORMULA

$$C = \frac{\epsilon_0 A \cdot N}{g} \quad \text{POSSO VARIARE IL GAP } g \text{ O L'AREA } A.$$

ALLORA HO 2 METODI DI OTTENERE QUESTA VARIAZIONE (ENTRAMBI SONO DIFFERENZIALI PER QUESTIONI DI RUMORE)

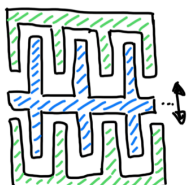
1) GAP VARIING



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A N}{g-x}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A N}{g+x}$$

2) COMB-FINGER



$$C_1 = \frac{2\epsilon_0 h(x_0+x)N}{g}$$

$$C_2 = \frac{2\epsilon_0 h(x_0-x)N}{g}$$

Dopo calcoli si ricava che la componente della forza è:

• PIATTI PARALLELI (GAP VARIING) SINGOLI

$$F_{elec} = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 A N}{(g-x)^2} \quad \text{ATTENZIONE! } F_{elec} \text{ DIPENDE DAL DISPLACEMENT.}$$

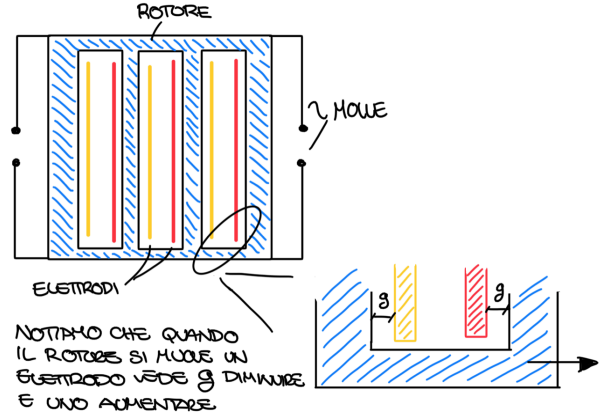
• PIATTI PARALLELI (GAP VARIING) CONFIG. DIFFERENZIALE

$$F_{elec} = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 A N}{(g-x)^2} - \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 A N}{(g+x)^2}$$

POI METTIAMO QUESTA FORMULA NELLA SOLITA EQ

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F_{mech} + F_{elec}$$

Architettura di un accelerometro:



Come facciamo a misurare la capacità differenziale? Iniziamo supponendo che le frequenze di nostro interesse siano molto minori di quella di risonanza, allora posso scrivere che:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = m a_{ext} + F_{elec}$$

Dall'equazione delle corrente in un condensatore variabile sappiamo poi che non c'è un solo modo di leggere gli accelerometri

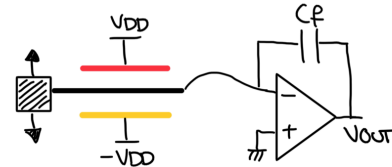
$$i_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} = C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt}$$

METODO 1

APPROCIAMO UNA TENSIONE DC TRA I 2 ELETTRODI, SICCOME

$$i_c = C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt}$$

PER POI RICAVARE IL VALORE DI C USO L'OPAMP COME INTEGRATORE

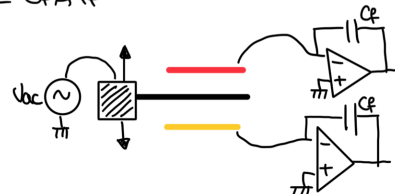


METODO 2

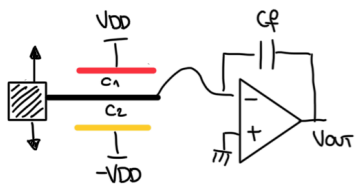
METTIAMO UNA TENSIONE AC AI CAPI DEL ROTORE. SE LA DERIVATA DI QUESTA TENSIONE È >> DI QUELLA DEL CONDENSATORE ALLORA:

$$i_c = C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt}$$

POI LEGGIAMO US 2 CAPACITÀ IN MODO DIFFERENZIALE CON 2 OPAMP



Analizziamo il primo circuito:



ABBIAMO CHE LA FORMULA DELLA CARICA È:

$$Q_1 = -C_1 V_{DD}$$

$$Q_2 = +C_2 V_{DD}$$

QUANDO SPOSTIAMO IL ROTORE ABBIAMO UNA DIFFERENZA DI CARICA

$$\Delta Q = \Delta C V_{DD}$$

MA DA DOVE ARRIVA QUESTA CARICA? ARRIVA DAL CONDENSATORE DI FEEDBACK, PERCIÒ SU CF HO UNA IDP DATA DA

$$Q = C \cdot V \rightarrow \Delta V_{out} = \frac{\Delta Q}{C_F} = \frac{\Delta C V_{DD}}{C_F}$$

ESPRIMIAMO DETTAGLIATAMENTE LA DIFFERENZA DI CARICA IN FUNZIONE DI X

$$\Delta Q_m = V_{DD} \Delta C = V_{DD} \left[-\frac{\epsilon_0 A N}{(g+x)} + \frac{\epsilon_0 A N}{(g-x)} \right]$$

$$= V_{DD} C_0 \left[\frac{2x/g}{1 - (x/g)^2} \right]$$

SE SUPPONIAMO CHE $x \ll g$ ALLORA $\frac{x}{g}$ È MOTO PICCOLO SE SOTTRATTO A 1 QUINDI LO POSSIAMO TRASCURARE. ALLORA

$$\Delta Q_m = 2 V_{DD} C_0 \frac{x}{g} \rightarrow \frac{\Delta C}{\Delta x} = 2 C_0 \frac{x}{g}$$

SOTTO QUESTE APPROSSIMAZIONI POSSIAMO SCRIVERE V_{out} CHE FUNZIONA LINEARE DEL DISPLACEMENT E DELLA CAPACITÀ.

$$\Delta V_{out} = 2 \frac{V_{DD}}{C_F} \frac{C_0}{g} x$$

Effetti della forza elettrostatica

La forza elettrostatica in un condensatore è sempre di tipo attrattivo. Scriviamo quindi l'equazione fondamentale supponendo inoltre di non avere accelerazione e che la frequenza delle accelerazioni sia bassa tale da poter ritenere le componenti trascurabili.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = m a_{ext} + F_{elec} \rightarrow Kx = F_{elec}$$

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE CHE:

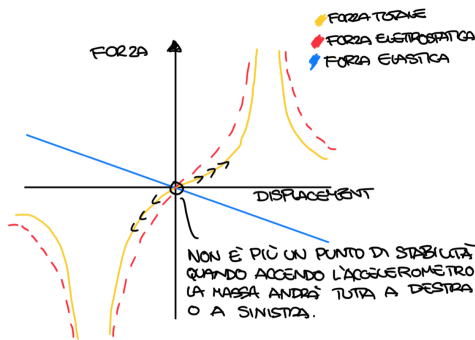
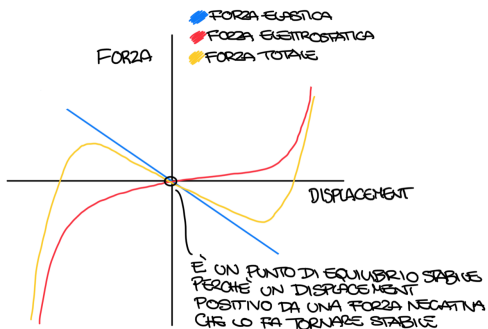
$$Kx = \frac{V_{DD}^2 \epsilon_0 A N}{2 (g-x)^2} - \frac{V_{DD}^2 \epsilon_0 A N}{2 (g+x)^2}$$

Questo ci cambia qualcosa a noi? Si potrebbe rendere il sistema instabile. Se facciamo delle piccole variazioni allora il caso di stabilità del grafico qui a fianco potrebbe drasticamente cambiare.

Se:

- Aumentiamo la facing area
- Diminuiamo il gap
- Diminuiamo la stiffness
- Aumentiamo la tensione di bias

Allora potremmo avere instabilità, infatti:



Come determiniamo le condizioni limite tra un device funzionante e uno no? Dobbiamo eguagliare la forza elastica a quella elettromagnetica attorno al punto di equilibrio.

$$Kx = \frac{V_{DD}^2 \epsilon_0 A N}{2 (g-x)^2} - \frac{V_{DD}^2 \epsilon_0 A N}{2 (g+x)^2}$$

CONTEGGI MATEMATICI

$$= \frac{V_{DD}^2 C_0}{2} \frac{4x/g}{1 - 4(x/g)^2}$$

LO CONSIDERIAMO TRASCURABILE

$$= \frac{V_{DD}^2 C_0}{2} \frac{4x}{g} = \frac{V_{DD}^2 C_0}{g^2} 2x$$

NOTIAMO CHE $\frac{2V_{DD}^2 C_0}{g^2}$ HA LE DIMENSIONI DI UNA FORZA ELETTROSTATICA, LA CHIAMIAMO EQUIVALENT ELECTROSTATIC STIFFNESS.

$$K_{elec} = \frac{2V_{DD}^2 C_0}{g^2} x$$

PER ESSERE SICURI DI AVERE STABILITÀ DOBBIAMO FARE SÌ CHE

$$K > |K_{elec}|$$

Sensibilità dell'accelerometro:

Prima di tutto vogliamo relazionare il displacement con l'accelerazione:

$$Kx = m a_{ext} + 2 \frac{V_{DD}^2 C_0}{g^2} x \rightarrow x = \frac{1}{\omega_0^2} a_{ext}$$

DOVE ω_0 È LA FREQUENZA DI RISONANZA IN OPERAZIONE PERCIÒ NELLA FORMULA DI ω_0 DEVO CONSIDERARE $K_{TOT} = K + K_{elec}$, DATO CHE K_{elec} È SEMPRE < 0 ALLORA ω_0 SARÀ + PICCOLA.

RICORDANDO POI 2 EQUAZIONI OTTIENIAMO LA SENSIBILITÀ:

$$\Delta V_{out} = 2 \frac{V_{DD}}{C_F} \frac{C_0}{g} x \quad x = \frac{1}{\omega_0^2} a_{ext}$$

PERCIÒ OTTIENIAMO:

$$\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = \frac{2V_{DD}}{C_F} \frac{C_0}{g} \frac{1}{\omega_0^2}$$

ALTRO MODO PER CALCOARE LA SENSIBILITÀ

$$\frac{\Delta V_{out}}{a_{ext}} = 2 \frac{dV}{dC} \frac{dC}{dx} \frac{dx}{d\omega_0}$$

Più alta è la sensibilità meglio è, per aumentarla potremmo:

- Ridurre g ma se lo faccio devo ridurre anche la pulling voltage
 - Aumentare la massa, ma andiamo a ridurre la banda
 - Ridurre l'overall stiffness, ma rischiamo pull-in instability
 - Aumentare la tensione di bias ma rischiamo pull-in instability
- L'unico punto che non ha tradeoff è aumentare lo spessore del rotore, in questo modo la massa aumenta ma K aumenta di conseguenza e lo compensa.

Errore approssimazione small displacement

VALORE REALE VALORE LINEARIZZATO

$$\epsilon\% = \frac{2CoX \left[\frac{1}{1 - (X/g)^2} \right] - 2CoX/g}{\Delta CFSR} \cdot 100$$

$$= \frac{X_{max} \left[\frac{1}{1 - (X_{max}/g)^2} \right] - X_{max}}{X_{max} \left[\frac{1}{1 - (X_{max}/g)^2} \right]} \cdot 100 = \left(\frac{X_{max}}{g} \right)^2 \cdot 100$$

Thermo mechanical noise

Lo spettro di potenza del rumore di un modello molla smorzatore è dato da:

$$S_{fn} = 4TbK_b$$

NEAD

Noise equivalent acceleration density, considera solo i contributi aerodinamici quindi:

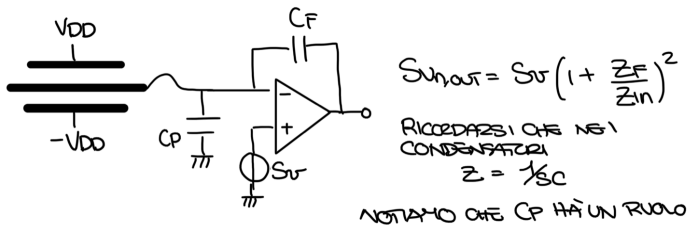
$$NEAD = \sqrt{S_{an}} = \sqrt{\frac{S_{fn}}{m^2}} = \sqrt{\frac{4bTK_b}{m^2}} = \sqrt{\frac{4K_b T \omega_0}{m^2 Q}} \quad \left[\frac{m/s^2}{\sqrt{Hz}} \right]$$

PER AVERE IN g/\sqrt{Hz} DEVO DIVIDERE PER 9,81

Notiamo che per Q piccoli abbiamo più rumore (tradeoff rispetto a Q = 0.5 che dicevamo precedentemente)

Rumore dell'elettronica

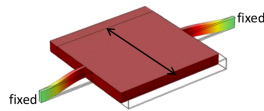
Anche il rumore dell'elettronica diventa preponderante e quindi bisogna considerarlo, considerando anche le capacità parassite.



Io voglio i 2 rumori (elettronica e termico) comparabili perciò se il rumore dell'elettronica è quello dominante posso calare Q fino a 0.5, altrimenti dobbiamo aumentare Q (ergo abbiamo risonanza) e quindi usiamo un filtro elettronico per eliminare la risonanza.

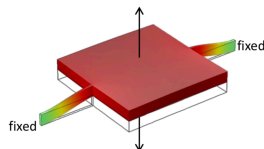
Elastic stiffness

Springs for in-plane (IP) translational motion

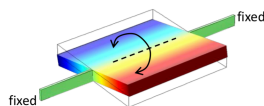


Springs for out-of-plane (OOP) translational motion

rarely used...



Springs for out-of-plane (OOP) torsional (rotational) motion



Vediamo la molla come una semplice trave in cui un lato è bloccato al substrato e l'altra parte è libera di muoversi. Noi possiamo gestire solo le misure di lunghezza e larghezza dato che l'altezza è definita dallo standard.

Young's Modulus

Ci dice quanto è possibile piegare un materiale senza avere deformazioni permanenti

YOUNG'S MODULUS $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$ DOE $\sigma = \frac{F}{A}$ $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$



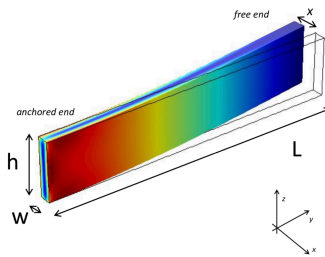
DIFFERENZA DI LUNGHEZZA

POSSIAMO CALCOARE LA STIFFNESS DI UNA TRAVE QUANDO LA FORZA AGISCE SULL'ASSE DELLA TRAVE

$$K = \frac{F}{X} = E \cdot \frac{A}{L} = E \frac{wh}{L}$$

Le cose però sono più complesse quando la forza non segue l'asse della trave.

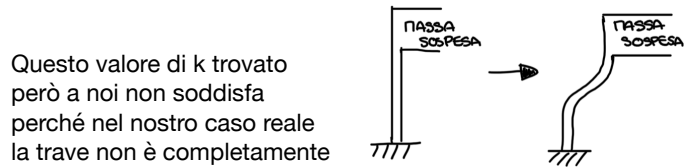
Free end beam



LA STIFFNESS PER LA FREE END BEAM È:

$$K_x = \frac{F_x}{X} = \frac{E w^3 h}{4L^3}$$

MATERIALE
GEOMETRIA



Questo valore di k trovato però a noi non soddisfa perché nel nostro caso reale la trave non è completamente libera di muoversi ma è collegata alla massa sospesa.

Dovremmo calcolare il k di questa struttura, bisogna perciò introdurre il concetto di molle in serie e in parallelo

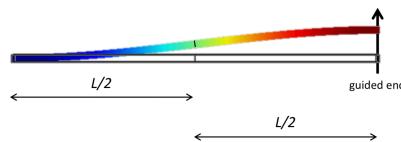
• MOLLE IN SERIE

$$K_x = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

• MOLLE IN PARALLELO

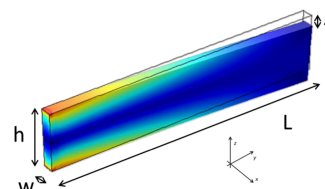
$$K_x = K_1 + K_2$$

Allora posso calcolare la stiffness della vera trave considerandola come la serie di 2 free-end beam



$$K_x = \frac{E w^3 h}{L^3}$$

La stiffness totale di un accelerometro è $4 \cdot K_x$ calcolato sopra, questo perché ci sono 4 travi che fanno da molle messe in parallelo in un accelerometro. Se volessimo fare gli stessi conti per displacement verticale avremmo che:

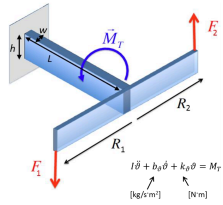
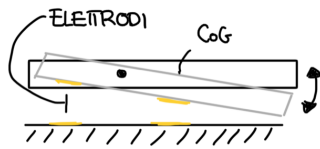


$$K_z = \frac{E h^3 w}{L^3}$$

NOTIAMO LA DIPENDENZA DA h^3 (CHE NON POSSO CONTROLLARE) PERCIÒ È DIFFICILE AVERE K PICCOLI È PER QUESTO CHE È POCO USATA.

Torsional spring

Come abbiamo detto prima un sistema con le molle a trave che si piega su e giù non è fattibile perché abbiamo K troppo elevati, inoltre un altro problema della struttura è che non possiamo fare un sensing differenziale. Un modo per risolvere ambedue i problemi è attaccare la massa sospesa ad una molla torsionale:



IN QUESTA STRUTTURA ABBIAMO CHE

$$K_{\theta} = G \frac{hw^3}{3L}$$

DOVE G È UN PARAMETRO DEL MATERIALE (CIRCA UGUALE DELLO YOUNG'S MODULUS)

Tipicamente ci sono 2 travi che sostengono la massa perciò dovremmo calcolare il K di entrambe e considerarle in parallelo. Noi inoltre sappiamo che la frequenza di risonanza di un sistema torsionale è calcolabile come:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I}{K_{\theta}}} \text{ DOVE } I \text{ È IL MOMENTO D'INERZIA}$$

DOBBIAMO QUINDI SAPERE CALCOLARE I. CASO SEMPLIFICATO CONSIDERIAMO LE 2 TRAVI COME PUNTI, QUINDI

$$I_1 = \int_0^R r^2 \cdot s(r) \cdot h \cdot p \cdot dr = \frac{R^3 s h p}{3} = \frac{R_1^2 m_1}{3}$$

DOBBIAMO RICORDARCI CHE ABBIAMO 2 MOLE QUINDI $I_{TOT} = I_1 + I_2$

Effetti dei processi di produzione non uniformi sulle molle

Se andiamo verso il limite inferiore delle dimensioni generali con la nostra tecnologia (es: 1,5um) potremmo avere delle non uniformità di processo (0,15um). Queste variazioni vanno a prefissarsi come un 30% circa di variabilità nella stiffness il che è troppo. Per risolvere questo problema potremmo fare w più grande ma non è una grande idea perché se non allunghiamo il design otteniamo che il fattore K aumenta di 8 (il cubo di w). Il modo reale di risolvere questo problema è mettere in serie più molle perché la serie di più molle fa ridurre il K.

Offset meccanici (Zero g offsets)

Dovuti al fatto che il gap tra i due piatti paralleli non è identico oppure da stress meccanici residui. Il tipico valore di zero g offset è 1mg/K (se prendo l'intero range di temperatura -40,+85 C allora ho 125mg su tutto il range di temperatura). Non va bene, infatti se ricordiamo la formula:

$$a_{os} = X_{os} \cdot \omega^2$$

SUPPONIAMO IL DISPLACEMENT $X_{os} = 10nm$

ALLORA OTTIENGO UN'ACCELERAZIONE DI UN VALORE TIPICO PARI A

$$a_{os} = 582mg$$

CHE È TANTISSIMO RISPETTO AL MINIMO SEGNALE CHE POTREMMO MISURARE

Ci sono modi per ridurre questo offset? Ricordiamo che posso vedere il displacement massimo come:

$$X_{MAX} = \frac{FSR \cdot dx}{da_{ext}} \quad \text{FULL SCALE RANGE ACCELERAZIONI}$$

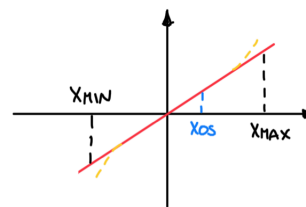
TRANSDUCTION FACTOR

INOLTRE RICORDIAMO CHE LO ZERO G OFFSET È OTTENIBILE COME:

$$ZGO = \frac{X_{os}}{\frac{dx}{da_{ext}}}$$

CAPIAMO QUINDI CHE PER RIDURRE LO ZERO G OFFSET DOVREMMO AUMENTARE IL TRANSDUCTION FACTOR MA QUESTO RIDURREBBE IL MASSIMO DISPLACEMENT. NO BUONO!

Gli offset meccanici inducono anche una non linearità in uscita, infatti ho che nella posizione a riposo X_{os} non si trova più al centro della retta è visto che siamo obbligati ad avere linearità tra accelerazioni positive e negative siamo obbligati a ridurre il full scale range (ricordiamo che il full scale range è definito come la variazione di x per avere massima variazione di C).



• VARIAZIONE DI CAPACITÀ SENZA OFFSET

$$\Delta C_{det} = 2C_0 \frac{X}{g} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{X}{g}\right)^2} \right]$$

• VARIAZIONE DI CAPACITÀ CON OFFSET

$$\Delta C_{det} = 2C_0 \frac{X}{g} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{X - X_{os}}{g}\right)^2} \right]$$

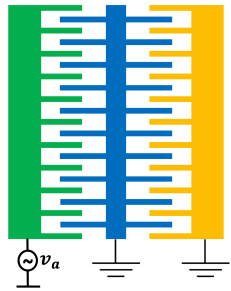
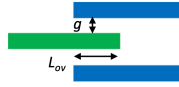
Oscillatori

Devo avere un sistema elettronico che sostenga l'oscillazione. La struttura migliore per realizzare gli oscillator/risuonatori è quella a dita intrecciate perché ha 2 vantaggi principali:

- Linearità a grandi displacement
- Assenza dello 'squeezed film' (che è presente nella configurazione a piatti paralleli) questo mi permette di ottenere Q molto elevati.

Eccitazione del risonatore attraverso le forze elettrostatiche

Proviamo a eccitare il sistema con una tensione alternata alla frequenza f_0 alla quale vorremmo avere l'oscillazione:



SAPPIAMO CHE $CA = \frac{2E_0h(x+L_{ov})Ncf}{g}$

SE DERIVIAMO IN X OTTIENIAMO CHE:

$$\frac{dCA}{dx} = \frac{2E_0hNcf}{g}$$

POSSIAMO QUINDI CALCOARE LA FORZA ELETTROSTATICA COME:

$$|F_{elec}| = \left| \frac{VA^2}{2} \frac{dCA}{dx} \right| = \frac{VA^2 E_0hNcf}{g} \sin^2(\omega t)$$

$$= \frac{VA^2 E_0hNcf}{g} \cdot \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

Notiamo che abbiamo un problema perché noi eccitiamo il sistema a ω_0 e otteniamo una risposta del sistema a $2\omega_0$ e questo non va bene perché dovremmo poi dividere a metà la frequenza nel circuito di retroazione per soddisfare Barkausen. Per risolvere il problema noi imponiamo una tensione continua allo statore verde.

$$F_{elec} = \frac{[V_{DC} + V_a \sin(\omega t)]^2}{2} \cdot \frac{2E_0hNcf}{g}$$

$$= \frac{E_0hNcf}{g} [V_{DC}^2 + V_a^2 \sin^2(\omega t) + 2V_{DC}V_a \sin(\omega t)]$$

SE FACCIAMO DOMINARE LA COMPONENTE \bullet SULLE ALTRE ABBIAMO CHE L'OSCILLA SARÀ ALLA STESSA FREQUENZA DI QUELLA DI RISONANZA PER AVERE QUESTO DOBBIAMO AVERE CHE:

$$2V_{DC}V_a \gg \frac{V_a^2}{2} \rightarrow V_a \ll 4V_{DC}$$

PERCÌ POSSIAMO APPROSSIMARE TUTTO CON:

$$F_{elec} \approx \frac{E_0hNcf}{g} [V_{DC}^2 + 2V_{DC}V_a \sin(\omega t)]$$

Come possiamo vedere la soluzione non è ideale perché abbiamo sempre una componente continua data dal quadrato di V_{DC} che fa sì che il rotore sia sempre spostato verso lo statore verde. Per risolvere questo noi mettiamo la tensione continua sul rotore o sullo statore giallo. La soluzione migliore tra queste è porla sul rotore dato che ha alta impedenza e quindi non consuma molta corrente. In questi casi abbiamo che:

$$F_{elec} = \frac{E_0hNcf}{g} 2V_{DC}V_a \sin(\omega t)$$

SE CONSIDERIAMO SOLO IL MODULO DELLA FORZA ELETTROSTATICA POSSIAMO SCRIVERE CHE

$$F_{elec} = \eta_A V_a$$

CON η_A CHIAMATO ELECTROSTATIC TRANSDUCTION FACTOR

Per leggere il segnale usiamo un TIA perciò possiamo scrivere che la corrente è uguale a:

$$i_m = V_{DC} \frac{dC_s}{dt}$$

Possiamo poi scrivere anche la velocità, derivando il displacement e ricordando che lo stesso è di tipo sinusoidale.

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} (x_0 \sin(\omega t)) = \omega x_0 \cos(\omega t)$$

RICORDANDO POI COME È STATA SCRITTA LA CORRENTE POSSIAMO DIRE CHE

$$i_m = V_{DC} \cdot \frac{dC_s}{dt} = V_{DC} \frac{dC_s}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_{DC} \frac{dC_s}{dx} \cdot \dot{x}$$

DEFINIAMO CON $\eta_s = V_{DC} \frac{dC_s}{dx}$ LA TRANSDUCTION FACTOR ALLA SENSA PART

$$i_m = \eta_s \dot{x}$$

Abbiamo una struttura nella quale applichiamo una tensione A_c e leggiamo una corrente, perciò possiamo calcolare l'ammettenza equivalente.

$$\frac{i_m}{v_a}(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{F_{elec}(s)}{v_a(s)} \cdot \frac{x(s)}{F_{elec}(s)} \cdot \frac{i_m(s)}{x(s)}$$

$$= \eta_A \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \cdot \eta_s \cdot s$$

$\eta_A = \eta_s$

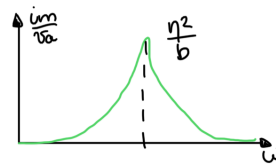
$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{\eta^2 s}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

$(\omega \ll \omega_0) = s \eta^2/k$

$(\omega = \omega_0) = \eta^2/b$

$(\omega \gg \omega_0) = \frac{1}{s} \frac{\eta^2}{m}$

PERCÌ ABBIAMO CHE



RICAVIAMO L'EQUIVALENTE ELETTRONICO DEL SISTEMA

$$C_{eq} = \eta^2/k$$

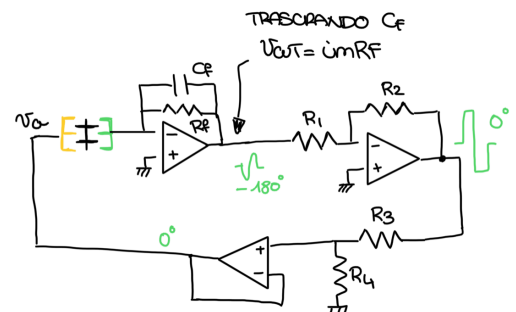
$$R_{eq} = b/\eta^2$$

$$L_{eq} = m/\eta^2$$

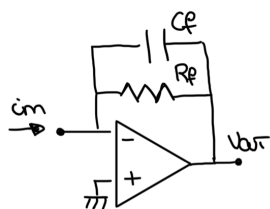
Abbiamo scelto la topologia a dita intrecciate perché permette grandi displacement senza dare problemi di linearità. Il sistema funziona trasformando una tensione in una corrente e poi attraverso il nostro sistema elettronico noi dovremmo ritrasformare la corrente nello stesso valore di tensione mantenendo fase e frequenza (criterio di barkausen). Quando realizziamo un oscillatore **dobbiamo considerare il peggior quality factor possibile dato dalla temperatura, questo perché il Q dipende da T**, in particolare:

$$Q \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad b = \frac{\omega_0 m}{Q} \quad R_{eq} = \frac{b}{\eta^2}$$

Un esempio di sistema circuitale completo può essere:



Analisi delle varie componenti:



CONSIDERANDO LA PRESENZA DI C_f ABBIAMO CHE:

$$\frac{V_{out}}{i_m} = \frac{-R_f}{1 + sC_f R_f}$$

DOBBIAMO ASSICURARCI CHE IL POLO ANDI A FREQUENZE SUPERIORI RISPETTO ALLA RISONANZA

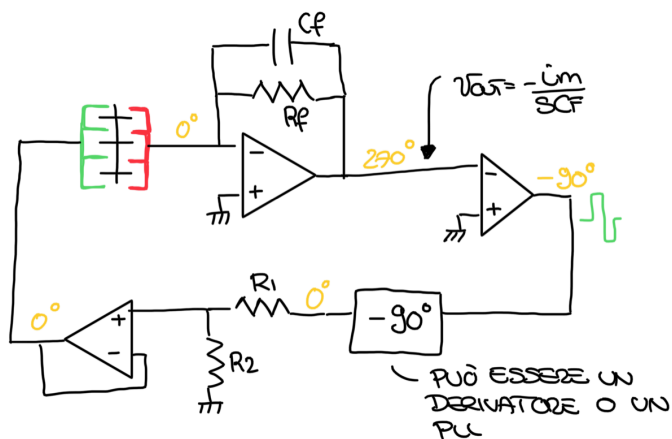
SOTTO QUESTA IPOTESI POSSIAMO SCRIVERE IL GUADAGNO V_{out}/V_a (DOVE V_a TENSIONE IN INGRESSO AL SISTEMA)

$$\frac{V_{out}}{V_a} = -\frac{R_f}{R_{eq}}$$

Il **secondo stage** serve per fare la condizione di start up e far saturare il segnale, per fare questo usiamo un secondo amplificatore in configurazione invertente. Questo permette al segnale di tornare ad un valore di 0 gradi rispetto alla fase iniziale quindi a cosa serve il **terzo stage**? Dobbiamo ricordare che il risonatore può essere linearizzato solo sotto l'ipotesi che $V_a/4 \ll V_{dc}$ cosa che in uscita dal secondo stage non abbiamo, perciò usiamo un partitore resistivo con un buffer per ottenere una tensione minore in uscita.

Info: La resistenza R_f dovrebbe avere valore molto grande e non è di facile implementazione in un circuito integrato, e usare un mos non è di facile implementazione dato che la sua resistenza di canale dipende molto dalla boa voltare ed è soggetta a troppe fluttuazioni.

Topologia Charge Amplifier

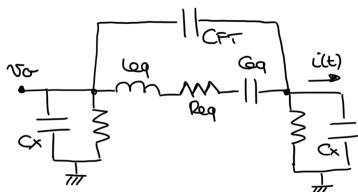


In questa topologia lavoriamo nella zona capacitiva della funzione di trasferimento.

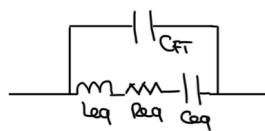
Con questa topologia inoltre posso tranquillamente fare la resistenza con un mos dato che la fluttuazione del valore di R varia unicamente la locazione del polo e non quella del valore di V_{out} .

Capacità di feedthrough

Nel risonatore abbiamo ovviamente delle capacità parassite, esistono inoltre anche 2 resistenze parassite di valore molto alto (Megaohm). Tuttavia noi dobbiamo ricordare che comandiamo il circuito con un buffer a bassa impedenza d'uscita all'ingresso e con un TIA con terra virtuale all'uscita. Perciò le componenti in parallelo all'ingresso e all'uscita che toccano la terra non dovrebbero avere effetto nella non idealità, perciò l'unica elemento di nostro interesse è la capacità di feedthrough.



Perciò abbiamo che la corrente in output è data da due componenti.

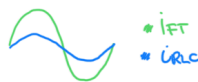


$$\frac{i}{V_a} = \frac{i_m + i_{ft}}{V_a} = \frac{-1}{sR_f + R_{eq} + \frac{1}{sC_f}} + sC_f$$

DIPENDENTEMENTE DALLA FREQUENZA LA CORRENTE DI FEEDTHROUGH PUÒ ESSERE TRASCURABILE O RILEVANTE.

• BASSE FREQUENZE

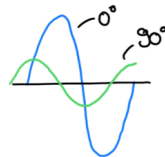
$$\frac{i}{V_a} = sC_{ft} + sC_f$$



TIPICAMENTE LA CAPACITÀ DI FEEDTHROUGH HA VALORE MAGGIORE RISPETTO ALLA CAPACITÀ EQUIVALENTE. LE 2 CORRENTI SI TROVANO IN FASE

• ATTORNO ALLA FREQUENZA DI RISONANZA

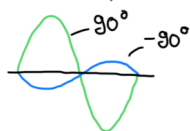
$$\frac{i}{V_a} = \frac{1}{R_{eq}} + sC_f$$



FINO A QUANDO IL MODULO DEL FEEDTHROUGH È PIÙ PICCOLO DI $1/R_{eq}$ ALLORA LA FASE VA COME NEL CASO IDEALE. DOPO LO QUANDO $|sC_f|$ TORNA AD ESSERE DOMINANTE, LA FASE È ANCORA DOMINATA DAL FEEDTHROUGH.

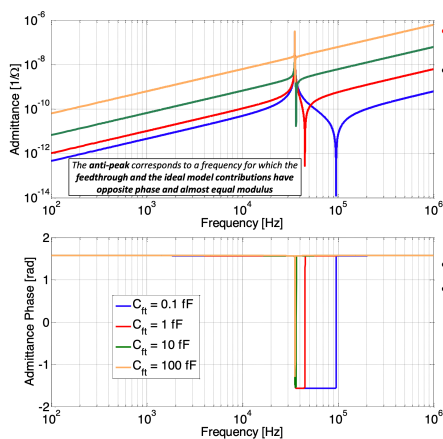
• ALTE FREQUENZE

$$\frac{i}{V_a} = \frac{1}{sR_{eq}} + sC_f$$



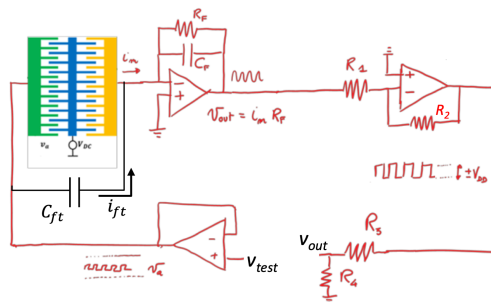
LA FASE È DOMINATA DAL FEEDTHROUGH E IL SUO CONTRIBUTO È MOLTO MAGGIORE DI $1/sR_{eq}$

Studiamo adesso l'andamento di fase e tensione in funzione della



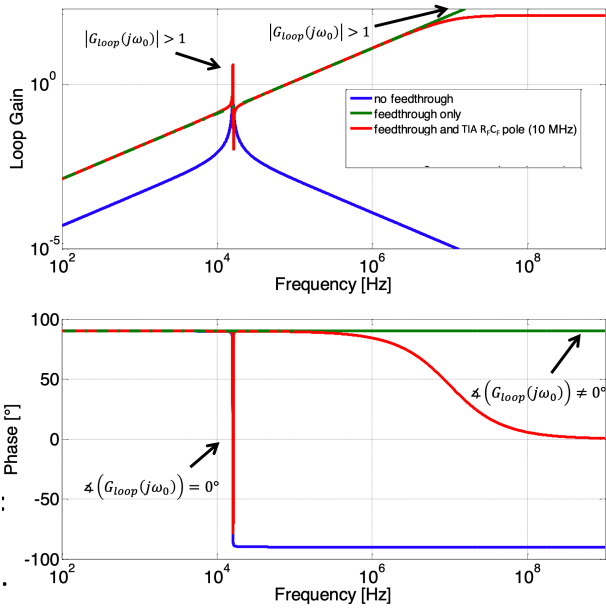
frequenza e vediamo il comportamento di C_{ft} . Subito dopo la frequenza di risonanza potremmo trovare un punto in cui i 2 segnali hanno fase opposta e ampiezza comparabile, perciò abbiamo la presenza di uno zero. Bisogna porre particolare attenzione alla zona a -90 gradi perché se cadiamo lì il criterio di barkausen non è più confermato.

La nostra elettronica continua a funzionare con il condensatore di feedthrough? Iniziamo calcolando il Gloop:



$$G_{loop}(s) = \frac{v_{out}}{v_{test}} = \left(\frac{\eta^2}{m} \frac{s}{(s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m})} + sC_{ft} \right) \frac{-R_f}{1 + sR_f C_f} \frac{-R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

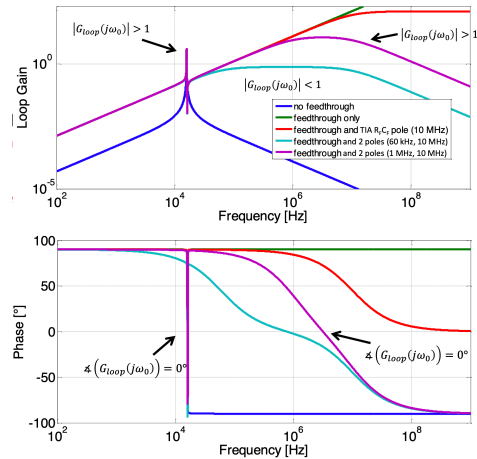
I grafici considerando assente e presente Cf perciò diventano



Notiamo che la curva rossa (feedthrough e polo dato da Rf e Cf) abbiamo sia fase uguale a zero gradi e sia loop gaia maggiore di uno. Notiamo però anche che questo è verificato anche dopo la frequenza di risonanza è quindi esistono molte frequenze che possono far oscillare il sistema e non solo una e quindi il circuito non funziona nel mondo desiderato.

Un modo per risolvere questo problema è inserire un ulteriore polo nel loop, dobbiamo stare attenti a non mettere questo polo troppo vicino alla frequenza di risonanza (almeno una decade dopo). Questo fa si che il circuito abbia solo 2 frequenze che attraversano l'asse della fase 0. Questo non è ancora il top, posso migliorarmi facendo

si che alla seconda frequenza di attraversamento dell'asse il guadagno sia minore di 1 così barkausen non è soddisfatto (linea azzurra). Questo può essere fatto ma il polo va messo abbastanza vicino alla frequenza di risonanza il che può indurre un pò di fase shift.



L'oscillatore continua comunque a funzionare ma la risonanza non si ha più esattamente sul picco ma un pò prima.

Un altro modo per compensare il feedthrough è fare in modo di creare una maglia di corrente in modo che la corrente di feedthrough esca su una maglia secondaria che non è quella di corrente.

Giroscopio

In questo caso il FSR è dato dall'angular rate che ha unità di misura in dps.

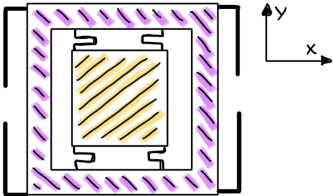
Forza di coriolis

L'idea è riuscire a misurare l'accelerazione leggendo l'accelerazione del piano non inerziale e sapendo la vera accelerazione. Perché tutto funzioni dobbiamo supporre che i giroscopi misurino accelerazione angolare anche in presenza di accelerazione lineare.

Se vogliamo che il giroscopio misuri rotazioni attorno all'asse Z abbiamo che il giroscopio deve potersi muovere in 2 direzioni una per avere la velocità e una per avere la forza. Perciò noi assumiamo la forza sull'asse Y e la velocità sull'asse X possiamo dunque scrivere l'equazione caratteristica (assumendo nulle le accelerazioni)

$$m \ddot{y}_{pr} + b \dot{y}_{pr} + K y_{pr} = -2m (-\Omega_z \hat{a} \times \vec{v}_{x_{pr}})$$

Notiamo che omega z è quello che vogliamo misurare, perciò su y misuriamo il displacement ma questo non basta infatti dobbiamo anche sapere la velocità Vx. Perciò dobbiamo fare una struttura che possa avere displacement in due direzioni diverse.

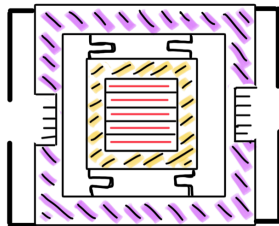


Notiamo che con questa struttura la massa esterna è libera di muoversi nella direzione X mentre quella interna in quella Y. La massa esterna poi sarà attuata con un sistema a dita intrecciate come nei risonatori così che possiamo imporre una velocità Vx alla massa esterna.

Il movimento della massa esterna non induce un movimento di quella interna dato che la struttura delle molle interne è fatta in modo che siano molto rigide nell'asse X.

Dato che facciamo muovere la massa esterna come risonatore la velocità sarà di tipo oscillatorio. La massa centrale si sposta grazie alla forza apparente di coriolis, e quindi dato che la nostra velocità è oscillatoria anche la forza di coriolis avrà un andamento oscillatorio. Nella realtà avremmo grandi displacement per l'asse X e piccoli displacement per l'asse Y.

La massa esterna avrà il suo modello massa smorzatore che noi chiamiamo drive model. La stiffness lungo la drive direction la chiamiamo Kb e dipenderà dalle molle esterne. Ci aspettiamo che il fattore di qualità Qb sia grande prece non abbiamo piatti paralleli lungo la direzione della drive mode. Ovviamente la massa che si muove lungo la drive mode è la somma della massa interna più quella esterna.



Nel caso della massa interna il fattore di qualità sarà più basso perché abbiamo piatti paralleli per il sensing, inoltre l'unica massa che consideriamo è quella interna.

Sensitività

Iniziamo a calcolare la forza elettrica con cui eccitiamo la massa in movimento. Dobbiamo ricordare la formula usata nel caso del risonatore.

$$F_{elec} = \frac{(V_0 \sin(\omega t) - V_{dc})^2}{2} \cdot \frac{dC_{Ga}}{dx} = \frac{2E_0 n NCF}{g} V_{dc} V_0 \sin(\omega t)$$

Ora che abbiamo la formula della forza elettrostatica possiamo calcolare il displacement

$$X_{D0} = F_{elec} \cdot \frac{Q_D}{K_D}$$

POI INTEGRANDO IL DISPLACEMENT POSSIAMO RICAVARE LA VELOCITÀ.

$$X_D = X_{D0} \cdot \cos(\omega t) \rightarrow \dot{X}_D = -X_{D0} \omega \sin(\omega t)$$

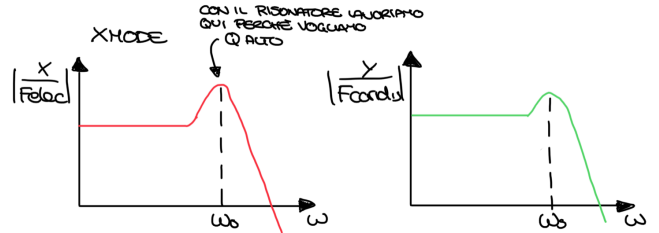
A NOI INTERESSA SOLO L'AMPIEZZA, PERCIÒ

$$V_D = X_{D0} \omega$$

POSSIAMO ADESSO RICAVARE LA FORZA DI CORIOLIS

$$F_{Co} = 2m V_D \cdot \Omega_z = 2m X_{D0} \omega \Omega_z$$

Vediamo che la drive mode ha frequenza omega 0 mentre nel caso della forza di coriolis abbiamo 2 casi, cioè che la fit del displacement diviso la forza di coriolis abbia picco a omega 0 o ad una frequenza diversa.



Se noi lavoriamo in mode matching cioè in modo che tutte le frequenze siano uguali avremo che potremo scrivere il displacement nella direzione Y come:

$$y_{D0} = F_{Co} \cdot \frac{Q_S}{K_S} = 2m_s X_{D0} \omega \frac{Q_S}{K_S}$$

RICORDANDO CHE $Q_S = K_S / \omega_{0S}$ POSSIAMO SCRIVERE

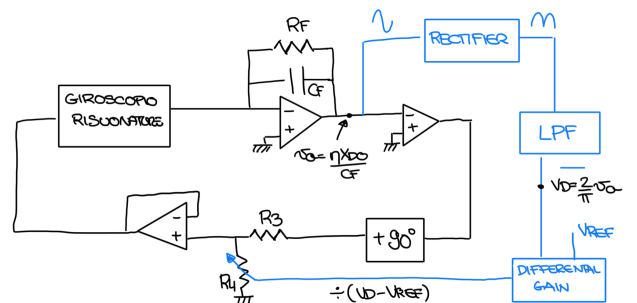
$$\frac{y_{D0}}{\Omega_z} = 2m_s X_{D0} \omega \frac{K_S}{\omega_{0S} K_S} \cdot \frac{1}{K_S} = \frac{2m_s X_{D0}}{b_S}$$

Problemi legati alla temperatura

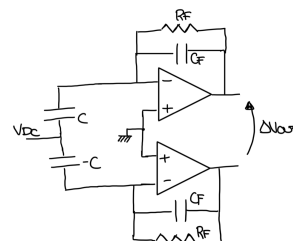
Come sappiamo il fattore di qualità cala con l'aumentare della temperatura, la conseguenza di questo è che quando creiamo un'oscillazione che ha un displacement:

$$X_{D0} = F_{elec} \cdot \frac{Q_D}{K_D}$$

Vediamo che anche il displacement cambia con la temperatura perché dipende dal fattore di qualità. Dobbiamo creare un circuito in grado di controllare l'ampiezza del displacement.



Sensitività da angular rate a Vout



Perciò possiamo scrivere la corrente in funzione delle variazioni della capacità e poi da questa ricavare Vout.

$$i_{SO} = V_{DC} \frac{dC_S}{dt} = V_{DC} \frac{dC_S}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

↑
VELOCITÀ IN Y

$$= V_{DC} \frac{C_{SO}}{g} \cdot y_{SO} \omega_0$$

POSSIAMO DUNQUE SCRIVERE CHE

$$V_{OUT} = \frac{i_{SO}}{\omega_0 C_F} = \frac{V_{DC} C_{SO}}{C_F} \cdot y_{SO}$$

PERCÌ L'USCITA DIFFERENZIALE SARÀ:

$$\Delta V_{OUT} = 2 \frac{V_{DC} C_{SO}}{C_F} \frac{y_{SO}}{g} = 2 \frac{V_{DC} C_{SO}}{C_F} \frac{x_{DO}}{g} \frac{\Omega}{\text{bs/2ms}}$$

DOE $\frac{b_s}{2m_s}$ POSSO CHIAMARLO $\Delta \omega_{BW}$

PERCÌ

$$\frac{\Delta V_{OUT}}{\Omega} = 2 \frac{V_{DC} C_{SO}}{C_F} \frac{x_{DO}}{g} \Delta \omega_{BW}$$

Una cosa fondamentale da ricordare è che questa tensione d'uscita è modulata alla frequenza ω_0 .

Architetture dei giroscopi

Come fa un giroscopio a fare un rejecting delle accelerazioni nel verso della forza di coriolis? Se confrontiamo i valori tipici di accelerazione e forza di coriolis ci accorgiamo che questa ha valori molto piccoli se confrontati con quelli delle accelerazioni. Abbiamo però 2 modi per capire che una lettura non è data dalla forza di coriolis, il primo è che questo valore non sarà modulato attorno alla frequenza di risonanza ω_0 . Tuttavia benché questo valore non sia modulato il filtro LPF non è perfetto e lascia passare delle componenti di questa accelerazione.

Per risolvere ulteriormente il problema possiamo usare 2 giroscopi e supponiamo che in ogni punto del tempo i 2 abbiano stessa velocità e verso opposto $V_x = -V_y$, accade quindi che anche le forze di coriolis saranno uguali e opposte, ma le accelerazioni esterne avranno lo stesso verso.

Non idealità

La forza di coriolis è il prodotto dell'angolar rate per la velocità di driving se noi supponiamo l'angolar rate costante e che la velocità si trovi esattamente a ω_0 . Allora ho che la forza di coriolis in frequenza è esattamente un delta MA questo accade unicamente se l'Angolar rate è costante e non dipende dalla frequenza, in questo caso avremmo un comportamento di frequente splitting che può portare i 2 segnali fuori dalla banda -3dB. Abbiamo un tradeoff sulla banda, infatti vediamo che la sensitiva dipende dall'inverso della banda quindi non possiamo aumentare la banda senza subire conseguenze sulla sensitività.

Rumore dei giroscopi

Vediamo che il rumore della drive mode è trascurabile rispetto agli altri quindi non lo consideriamo. Per quanto riguarda la sense direction la situazione cambia:

LA DENSITÀ DI RUMORE DELLA FORZA È $S_{Fm} = 4k_B T b_s$
PERCÌ SE VOGLIO PRENDERE ANZA DENSITÀ DI RUMORE DEL DISPLACEMENT Y AVRÒ CHE

$$S_{Ym} = 4k_B T b_s \left(\frac{Q_S}{K_S} \right)^2$$

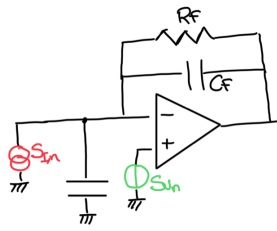
E SAPENDO CHE $\frac{y_0}{x_0} = \frac{x_d}{\Delta \omega_{BW}}$ ANORA

$$S_{Zm} = S_{Ym} \left(\frac{\Delta \omega_{BW}}{x_d} \right)^2$$

PERCÌ ABBIAMO CHE LA NERD È CALCOABILE COME

$$NERD = \frac{\sqrt{4k_B T b_s \left(\frac{Q_S}{K_S} \right)^2}}{x_d / \Delta \omega_{BW}} = \frac{\sqrt{4k_B T b_s}}{x_d m_s \omega_0} \left[\frac{\text{rad/s}}{\text{Hz}} \right]$$

Rumore dell'elettronica



• RUMORE DATO DAL RESISTORE

$$\sqrt{S_{SRF}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4k_B T \left(\frac{1}{\omega_0 C_F} \right)^2}{\Delta \omega_{BW} / \Omega}}$$

(IL 2 È DATO ANA STRUTTURA DIFFERENZIALE)

• RUMORE DATO DALC OPAMP

$$\sqrt{S_{SOPM}} = \sqrt{2 S_{In} \left(1 + \frac{C_p}{C_F} \right)^2}$$

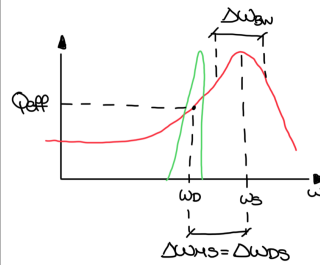
Mode-split operation

La tecnica di mode matching non è ideale perché abbiamo variazioni di temperatura e process spreads che fanno sì che le 2 frequenze non siano tunate perfettamente. Ulteriormente uno dei problemi è dato da il trade off tra banda e NERD i quali dipendono entrambi da bs.

$$\Delta f_{BW} = \frac{f_s}{2Q_S} = \frac{b_s}{4\pi m_s}$$

$$NERD = \frac{1}{x_d \omega_0 m_s} \sqrt{4k_B T b_s}$$

Cosa succede se usiamo il dispositivo in una zona vicino a quella di risonanza ma non alla frequenza di risonanza? Vediamo dal grafico che abbiamo un po' di amplificazione rispetto alla componente continua.



SUPPONIAMO CHE

$$\Delta \omega_{BS} \ll \omega_S$$

E ANCHE

$$\Delta \omega_{BS} \gg \Delta \omega_{BW}$$

ALLORA SCRIVIAMO LA SENSING MODE TRANSFER FUNCTION

$$\frac{y_S(s)}{F_{OR}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_S s}{Q_S} + \omega_S^2}$$

E CALCOIAMO IL SUO VALORE ALLA FREQUENZA DI DRIVE

Dopo una sfratta di conti otteniamo che

$$\left| \frac{y_S(j\omega_0)}{F_{OR}} \right| = \frac{1}{K_S} \cdot \frac{\omega_S}{2\Delta \omega_{BS}} = \frac{Q_{eff}}{K_S}$$

NOTIAMO CHE Q_{eff} NON DIPENDE DA Q E QUINDI NON HO TUTTI I LEGAMI DATI DAL FATTORE DI QUALITÀ CHE DIPENDE DALLA TEMP.

Sensitivà in mode-split

POSSIAMO VEDERE LA SENSITIVITÀ COME:

$$\frac{y_{SO}}{\Omega} = \frac{x_{DO}}{\Delta \omega_{BS}}$$

CIOÈ NEL CASO DI MODE-SPLIT OPERATION NON SACRIFICHIAMO DELLA SENSITIVITÀ PER AVERE BANDA.

Rumore in Mode-split

Dopo conti che non riporto qui notiamo che la NERD è identica a quella calcolata precedentemente. Ma in questo caso ho una figata infatti la banda in mode splitting operation non dipende più dal camping factor e perciò posso abbassare bs quanto voglio riducendo la NERD senza però ridurre la banda.

Per il rumore dell'elettronica non cambia niente dal punto di vista dei conti devo solo stare attento al fatto che se mi chiede di fare un giroscopio ben bilanciato in mode split il rumore del MEMS sarà minore e quindi dovrò ridurre il rumore dell'elettronica.

