

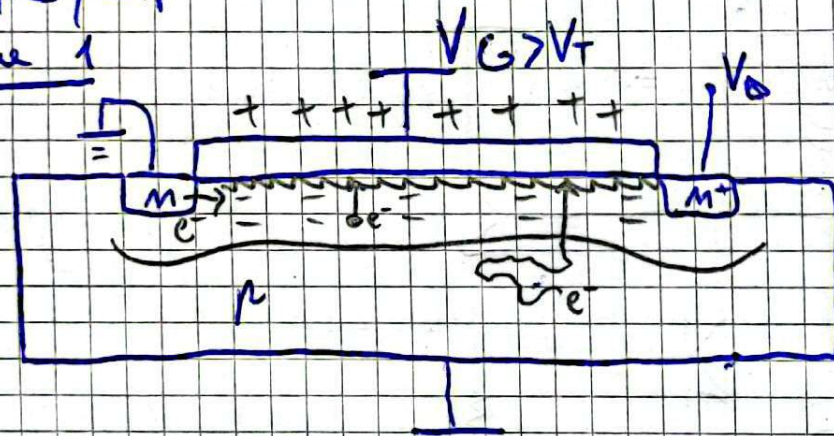
Analog Circuit Design

Appunti delle lezioni del professor
Andrea Leonardo Lacaita
A.A. 2024-2025

Emanuele Moroni
emanuele1.moroni@mail.polimi.it
emanuele.moroni99@gmail.com

16/9/24

Lezione 1

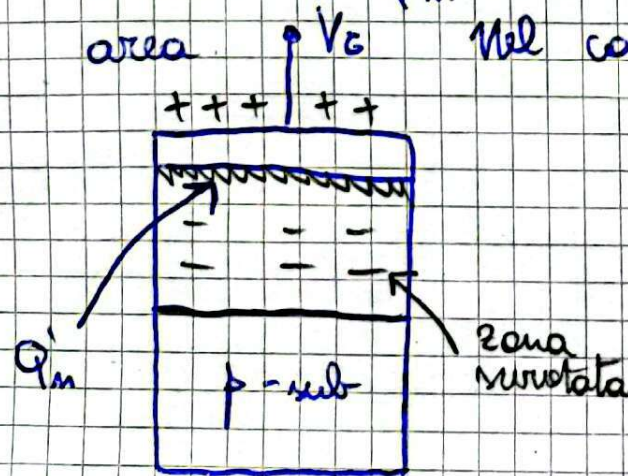


Il canale di elettroni tra source e drain è costituito da elettroni provenienti da source e drain, da elettroni

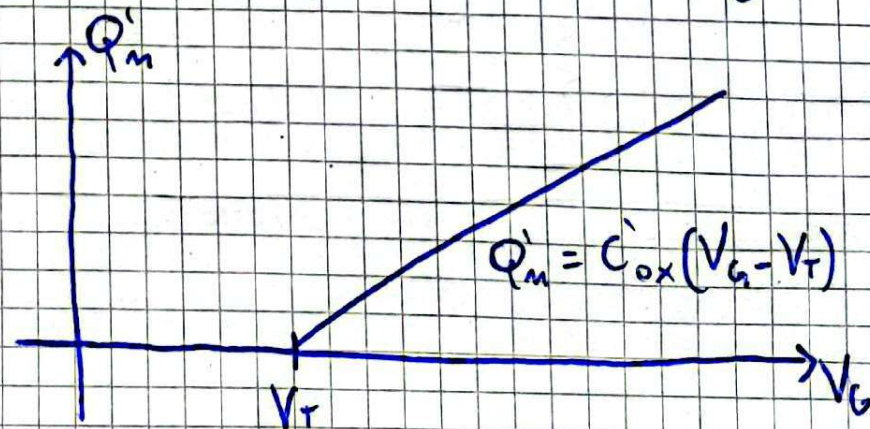
provenienti dal substrato p , e da elettroni generati nella zona svuotata, generati per effetti termici.

Si genera una corrente determinata dal moto di elettroni

Chiamo Q'_n la carica del canale per unità di area nel condensatore MOS.



Andamento di Q'_n con V_G



Con C'_{ox} capacità per unità di area.

Anche nel transistor MOS succede una cosa analoga, però la differenza è che ora source e drain non sono alla stessa tensione, quindi la tensione cresce lungo il canale muovendoci da source a drain.

La densità di carica di conseguenza deve variare tra source e drain, perché la tensione tra gate e canale deve variare muovendoci tra source e drain.

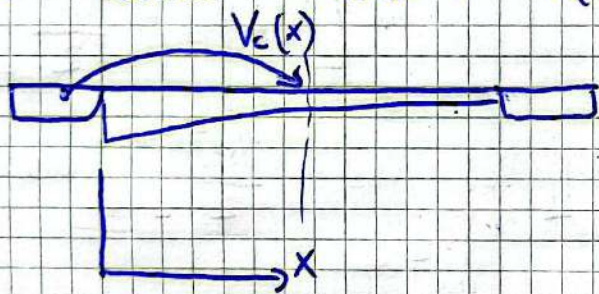
Nel source: $Q'_n = C'_{ox} (V_{GS} - V_T)$, se $V_S = 0$

allora $Q'_n = C'_{ox} (V_G - V_T)$. ($V_{GS} = V_G - V_S$)

Nel drain: $Q'_n = C'_{ox} (V_G - V_D - V_T)$

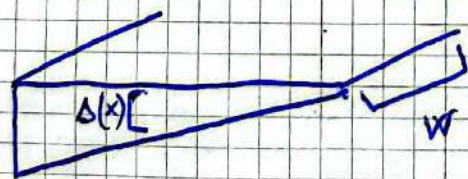
Se ci posizioniamo ora a una distanza x dal source:

chiamo $V_c(x)$ la tensione tra il source e un punto del canale posto a distanza x dal source.
La carica vale: $Q'_n(x) = C'_{ox} (V_G - V_c - V_T)$



Consideriamo l'elemento di canale posto tra x e dx :
scriviamo poi la legge di Ohm per questo tratto.

La corrente è costante lungo tutto il tratto.



La caduta di tensione in dx vale:

$$I_D = \frac{1}{q \mu n(x)} \frac{dx}{w \Delta(x)}, \quad \text{ma} \quad q \cdot n(x) \cdot \Delta(x) = Q'_n \quad \text{però}$$

la caduta di tensione si può rinviare come:

$$I_D \frac{dx}{\mu W Q'_n(x)}$$

$$\text{perciò: } dV_c = I_D \cdot dR = \frac{dx}{\mu W Q'_n(x)} \cdot I_D$$

Avevamo detto che $Q'_n(x) = C'_{ox} (V_G - V_c(x) - V_T)$ da cui:

$$dV_c = \frac{dx}{\mu W C'_{ox} (V_G - V_c(x) - V_T)} I_D \Rightarrow \frac{dV_c}{dx} = \frac{I_D}{\mu W C'_{ox} (V_G - V_c - V_T)}$$

Rivisitiamo ora l'equazione come:

$$\mu W C'_{ox} (V_G - V_c - V_T) dV_c = dx \quad \text{"Integriamo } V_c$$

da 0 a V_D , mentre dx da 0 a L , con

L lunghezza del canale. Perciò:

$$\int_0^{V_D} \mu W C'_{ox} (V_G - V_c - V_T) dV_c = I_D \int_0^L dx \quad \text{dove}$$

$$\mu W C'_{ox} \int_0^{V_D} \underbrace{(V_G - V_T - V_c)}_{V_{ov}} dV_c = \mu C'_{ox} W \left[V_{ov} V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

$$\text{Perciò: } I_D \cdot L = \mu C'_{ox} W \left[V_{ov} \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right] \quad \text{da}$$

$$\text{cui } I_D = \mu C'_{ox} \frac{W}{L} \left[V_{ov} \cdot V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]$$

$I_{D,max}$ si ottiene per $V_{DS} = V_{ov}$, in questo caso:

$$I_{DS, sat} = \frac{1}{2} \mu C'_{ox} \frac{W}{L} (V_G - V_T)^2$$

Abbiamo detto che: $Q'_n = C'_{ox} (V_G - V_D - V_T)$

perciò se $V_D = V_G - V_D$ allora $Q'_n = 0$. η_m scatta non è proprio così. Anche con tensione sotto soglia, un po' di corrente scorre comunque.

Supponiamo che il punto di pinch-off sia esattamente al drain, in una situazione iniziale.

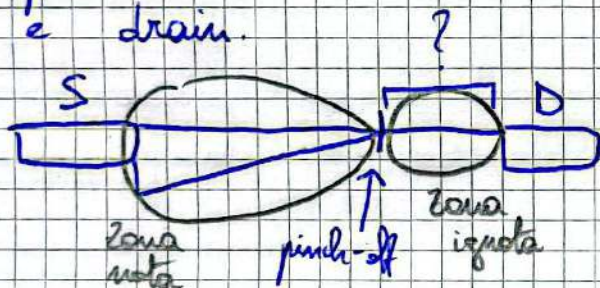
Se seguito aumentiamo la tensione al drain.

In questo modo il punto di pinch-off non è più in corrispondenza del drain, ma si sposta verso il source.

Nella regione tra il pinch-off e il drain, non possiamo più usare l'equazione:

$Q'_n = C'_{ox} (V_G - V_D - V_T)$, perché risulterebbe una carica negativa.

Vediamo cosa succede nella parte di canale tra source e pinch-off. La corrente che scorre in questa zona è la stessa che scorre tra pinch-off e drain.



Nella zona nota, vale che, (legge di Ohm)

$$I_{DS} \frac{dx}{q \mu_n W \Delta} = dV_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{DS} \frac{dx}{\mu W Q'_n} = I_{DS} \frac{dx}{\mu W C'_{ox} (V_G - V_c - V_T)} \quad \text{da cui:}$$

$$\mu W C'_{ox} \int_0^{V_G - V_T} (V_G - V_c - V_T) dV_c = I_{DS} \int_0^{L'} dx$$

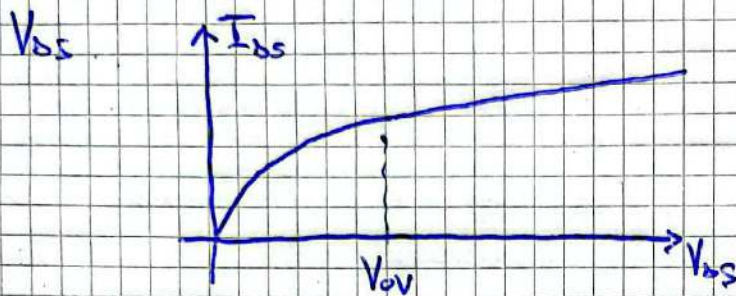
Dove L' è la nuova posizione del pinch-off e $L' < L$.

$$\mu W C'_{ox} \left[(V_G - V_T)^2 - \frac{(V_G - V_T)^2}{2} \right] = I_{DS} \cdot L' \quad \text{perciò}$$

$$I_{DS} = \frac{\mu C'_{ox}}{2} \frac{W}{L'} (V_G - V_T)^2 \quad \text{la lunghezza del}$$

canale quindi si riduce, questo si chiama channel

modulation effect. Dato che L' diminuisce, la corrente I_{DS} aumenta all'aumentare di



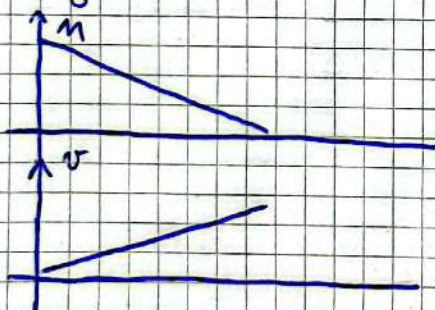
17/3/24 Lezione 2

20/8/25

Prima per $V_{GS} = V_{GS, sat}$ allora $L' = L$, mentre se V_{GS} aumenta allora L' diminuisce.

Vediamo quindi ora l'andamento di I_{DS} per $V_{GS} > V_{OV}$.

Vale che $I_{DS} \sim n v$, dove n è la densità di carica, mentre v la velocità dei portatori. n diminuisce lungo il canale, perciò v deve aumentare lungo il canale.



molto grande.

la velocità è dovuta al campo elettrico tra source e drain che fa muovere i portatori. Prima dato che n lato drain è molto piccolo, F è

possiamo calcolare il campo elettrico medio tra pinch-off e drain. la tensione tra questi due punti vale $V_{GS} - V_{GS, sat}$ e il campo elettrico medio vale:

$$F = \frac{V_{GS} - V_{GS, sat}}{d}$$

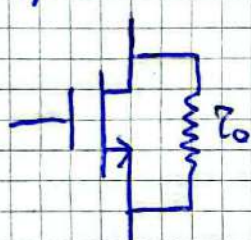
dove $d = L - L'$



Se per esempio $V_{GS} - V_{GS, sat} = 200 \text{ mV}$ e $F = 2 \cdot 10^5 \text{ V/cm}$

allora $d = 10 \text{ nm}$ ha pendenza di I_{DS} per $V_{DS} > V_{DS}^{sat}$ dipende da quanto d è grande rispetto a L . Se L è grande, allora la corrente in saturazione è praticamente costante, perché $\frac{d}{L} \ll 1$, se invece $\frac{d}{L}$ è grande, allora $I_{DS, sat}$ ha pendenza maggiore.

Si definisce $g_o = \frac{\Delta I_{DS}}{\Delta V_{DS}}$ perciò il modello equivalente è:



Perché aumentando V_{DS} oltre V_{DS}^{sat} , oltre alla corrente $I_{DS, sat}$ del generatore ideale scorre un'ulteriore corrente aggiuntiva.

Supponiamo che d sia piccola, così da poter usare lo sviluppo di Taylor. Perciò:

$$L'(V_{DS}) = L'(V_{DS}^{sat}) + \left. \frac{dL'}{dV_{DS}} \right|_{V_{DS}=V_{DS}^{sat}} (V_{DS} - V_{DS}^{sat}) + \dots$$

$$L'(V_{DS}^{sat}) = L \Rightarrow$$

$$L'(V_{DS}) = L \left[1 + \frac{1}{L} \left. \frac{dL'}{dV_{DS}} \right|_{V_{DS}=V_{DS}^{sat}} (V_{DS} - V_{DS}^{sat}) + \dots \right]$$

$\frac{1}{L} \frac{dL'}{dV_{DS}}$ ha le dimensioni di $\frac{1}{V}$. $\frac{dL'}{dV_{DS}}$ è una

derivata negativa, perciò: $\frac{1}{L} \frac{dL'}{dV_{DS}} = - \frac{1}{L} \left| \frac{dL'}{dV_{DS}} \right|$

$$\text{Perciò: } L'(V_{DS}) = L \left[1 - \lambda (V_{DS} - V_{DS}^{sat}) \right] \text{ e}$$

possiamo definire $\lambda = \frac{1}{V_A}$ V_A dipende quindi

dalla derivata $\frac{dL'}{dV_{DS}}$ su cui non possiamo agire, e da L su cui invece possiamo agire.

Però in regione di saturazione la corrente vale:

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L'} (V_G - V_T)^2 \quad \text{notare che c'è il termine } L' \text{ e non } L \quad \text{Da cui:}$$

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} \frac{(V_G - V_T)^2}{1 - \lambda (V_{DS} - V_{DS}^{sat})} \quad \text{Tale che}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad \text{per } x \text{ piccola.} \quad \text{Però:}$$

$$I_{DS} = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} (V_G - V_T)^2 (1 + \lambda (V_{DS} - V_{DS}^{sat}))$$

In DC calcoliamo la polarizzazione del circuito trascurando il channel modulation effect. Mentre in regime di piccolo segnale consideriamo il fenomeno aggiungendo r_o :



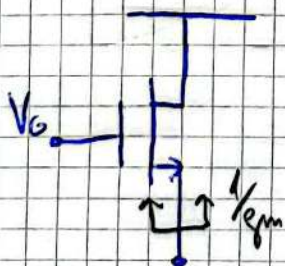
dove:

$$g_o = \frac{dI_{DS}}{dV_{DS}} = \lambda I_{DS}^{sat} = \frac{I_{DS}^{sat}}{V_A}$$

Transconduttanza del MOSFET: $g_m = \frac{dI_{DS}}{dV_G} = 2K (V_G - V_T)$
 trascurando il channel modulation effect. Tale anche che

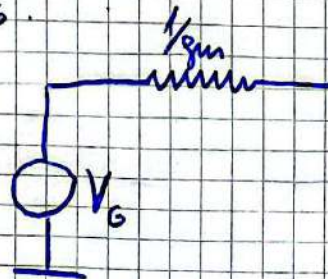
$$g_m = \frac{2I_{DS}^{sat}}{V_G - V_T}$$

Considero il circuito:

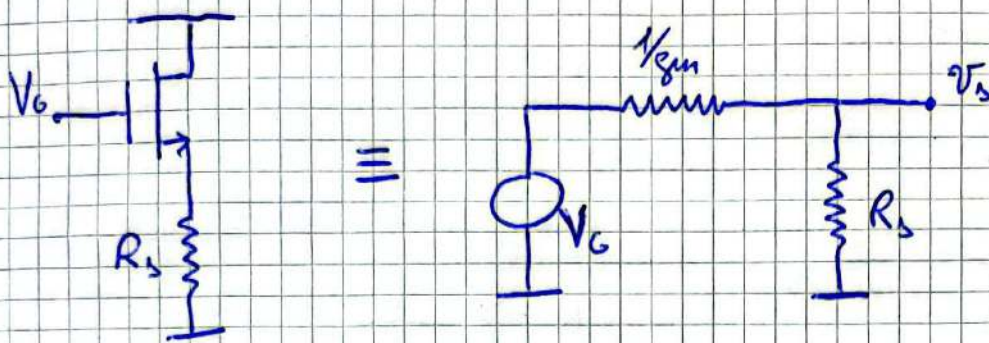


Voglio calcolare l'equivalente Thevenin.
 Per farlo lascio il source flottante, però per il MOSFET non scorre corrente $\Rightarrow V_S = V_G$.

Però l'equivalente Thevenin è:



Se ora aggiungo R_s :

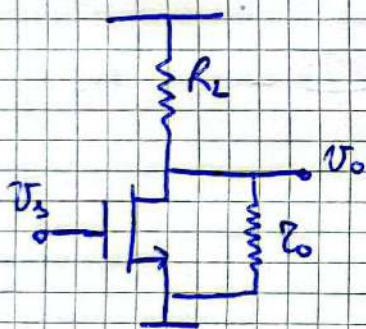


$$\frac{v_s}{V_G} = \frac{R_s}{\frac{1}{g_m} + R_s} = \frac{g_m R_s}{1 + g_m R_s} \approx 1 \quad \text{questo circuito fa da buffer.}$$

18/9/24

Lezione 3

Considero il circuito:



se anche $R_L \rightarrow \infty$ il guadagno è limitato da r_o e si ottiene che

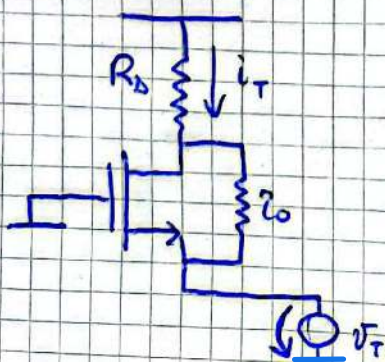
$G \rightarrow g_m r_o$. Questo è il massimo guadagno possibile in questa configurazione =

razione a singolo transistoro.

$$G_{max} = \frac{2I_{DS}^{sat}}{V_{ov}} \cdot \frac{V_A}{I_{DS}^{sat}} = \frac{2V_A}{V_{ov}} \quad \text{e riduciamo molto}$$

V_{ov} , G_{max} aumenta. Però c'è il problema che entriamo nel regime di inversione debole dove valgono altre equazioni.

Consideriamo ora il seguente circuito:

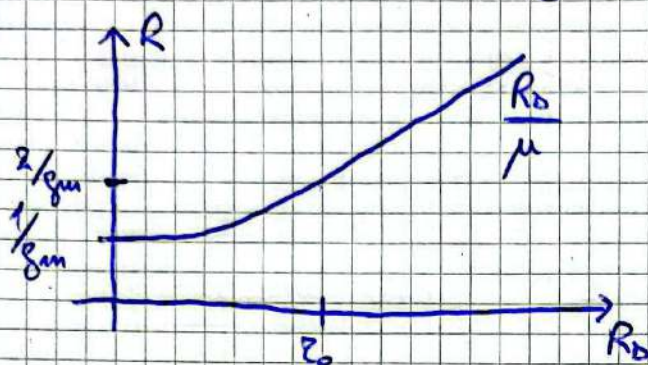


$$i_T = g_m v_T + \frac{v_T - R_D i_T}{r_o} \Rightarrow$$

$$i_T \left[1 + \frac{R_D}{r_o} \right] = \left(g_m + \frac{1}{r_o} \right) v_T \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{v_T}{i_T} = R = \frac{r_o + R_D}{1 + g_m r_o}$$

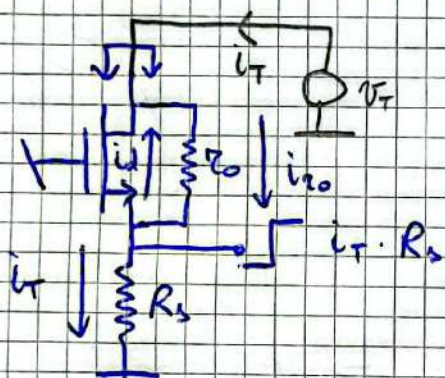
Consideriamo il diagramma:



Se $R_D \gg r_o$ allora

$$R \rightarrow \frac{R_D}{g_m r_o} = \frac{R_D}{\mu}$$

Consideriamo ora il circuito:



$$\frac{v_T - R_S i_T}{r_o} = i_o$$

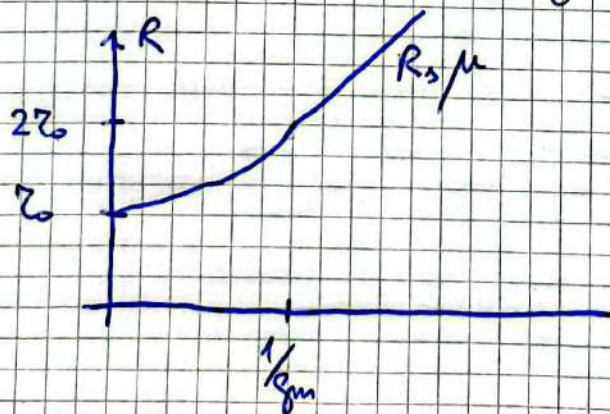
$$i_o = g_m i_T R_S \quad \text{perciò}$$

$$i_T = \frac{v_T - R_S i_T}{r_o} - g_m R_S i_T$$

$$\Rightarrow i_T \left[1 + \frac{R_S}{r_o} + g_m R_S \right] = \frac{v_T}{r_o}$$

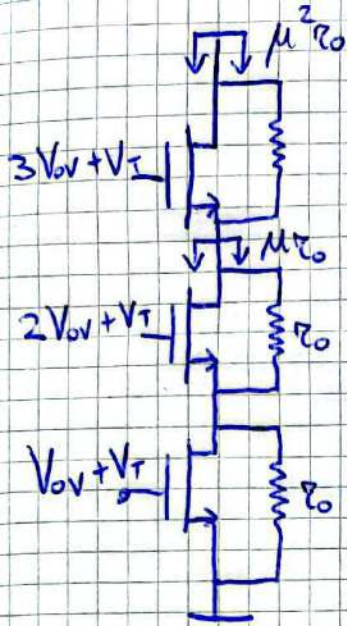
$$\frac{v_T}{i_T} = R_S + r_o + r_o g_m R_S = R_S + r_o (1 + g_m R_S)$$

Consideriamo il diagramma:



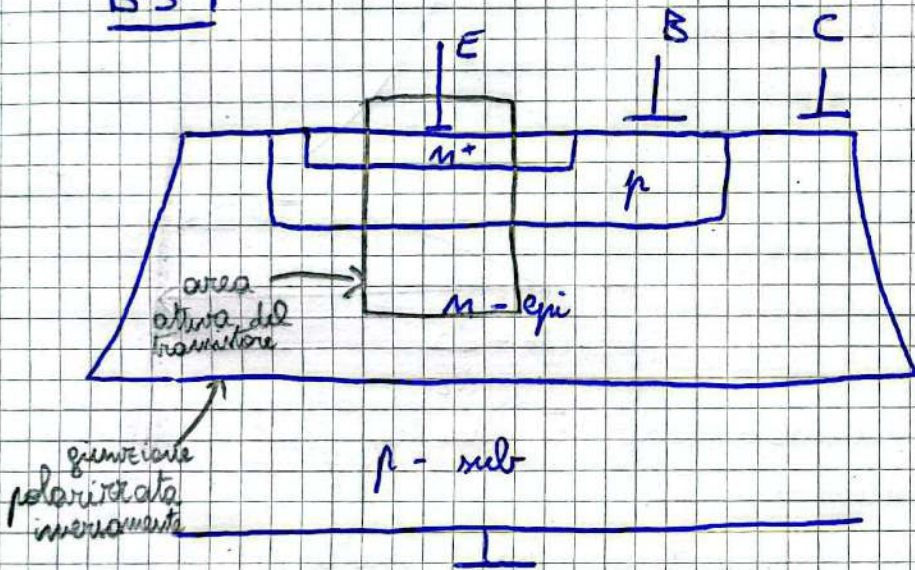
Per $R_S \rightarrow \infty \quad \frac{v_T}{i_T} \rightarrow R_S / \mu$

Struttura cascode:



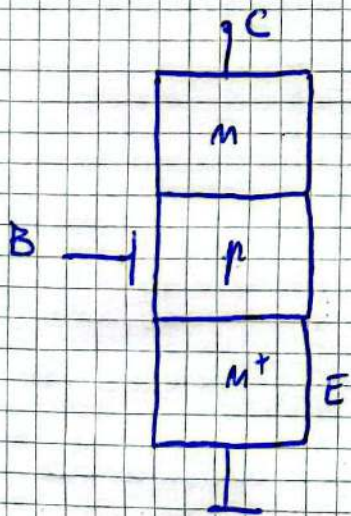
Con la struttura cascode riusciamo ad aumentare l'impedenza vista dal drain. Il costo è la tensione ai gate che deve essere sempre maggiore e quindi maggior consumo di energia.

BJT

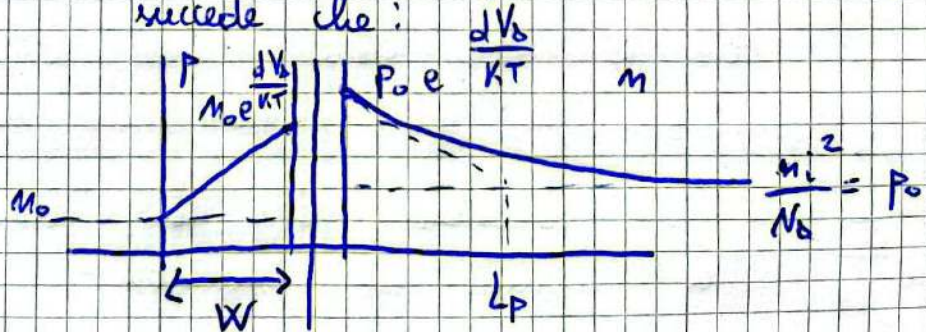


l'area attiva è quella nel rettangolo. Il costo ha lo scopo di raccogliere la corrente e di isolare il dispositivo.

Consideriamo la zona attiva:



In una giunzione pn polarizzata direttamente, con la zona p molto stretta (molto più corta di L_n) succede che:

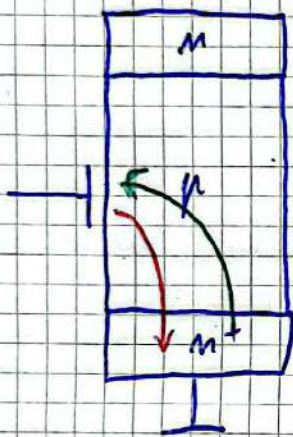


Il profilo nella zona p è lineare perché la zona p (la base) è molto stretta e tutte le ricombinazioni avvengono all'interfaccia.

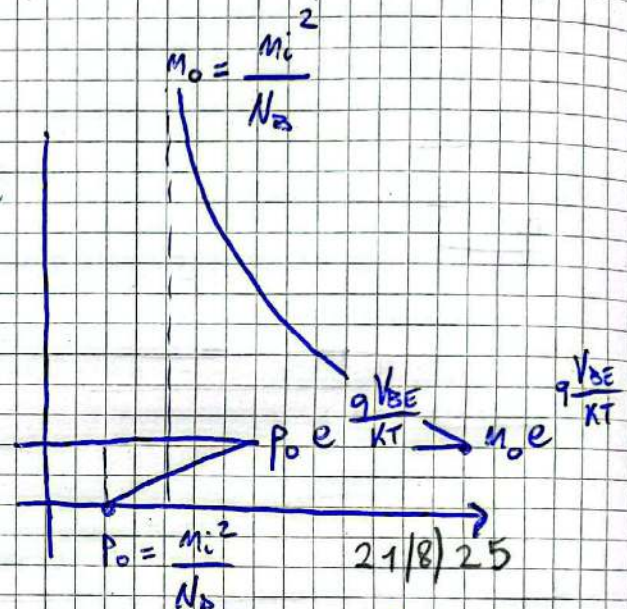
Nel BJT la giunzione base collettore è polarizzata inversamente. Infatti la zona n è commessa a una tensione maggiore rispetto alla zona p.

Anche la giunzione base emettitore è polarizzata direttamente.

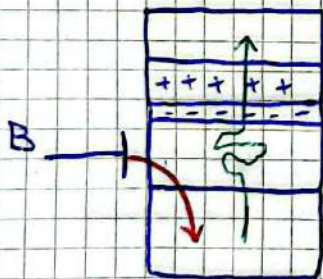
Se la base fosse spessa:



- moto elettroni
- moto lacune



Il dispositivo fatto in questo modo è inutile perché il collettore non gioca alcun ruolo ha chiave è rendere la base molto stretta.



- moto elettroni
- moto lacune

Se la base è molto sottile, nessun elettrone si ricombina nella base e tutti gli elettroni raggiungono il collettore.

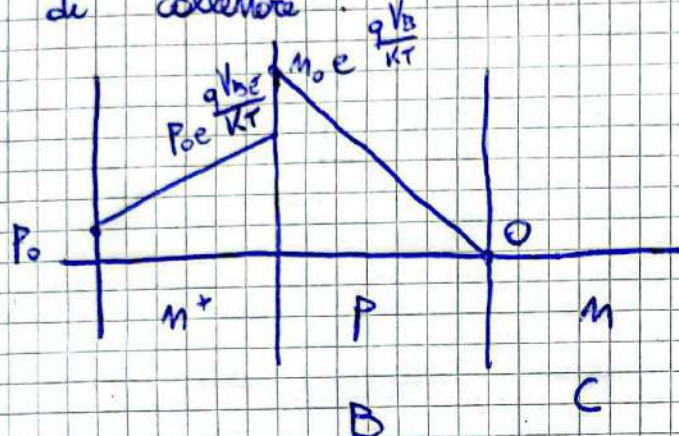
La corrente di collettore è la componente costituita da elettroni della corrente di emettitore: $I_c = I_{Em}$

in generale: $I_c = I_{Em}$ / $I_E = I_{Ep} + I_{Em}$ /

$I_B = I_{Ep}$

Dato che non voglio spendere energia per controllare il dispositivo, voglio che la corrente in ingresso alla base sia molto piccola.

studiamo la dipendenza tra corrente di base e corrente di collettore.



Tra base e collettore la densità di portatori è nulla perché la giunzione è polarizzata inversamente e quindi gli elettroni che raggiungono l'interfaccia vengono immediatamente spinti nel collettore.

Nella base non c'è campo elettrico, è una regione neutrale, quindi c'è solo corrente di diffusione.

$$I_{E_n} = q D_n n_0 e^{qV_{BE}/KT} \cdot \frac{1}{W_B} \cdot A_e = I_c$$

$$I_{E_p} = q D_p A_e \frac{P_0}{W_e} \left(e^{qV_{BE}/KT} - 1 \right) = I_B$$

Abbiamo calcolato ora il rapporto tra le due correnti

$$\frac{I_c}{I_B} = \beta = \frac{n_0 \frac{W_e}{W_B} \frac{D_n}{D_p}}{P_0 \frac{N_e}{N_B} \frac{W_e}{W_B}} \quad \text{l'obiettivo è}$$

che β sia grande, perciò $N_E \gg N_B$ e $W_B \ll W_E$
 $\Rightarrow$ base meno drogata dell'emettitore, e base molto stretta.

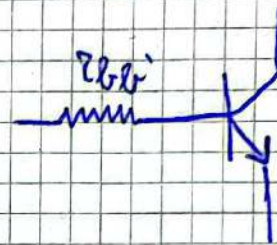
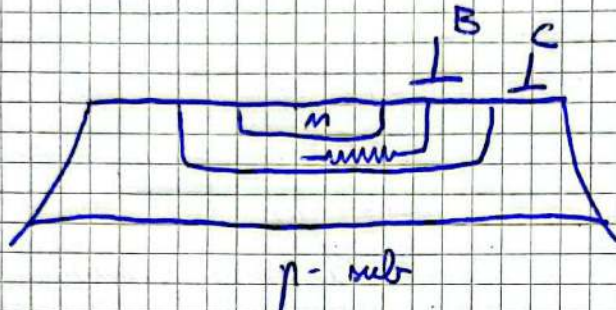
Mentre $N_C < N_B$ in modo tale che la giunzione p-n polarizzata inversamente base-collettore abbia una grande tensione di breakdown, e possa sostenere grande tensione ai suoi capi.

23/9/24

Lezione 4

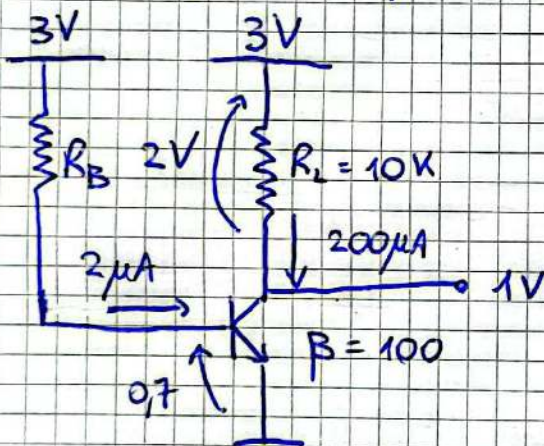
Il coefficiente $\frac{N_E W_E}{N_B W_B}$ viene chiamato Gummel.

r_m serie alla base c'è il resistore $r_{bb'}$:



Vediamo ora i parametri delle prestazioni del BJT

Esempio di polarizzazione:



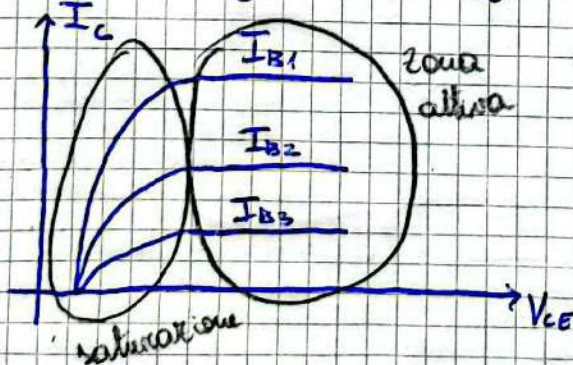
Il dispositivo è controllato in corrente.

Dato che la giunzione base-emettitore è polarizzata direttamente, $V_{BE} = 0,7V$.

$$\text{Però } I_B = \frac{3V - 0,7V}{R_B} = 2\mu A$$

da cui calcoliamo $R_B = 1,15 k\Omega$

Curva I_C vs V_{CE} :

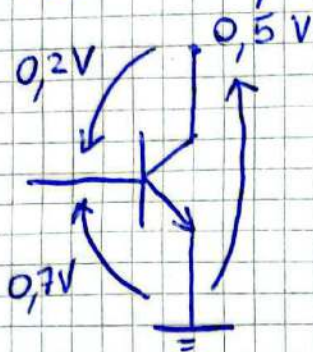


I vari grafici di I_C dipendono da I_B .

Maggiore è I_B , maggiore è I_C a parità di V_{CE} .

Se V_{CE} diventa troppa piccola, sotto $0,7V$, allora la giunzione base-collettore diventa polarizzata direttamente.

Per esempio:



In questo caso le lacune scorrono sia da base a emettitore sia da base a collettore.

La corrente delle lacune che si muovono da base a collettore si

oppone alla corrente di elettroni che scorre da collettore a emettitore. Quindi la corrente netta di collettore è minore. $\Rightarrow$ Per valori bassi di V_{CE} la corrente cala. $I_C = 0$ per $V_{CE} \neq 0$.

Cioè la corrente non passa per l'origine degli assi. ha ragione è che l'area della giunzione base emettitore è molto minore dell'area della giunzione base collettore.

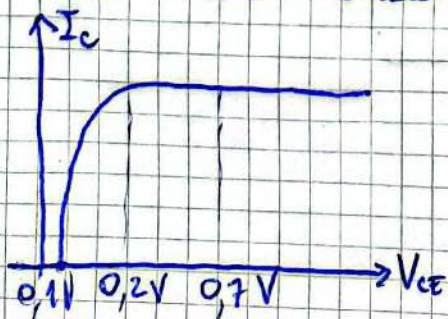
Dato che $I = q A e^{\frac{qV_b}{kT}}$, affinché la corrente base $\rightarrow$ collettore sia uguale alla corrente

collettore $\rightarrow$ emettitore serve che $V_{BE} > V_{BC}$ da

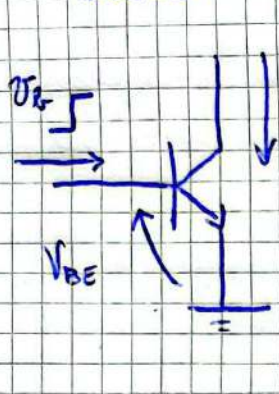
cui $V_{CE} > 0$, solitamente $I_C = 0$ per $V_{CE} = 0,1V$.

Dato che nella zona di saturazione la corrente ha andamento esponenziale, la tensione che separa saturazione da zona attiva è poco superiore a $0,1V$, tipo $0,2V$.

Però per $V_{CE} < 0,7$ la giunzione base-collettore è polarizzata direttamente, ma serve andare a $0,2V$ prima che la corrente cambi significativamente, per via dell'andamento esponenziale.



Studio di piccolo segnale:

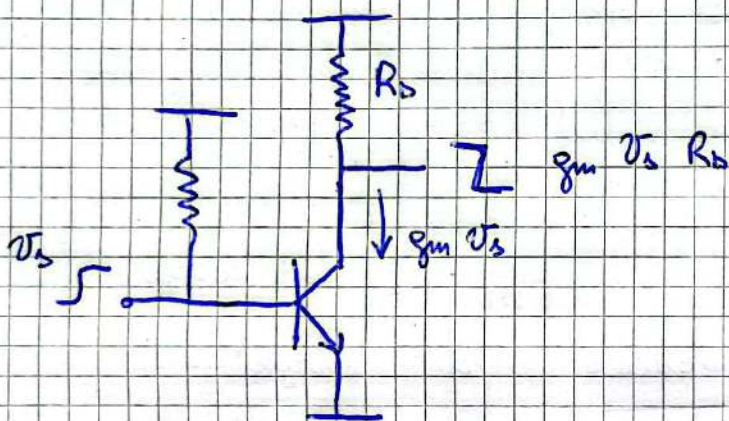


$$I_c = I_s e^{\frac{qV_{BE}}{KT}} + \Delta I_c$$

$$\Delta I_c = \underbrace{\frac{dI_c}{dV_{BE}}}_{g_m} \cdot \Delta V_{BE} \quad \text{dove quindi:}$$

$$g_m = \frac{dI_c}{dV_{BE}} = \frac{q}{KT} I_s e^{\frac{qV_{BE}}{KT}} = \frac{I_c}{V_{Th}} \quad \text{con } V_{Th} = \frac{KT}{q}$$

Considero il circuito:



C'è un guadagno tra base e collettore pari a:

$$G = g_m R_D$$

Nel BJT la corrente in zona attiva diretta non è costante, ma ha una certa pendenza.

Aumentando la tensione di polarizzazione inversa tra base e collettore, aumenta l'ampiezza della zona invertita.

Questa aumenta sia lato collettore che lato base, perciò la lunghezza effettiva della base, quella della zona neutra, diminuisce. Perciò W_B non è costante ma dipende da V_{CB} . Perciò:

$$W_B(V_{CB}) = W_B(0) + \frac{dW_B}{dV_{CB}} \Delta V_{CB} \quad \text{Dato che } V_{BE}$$

rimane circa costante a 0,7V allora

$$V_{CE} \approx V_{CB} + 0,7V \quad \text{Perciò:}$$

$$W_B(V_{CE}) = W_B(0,7) + \frac{dW_B}{dV_{CE}} \Delta V_{CE}$$

all' aumentare di V_{CE} , W_B diminuisce, perciò
 $\frac{dW_B}{dV_{CE}} < 0$ da cui: $W_B(V_{CE}) = W_B(0,7) - \left| \frac{dW_B}{dV_{CE}} \right| \Delta V_{CE}$

chiamo $W_B^0 = W_B(0,7)$. Perciò:

$$I_C = q D_n \frac{m_i^2}{N_B} \cdot \frac{1}{W_B^0 - \left| \frac{dW_B}{dV_{CE}} \right| (V_{CE} - 0,7)}$$

Per espansione di Taylor:

$$W_B(V_{CE}) = W_B(0,7) - \left| \frac{dW_B}{dV_{CE}} \right| (V_{CE} - 0,7) =$$

$$= W_B^0 \left[1 - \frac{1}{W_B^0} \left| \frac{dW_B}{dV_{CE}} \right| (V_{CE} - 0,7) \right] =$$

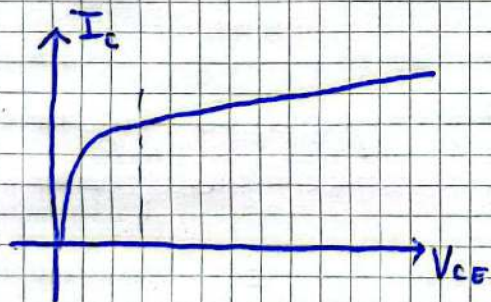
$$= W_B^0 [1 - \lambda (V_{CE} - 0,7)] \quad \text{Perciò la corrente può essere}$$

scritta come:

$$I_C = q D_n \frac{m_i^2}{N_B} e^{\frac{qV_{BE}}{KT}} \cdot \frac{1}{W_B^0} [1 + \lambda (V_{CE} - 0,7)] \quad \text{tenendo}$$

$$\text{presente che: } \frac{1}{1 - \lambda (V_{CE} - 0,7)} \approx 1 + \lambda (V_{CE} - 0,7)$$

$$\text{Perciò: } I_C = I_C^0 [1 + \lambda (V_{CE} - 0,7)] \quad \text{Graficamente:}$$



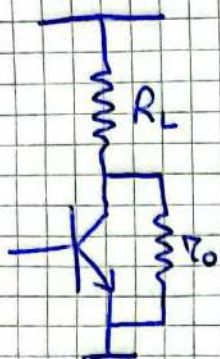
Si può quindi definire g_o come:

$$g_o = \frac{dI_C}{dV_{CE}} = \lambda I_C^0$$

$$\lambda = \frac{1}{W_B^0} \frac{dW_B}{dV_{CE}} \left[\frac{1}{V} \right] \quad \text{poniamo definire: } V_A = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{perciò } g_o = \frac{I_C^0}{V_A}$$

G_{max} del BJT:



se $R_L \rightarrow \infty$ $G_{max} = g_m r_o$

Nel MOSFET: $\mu = g_m r_o = \frac{2I_{DS}}{V_{OV}} \cdot \frac{V_A}{I_{DS}} = \frac{2V_A}{V_{OV}}$ dove V_A è proporzionale alla lunghezza del canale L .

Nel BJT: $g_m r_o = \frac{I_c}{V_{th}} \cdot \frac{V_A}{I_c} = \frac{V_A}{V_{th}}$ ma nel

BJT non possiamo modificare V_A e nemmeno $V_{th} \Rightarrow$

nel BJT $g_m r_o$ è definito dalla tecnologia.

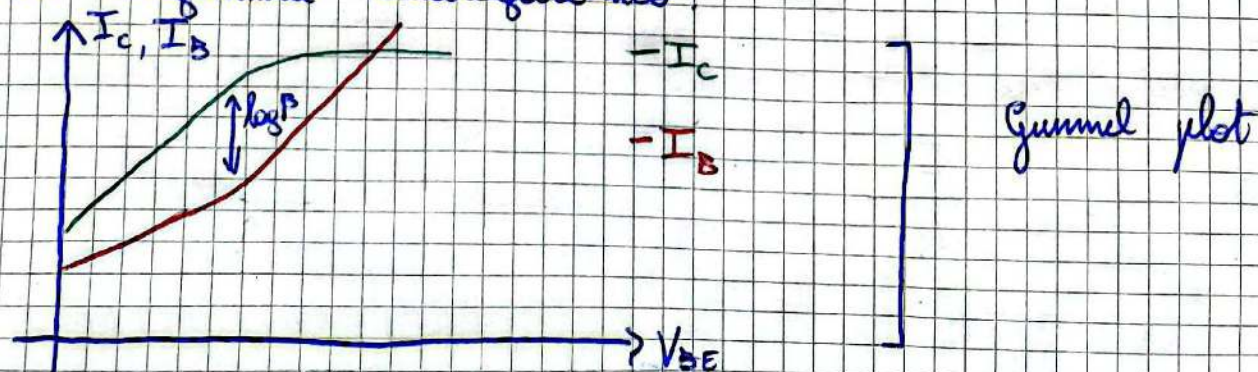
Per un BJT npn $V_A \approx 100V$. Per cui in

un BJT $G_{max} = \frac{100V}{25mV} = 4000$

Per cui il BJT rispetto al MOSFET ha maggior transconduttanza a parità di corrente, e maggior guadagno massimo.

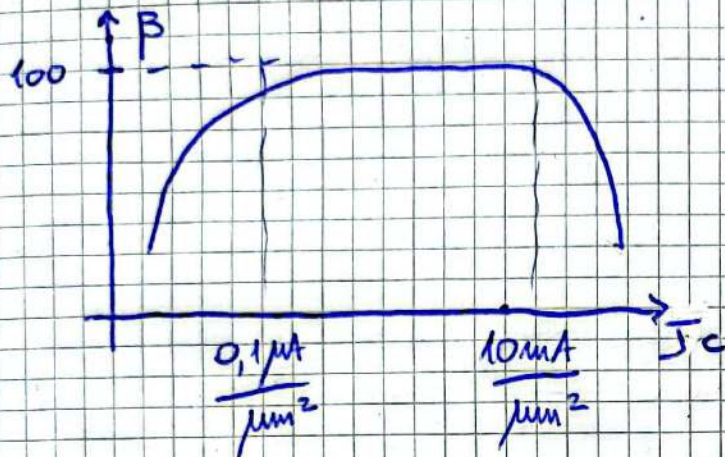
Per il dimensionamento del BJT, possiamo agire sull'area dell'emitter. Questa va a modificare la densità di corrente I_c .

Vale che: $I_c = I_s e^{\frac{qV_{BE}}{kT}}$ e $I_B = I_o e^{\frac{qV_{BE}}{kT}}$ in un diagramma semilogaritmico:



Per bassi valori di V_{BE} , I_S cresce con pendenza ridotta, in particolare dimezzata. Invece per alti valori di V_{BE} I_C satura.

Senza β vs I_C :



Si polarizza quindi il transistor in modo tale da avere il migliore valore di β .

Il diagramma dipende da J_C che è la densità di corrente di collettore per unità di area.

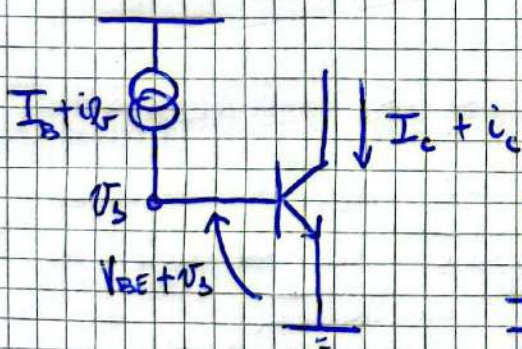
Una volta nota I_C in base alle esigenze del circuito, si dimensiona A_E (che definisce poi di conseguenza anche A_C) in modo tale da avere J_C che corrisponda al valore massimo di β .

25/9/2h

24/8/25

Lezione 5

Definiamo le resistenze viste dai vari terminali del BJT. Consideriamo il circuito:



$$\frac{V_b}{i_b} = R_{in}$$

$$I_C = I_S e^{\frac{qV_{BE}}{KT}}$$

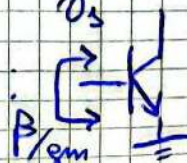
$$I_C = I_B \cdot \beta$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{I_S}{\beta} e^{\frac{qV_{BE}}{KT}}$$

$$i_b = dI_B = \frac{I_S}{\beta} \frac{q}{KT} e^{\frac{qV_{BE}}{KT}} \cdot \frac{dV_{BE}}{V_s} = \frac{I_C}{\beta} \frac{1}{V_{Th}} V_s$$

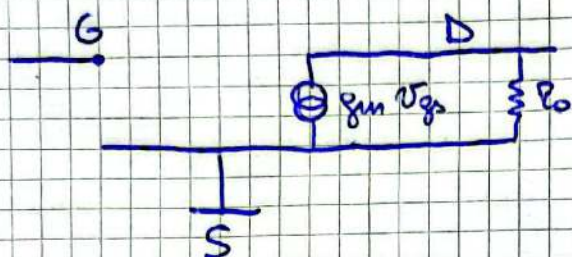
$$\frac{V_b}{i_b} = \beta \cdot \frac{1}{g_m} = R_{in}$$

Senza



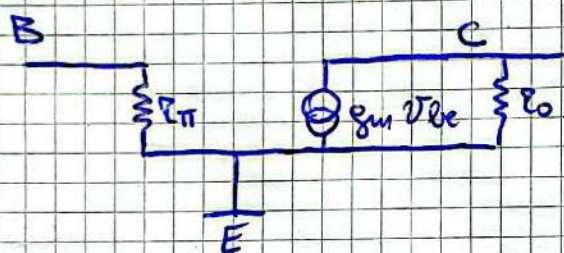
Si definire: $r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m}$

nel MOSFET il modello equivalente è:



se gate non è connesso, è un circuito aperto.

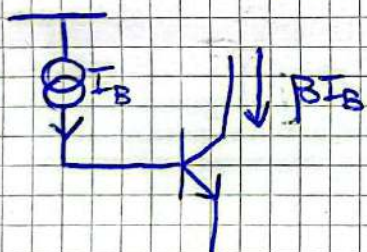
Mentre nel BJT:



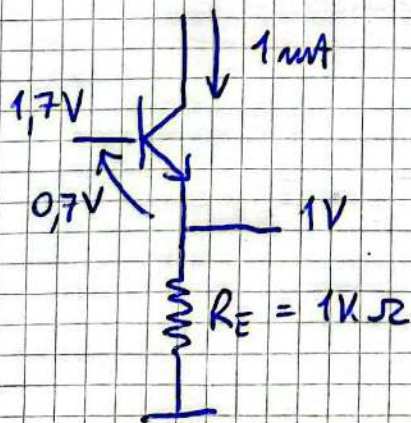
Ora tra base ed emitter c'è r_{π}

Per selezionare la corrente per un BJT:

β ha un'alta variabilità, quindi non si usa l'appoggio:



Si usa invece il seguente metodo: supponiamo di volere $I_c = 1 \text{ mA}$

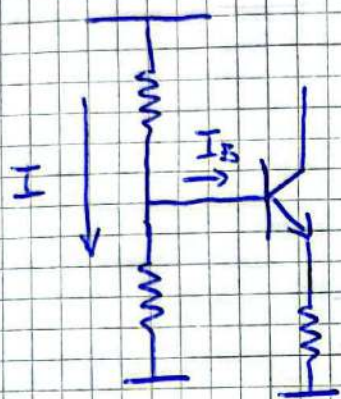


Si definisce V_B e R_E . V_{BE} è

fino a $0,7 \text{ V} \Rightarrow V_E$ è definita da cui è definita la corrente per R_E e quindi anche I_c .

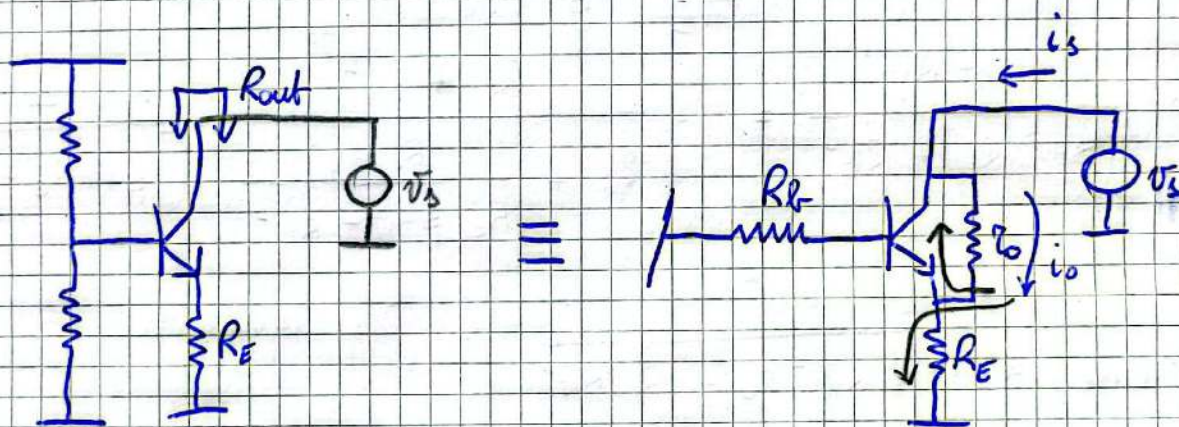
Per impostare V_B a $1,7 \text{ V}$ si usa ad esempio un partitore di tensione.

ha cosa importante è che la corrente che scorre per il partitore sia molto maggiore di I_B , in modo tale che la polarizzazione sia immune alle variazioni di β .

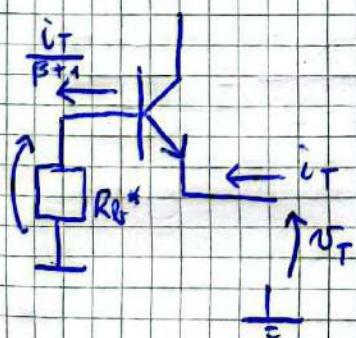


due valori che $I \gg I_B$.

Calcoliamo ora R_{out} .

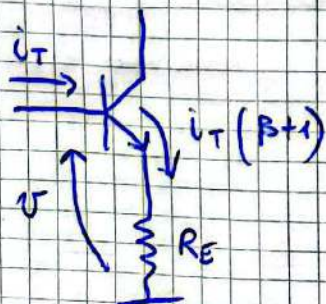


$$R_b^* = R_b + r_{\pi}$$



In questo circuito la tensione ai capi di R_b^* è: $\frac{i_T}{\beta+1} \cdot R_b^*$

Nel caso del circuito:

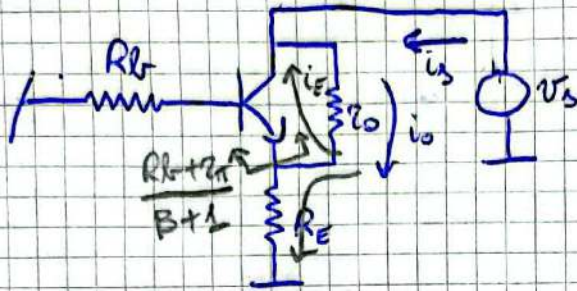


$$v = i_T (\beta+1) \left[\frac{1}{g_m} + R_E \right] \text{ perciò}$$

$$R = \frac{\beta+1}{g_m} + R_E (\beta+1) \approx r_{\pi} + R_E (\beta+1)$$

3 termini $\beta+1$ che vanno a dividere o moltiplicare sono dovuti al fattore moltiplicativo della corrente.

Torniamo al circuito:



$$i_o = \frac{V_s}{r_o + R_E \parallel \frac{R_B^*}{\beta+1}}$$

$$i_E = i_o \frac{R_E}{R_E + \frac{R_B^*}{\beta+1}} \quad \text{e} \quad i_C = i_E \cdot \frac{\beta}{\beta+1}$$

$$i_s = i_o - i_C = i_o \left[1 - \frac{\beta R_E}{(\beta+1)R_E + R_B^*} \right] =$$

$$= i_o \frac{R_E + R_B^*}{(\beta+1)R_E + R_B^*} = V_s \frac{R_E + R_B^*}{r_o + \frac{R_E R_B^*}{R_E(\beta+1) + R_B^*}} \cdot \frac{1}{(\beta+1)R_E + R_B^*}$$

$$= \frac{R_E + R_B^*}{r_o R_E (\beta+1) + R_B^* r_o + R_E R_B^*}$$

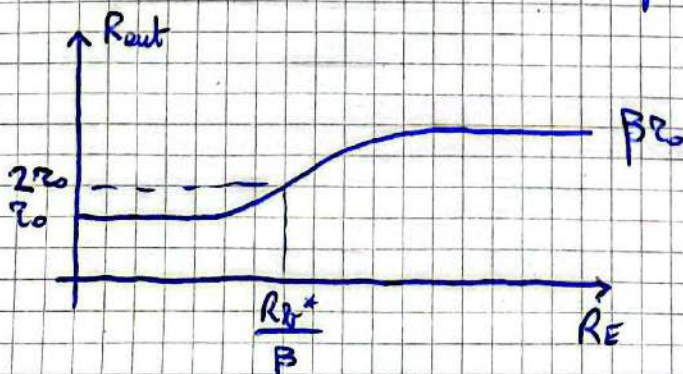
In definitiva:

$$R_{out} = \frac{V_s}{i_s} = R_E \parallel R_B^* + r_o \left(1 + \frac{\beta R_E}{R_E + R_B^*} \right)$$

Per avere $\frac{\beta R_E}{R_E + R_B^*} = 1$ allora $R_E = \frac{R_B^*}{\beta-1} \approx \frac{R_B^*}{\beta}$

In questo caso il coefficiente di r_o nell'espressione di R_{out} vale 2.

Andamento di R_{out} in funzione di R_E :

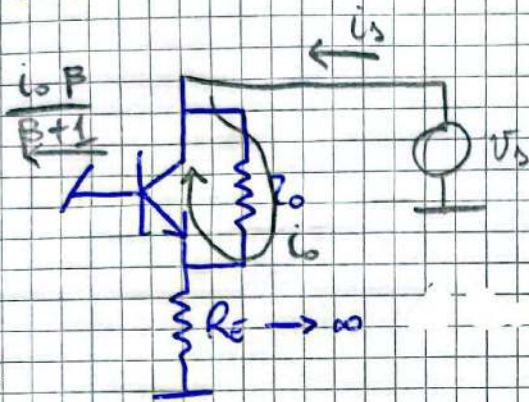


Per $R_E \rightarrow \infty$ R_{out} ha valore asintotico βr_o .

A causa di questo valore asintotico, nel caso del BJT non ha senso avere il cascode per aumentare R_{out} .

Perché è presente questa limitazione βr_o ?

Consideriamo il circuito



Se $R_E \rightarrow \infty$ allora la corrente che manda per r_o torna dentro il transistor dall'emitter. Se non ci fosse corrente di base, per la KCL $i_s = 0$.

Ma calma, in realtà c'è anche la corrente di base.

Ora:
$$i_s = i_o - i_o \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{i_o}{\beta+1} = \frac{V_s}{r_o(\beta+1)} \approx \frac{V_s}{\beta r_o}$$

Dove βr_o è proprio il valore asintotico.

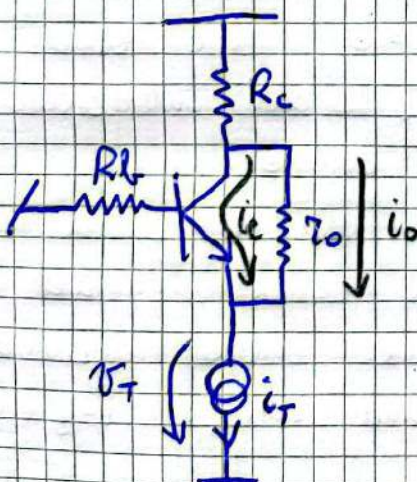
Considero il circuito:



La resistenza vista dalla base vale:

$$r_{\pi} + R_E(\beta+1)$$

Consideriamo ora il circuito:



Trascuriamo la corrente di base, in questo caso per R_c scorre i_T .

$$i_o = \frac{V_T - R_c i_T}{r_o}$$

$$i_e = \frac{V_T}{\frac{R_b + r_{\pi}}{\beta+1}} = \frac{V_T}{R_{Th}}$$

Ora:
$$i_T = \frac{V_T - R_c i_T}{r_o} + \frac{V_T(\beta+1)}{R_{Th}} \Rightarrow$$

$$i_T \left(1 + \frac{R_c}{r_o} \right) = v_T \left[\frac{1}{r_o} + \frac{\beta+1}{R_{\theta^*}} \right] \quad \text{da cui}$$

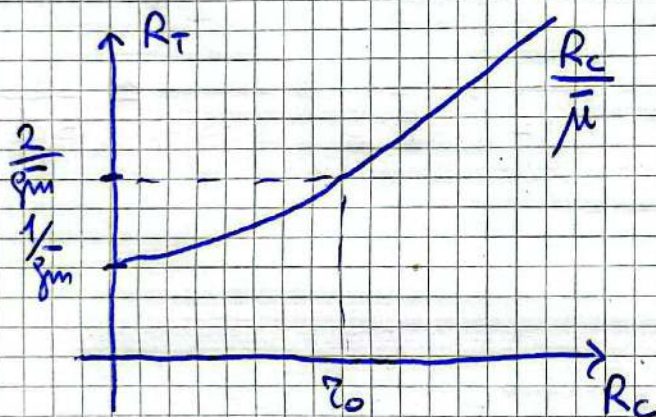
$$R_T = \frac{v_T}{i_T} = \frac{r_o + R_c}{1 + \frac{r_o(\beta+1)}{R_{\theta^*}}} \quad \text{vediamo ora il}$$

diagramma R_T vs. R_c .

R_T può essere riscritta come:

$$R_T = \frac{r_o + R_c}{1 + \frac{r_o \bar{g}_m}{R_{\theta} + r_{\pi}}}, \quad \text{chiamo } \bar{g}_m = \frac{r_{\pi} g_m}{R_{\theta} + r_{\pi}}$$

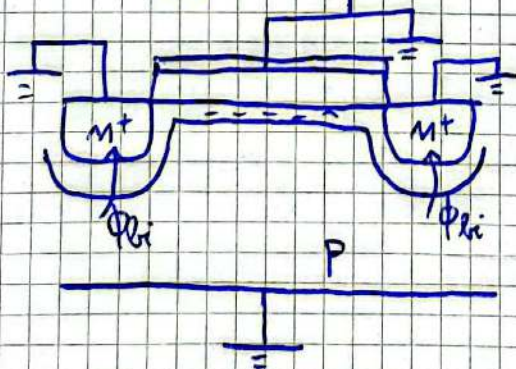
ovvero:



$$\text{dove } \bar{\mu} = \bar{g}_m r_o$$

Weak inversion

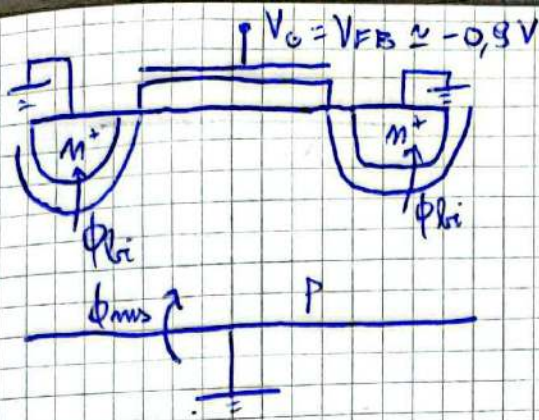
Vediamo cosa succede in un MOSFET per valori di V_{GS} inferiori di V_T .



Questa tensione è chiamata
vale circa $-0,9 \text{ V}$.

Se $V_G = 0$, c'è zona
svuotata all'interfaccia
con l'ossido.

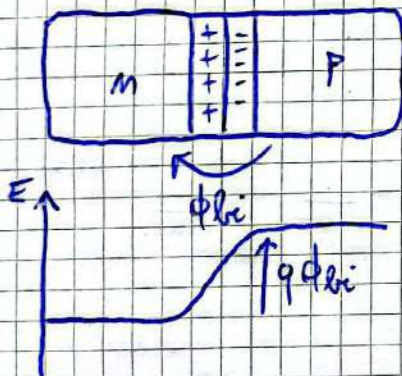
Affinché all'interfaccia non
ci sia zona svuotata,
 V_G deve essere negativa.
flat band voltage V_{FB} è



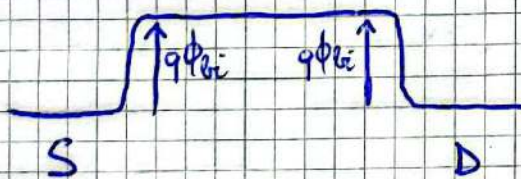
Il flat band non c'è tensione ai capi del substrato perché è tutta zona neutra. Non c'è tensione ai capi dell'ossido. In questo caso $V_G = \phi_{ms}$

Vediamo l'energia potenziale lungo una linea che collega source a drain.

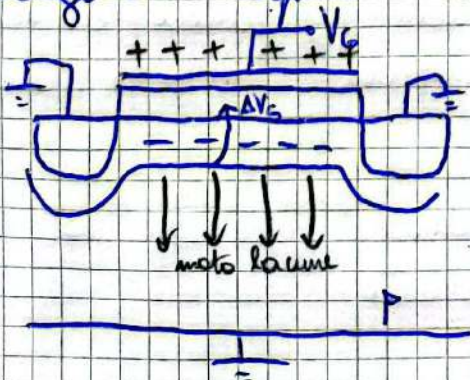
In una giunzione pn all'equilibrio:



Scenario nel MOSFET in flat band:

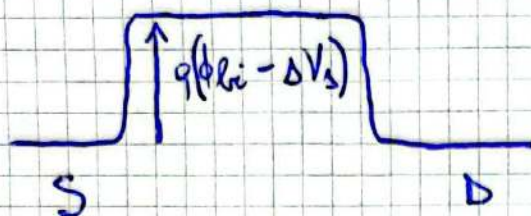


Iniziamo ora a incrementare la tensione di gate. Sotto gate si accumulano cariche positive $\Rightarrow$ devono apparire cariche negative dall'altra parte. Le lacune vengono respinte dall'interfaccia lasciando ioni negativi.



Ai capi della zona non drogata c'è tensione pari a ΔV_s . In questa zona l'energia potenziale degli elettroni è pari a $q\Delta V_s$.

Bersio:



all' interfaccia ci sono anche elettroni, perché sono attratti dalla carica positiva al gate.

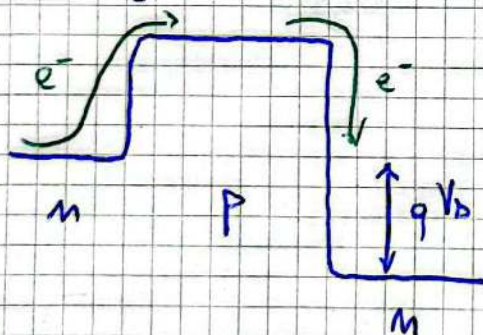
Il numero di elettroni che dal source hanno energia cinetica sufficiente per superare la barriera di potenziale è:

$$N_D e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

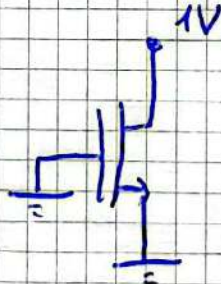
Bersio la concentrazione di portatori all' interfaccia è:

$$n_s = N_D e^{-\frac{q(\phi_{bi} - \Delta V_s)}{kT}} = N_D e^{-\frac{q\phi_{bi}}{kT}} e^{\frac{q\Delta V_s}{kT}}$$

Se ora alzo la tensione al drain, abbiamo l' energia al drain di qV_D .



Bersio se per esempio abbiamo:



Teoricamente la corrente dovrebbe essere nulla perché $V_{GS} = 0$.

In realtà ci sono portatori all' interfaccia e quindi c'è corrente. E' una giunzione n-p-n che funziona come un BJT

Il source emette elettroni nel canale che fa da base e il drain è il collector.

30/8/2h

25/8/25

Lezione 6

l'espressione della tensione di built-in $\bar{\phi}$:

$$\phi_{bi} = \frac{KT}{q} \ln \left(\frac{N_D N_A}{n_i^2} \right)$$

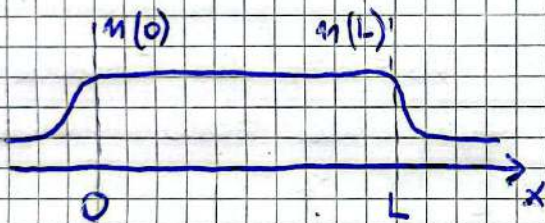
Però:

$$N_D e^{-\frac{q\phi_{bi}}{KT}} = N_D e^{-\frac{q}{KT} \cdot \frac{KT}{q} \ln \left(\frac{N_D N_A}{n_i^2} \right)} = N_D e^{\ln \left(\frac{n_i^2}{N_D N_A} \right)} =$$

$$= N_D \frac{n_i^2}{N_D N_A} = \frac{n_i^2}{N_A} \quad \text{da questo si deduce che in caso}$$

di flat band, la concentrazione di portatori minoritari all'equilibrio nel substrato p è uguale alla concentrazione di elettroni in questa zona (il che ha senso ed è anche abbastanza scontato).

Nel caso in cui $V_G > V_{FB}$:

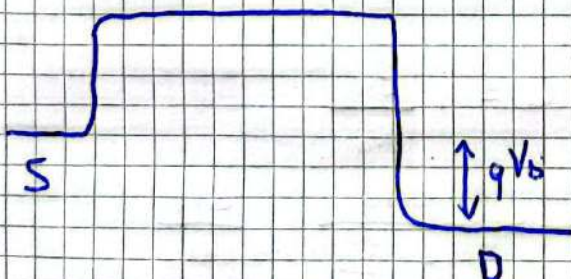


$$n(0) = N_D e^{-\frac{q\phi_{bi}}{KT}} e^{\frac{q\Delta V_s}{KT}} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\frac{q\Delta V_s}{KT}} = n_0 e^{\frac{q\Delta V_s}{KT}}$$

in questo caso $n(L) = n(0)$,

perché $V_G < V_T$. Però ora siamo nel caso in cui $V_{FB} < V_G < V_T$ e $V_D = 0$ V.

Nel caso in cui abbiamo V_D :

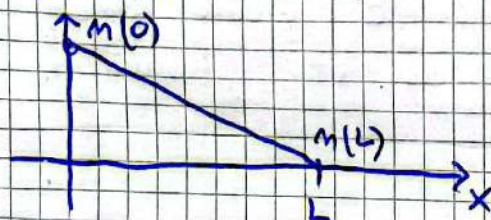


la barriera di potenziale lato drain è molto superiore rispetto a quella lato source.

Però ora: $n(L) = n_0 e^{\frac{q}{KT} (\Delta V_s - V_D)} \approx 0$ perché

$$\Delta V_s - V_D < 0$$

Però graficamente:

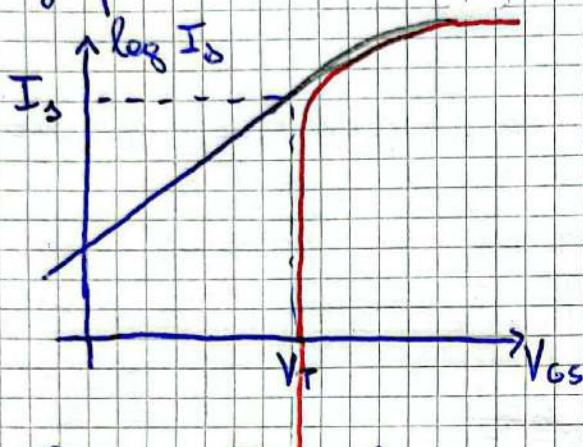


il profilo è pressoché lineare.

C'è quindi un gradiente di concentrazione tra source e drain che causa una corrente di diffusione. Questa corrente è pari a:

$$I_0 = q D_n A \frac{n(0)}{L} = q D_n \frac{A}{L} \frac{n_i^2}{N_A} e^{\frac{q \Delta V_b}{kT}}$$

Graficamente:



- corrente sottosoglia

- corrente suprathreshold:

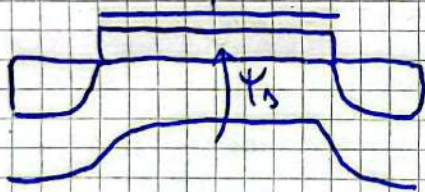
$$I_D = K (V_{GS} - V_T)^2$$

- corrente totale

Chiamo I_0 la corrente I_D per $V_{GS} = V_T$

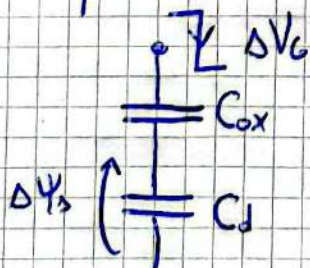
Ora ci chiediamo:

$$V_G = V_T + \Delta V_G$$



se $V_G = V_T$ la tensione ai capi della zona invertita è Ψ_s . Se poi alziamo V_G di una quantità ΔV_G , qual è la variazione $\Delta \Psi_s$ di Ψ_s ?

l'ossido e la zona invertita costituiscono 2 condensatori, quindi:



$$C_{ox} = A \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}}, \quad C_d = A \frac{\epsilon_{si}}{W_d}$$

$$\Delta \Psi_s = \Delta V_G \frac{C_{ox}}{C_{ox} + C_d} = \frac{\Delta V_G}{1 + \frac{C_d}{C_{ox}}} = \frac{\Delta V_G}{n}$$

dove $n = 1,5$.

Ora: $\Delta \Psi_s$ corrisponde a ΔV_s . E inoltre ΔV_G corrisponde allo spostamento di V_G da V_T . Perciò:

$I_D = I_S e^{\frac{q}{kT} \cdot \frac{(V_{GS} - V_T)}{n}}$ Anche in questa zona di funzionamento si può definire la transconduttanza come:

$$g_m = \frac{dI_D}{dV_{GS}} = \frac{q}{kTn} I_D = \frac{I_D}{nV_{th}}$$

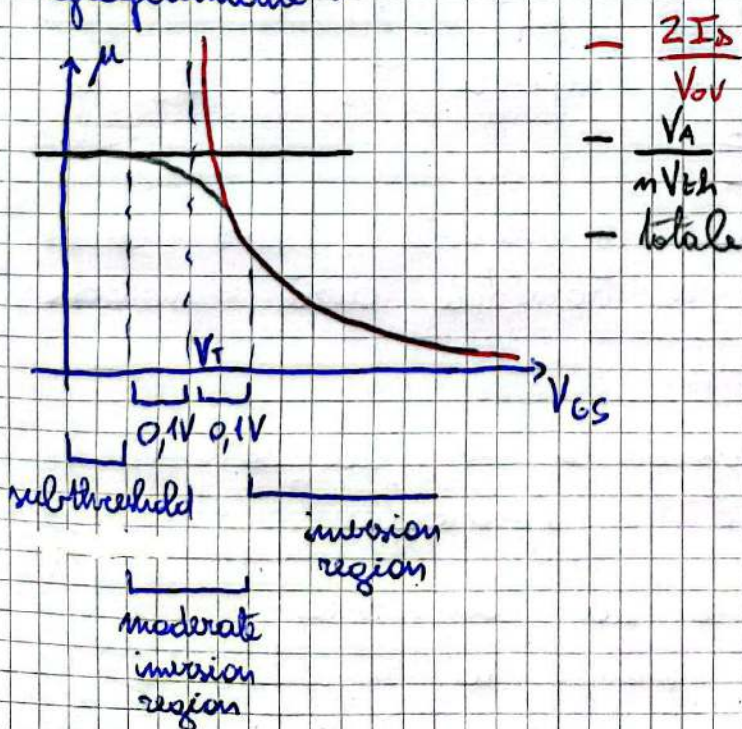
Anche in questa zona di funzionamento c'è modulazione del canale al variare di V_S infatti:



Al variare di V_S cambia sia l'energia lato drain, ma anche la lunghezza della zona modulata.

Anche in questo caso $r_o = \frac{V_A}{I_D}$ e anche in questa zona di funzionamento del MOSFET V_A vale circa 7V. Perciò $\mu = \frac{I_D}{nV_{th}} \frac{V_A}{I_D}$ o $\mu = \frac{V_A}{nV_{th}}$ indipendente da V_{ov} . Perciò in regime di debole inversione non si ha più la divergenza di μ per $V_{ov} \rightarrow 0$.

Graficamente:



I_C è l'inversion coefficient e indica quanto V_{GS} è vicina a V_T .

$I_C = \frac{I_D}{I_S}$, dove I_S è la corrente in corrispondenza della soglia. Infatti: $I_D = I_S e^{\frac{q}{kT}(V_{GS} - V_T)}$

se $V_{GS} = V_T$ allora $I_D = I_S$.

$$I_S = k_n \underbrace{\frac{1}{2} \mu C_{ox}}_{K'} \frac{W}{L} (V_{th})^2 \quad \text{con} \quad V_{th} = \frac{kT}{q}$$

g_m in moderate inversion region vale:

$$g_m = \frac{I_D}{n V_{th}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + k I_C}} \quad 0,1 < I_C < 10$$

Per valori maggiori di I_C ci si sposta verso la inversion region. Al diminuire di I_C ci si sposta verso la moderate e subthreshold operation.

Una volta definita I_D , si definisce I_C per decidere in che regione far operare il MOSFET.

Noti I_D e I_C , si ricava I_S e I_S si trova dimensionando $\frac{W}{L}$.

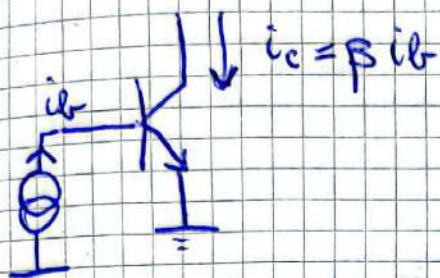
A parità di I_D , per ridurre I_C devo aumentare $\frac{W}{L}$ e quindi il transistor avrà dimensione maggiore.

Se il guadagno massimo lo si ha sottosoglia, perché usiamo il MOSFET sottosoglia?

Perché un altro parametro da considerare è la banda. La banda, quindi la risposta in frequenza, è migliore in inversion operation.

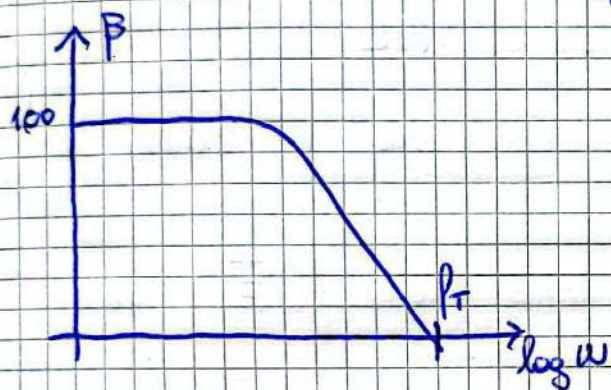
c'è un trade-off tra guadagno e banda.

Partiamo studiando la banda del BJT. Il BJT è un dispositivo controllato in corrente e c'è un guadagno di corrente tra i_b e i_c :



Ovvero β ha una dipendenza con la frequenza.

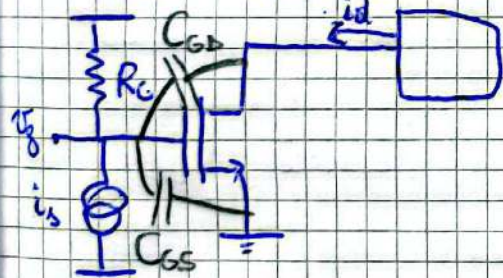
Infatti il suo andamento con la frequenza è il seguente:



Per ottenere β in funzione della frequenza, si inietta i_b a varie frequenze e si misura quanto vale i_c . Calcolando poi $\frac{i_c}{i_b}(f)$ si ottiene $\beta(f)$.

$\beta(f_T) = 1$ e con $\beta = 1$ il transistor è inutile.

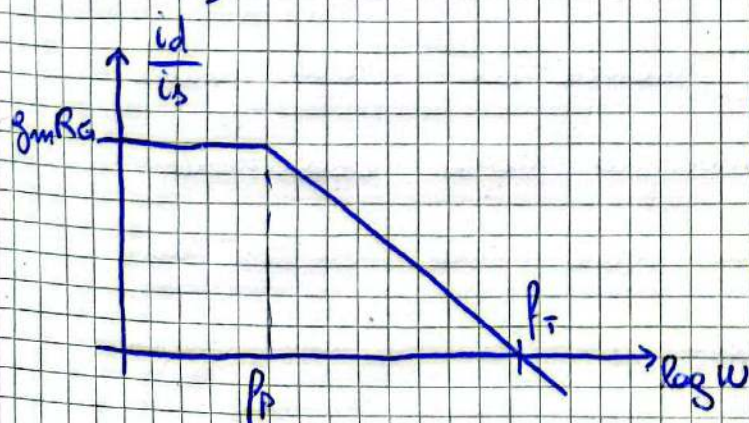
Per studiare il comportamento in frequenza del MOSFET:



i_s è corrente di segnale e la si fa variare in frequenza.

$$v_g = i_s \cdot R_G \quad \text{e} \quad i_d = g_m R_G i_s$$

Si misura il valore di i_d per varie frequenze di i_s .



Una volta definita la tensione ai capi di C_{GS} , è definita la tensione ai capi di C_{GD} perché V_{DS} è ben definita.

I due condensatori non sono indipendenti $\Rightarrow$ c'è un solo polo.

Il polo ha frequenza: $f_p = \frac{1}{2\pi (C_{gs} + C_{gd}) R_G}$

$$f_T = g_m R_G f_p = \frac{g_m}{2\pi (C_{gs} + C_{gd})}$$

$C_{gs} = \frac{2}{3} C_{ox} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}} WL$; C_{gd} è trascurabile rispetto a C_{gs} . Per semplicità diciamo che

$$C_{gs} + C_{gd} = C_{ox} \quad \text{Però:}$$

$$f_T = \frac{2K' V_{ov}}{2\pi} \frac{W}{L} \frac{1}{C_{ox} WL} = \frac{2 \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} V_{ov}}{2\pi C_{ox} WL} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{\mu V_{ov}}{L^2} = \frac{1}{2\pi} \mu \frac{V_{ov}/L}{L} \quad \text{Considero il termine:}$$

$\mu \frac{V_{ov}}{L}$. Questo può essere visto come $\mu \bar{E}$ con $\bar{E}$ campo elettrico medio lungo il canale.

$\Rightarrow$ definisco $\bar{v}_d = \mu \bar{E}$ Però:

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{\bar{v}_d}{L} \quad \text{con } \bar{v}_d \text{ velocità media dei portatori}$$

lungo il canale. Chiamo tempo di transito t_{tr} la quantità: $t_{tr} = \frac{L}{\bar{v}_d}$ però:

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{t_{tr}} \quad \text{Gli elettroni impiegano un certo}$$

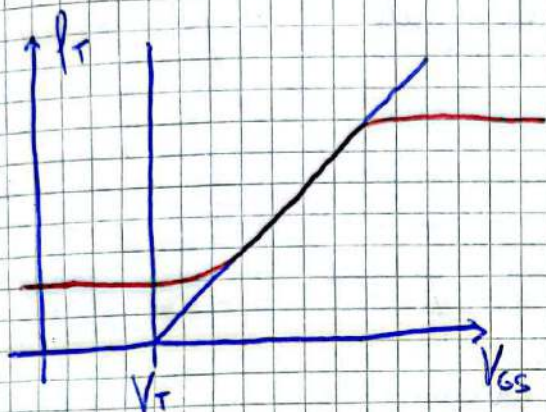
tempo per transitare dal source al drain, questo tempo vale t_{tr} . Se modifichiamo troppo velocemente

la polarità della tensione al gate, gli elettroni non fanno in tempo ad arrivare al drain che vengono spinti indietro verso il source.



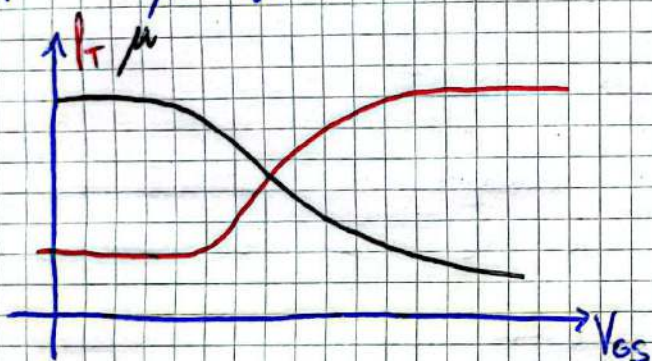
Se $\frac{I}{2} < t_{in}$ l'elettrone torna indietro prima di aver raggiunto il drain.

Andamento di I_T con V_{GS} :



I_T satura perché gli elettroni hanno una certa velocità di saturazione. In un certo intervallo $\bar{v} = \mu E$, ma poi la velocità satura e rimane costante anche all'aumentare di E .

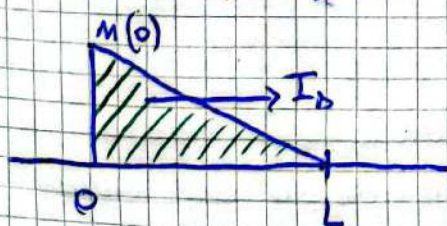
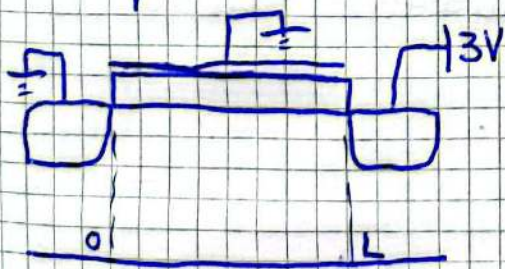
I_T e $\mu = g_m I_0$ in un unico grafico:



Si vede che c'è un trade-off tra guadagno e banda.

Studiamo il valore di I_T sottoglia:

Profilo della carica:



$$n(0) = N_0 e^{\frac{q \Delta V_s}{kT}} \quad e$$

$$I_D = q D_n \frac{n(0)}{L} A$$

l'area in verde corrisponde alla carica Q_D e vale:

$$Q_D = \frac{1}{2} n(0) L A \quad \text{dove } A = W \cdot d$$

Vediamo il rapporto

$$\frac{Q_D}{I_D}$$

$$\frac{Q_D}{I_D} = \tau \Rightarrow I_D = \frac{Q_D}{\tau}$$

perciò la corrente è la carica Q_0 diviso un certo tempo τ . τ è il tempo medio impiegato dalle cariche per lasciare la regione.

$$\tau = \frac{Q_0}{I_0} = \frac{L^2}{2D_m}$$

N.B. le cariche si muovono per diffusione (dovute al gradiente) e non per effetto del campo elettrico, per questo c'è la dipendenza con L^2 .

Calcolato τ possiamo ricavare f_T :

$$f_T = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{2D_m}{2\pi L^2} \quad f_T \text{ in questa regione sotto =}$$

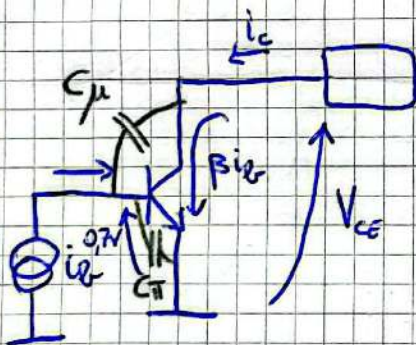
soglia è indipendente da V_{ov} .

1/10/24

23/8/25

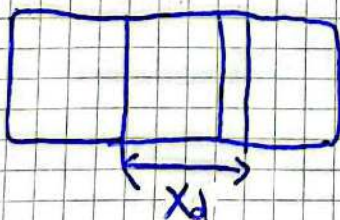
Lezione 7

Studiamo ora il caso del BJT:



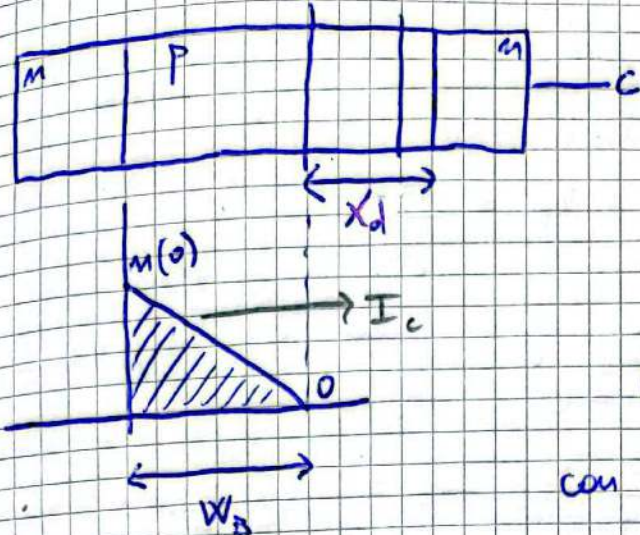
Il guadagno di corrente tra i_b e i_c non è costante. Le capacità tra base e collettore e tra base ed emettitore intrinseche = come un polo.

C_{μ} è dovuta alla giunzione polarizzata inversamente tra base e collettore:



$$C_{\mu} = \frac{\epsilon_{si}}{X_d} A$$

Anche una giunzione polarizzata direttamente genera una capacità. Questa è dovuta al profilo di portatori minoritari che sono presenti nella zona neutrale.



Nella base ci sono elettroni che sono portatori minoritari.

ha carica totale dovuta a questi portatori è:

$$Q_n = \frac{1}{2} n(0) q W_B A_E$$

con $n(0) = M_0 e^{\frac{q V_{BE}}{KT}}$

$$C_{\pi} = \frac{dQ}{dV_{BE}} = \frac{q}{KT} Q_n$$

Nella capacità C_{μ} la variazione di V_{BC} fa variare X_d .

Mentre nella capacità C_{π} la variazione di V_{BE} fa variare $n(0)$ e quindi Q_n di conseguenza.

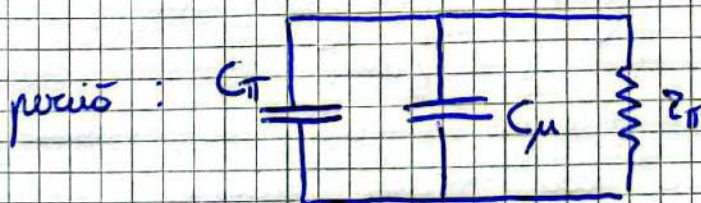
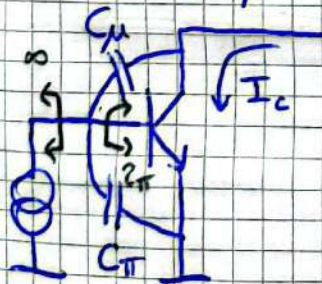
A causa del gradiente si genera corrente di diffusione I_c . Questa vale:

$$I_c = q D_n \frac{n(0)}{W_B} A_E \quad \text{Calcoliamo } \frac{Q_n}{I_c} :$$

$$\frac{Q_n}{I_c} = \frac{W_B^2}{2 D_n} = \tau_{dif}$$

$$\text{Sostituendo: } C_{\pi} = \frac{q}{KT} \tau_{dif} I_c$$

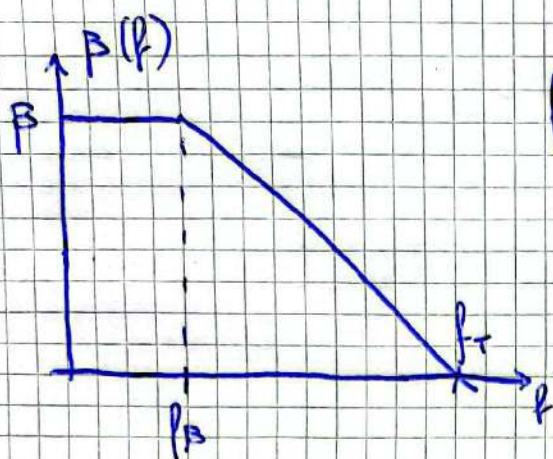
C_{μ} e C_{π} sono in parallelo. Per calcolare la frequenza del polo:



Sostituendo $\beta(f)$ ha un polo a frequenza:

$$f_p = \frac{1}{2\pi R_L (C_{\pi} + C_{\mu})}$$

Diagramma di $\beta(f)$:



$$f_T = \frac{\beta}{2\pi r_{\pi}(C_{\pi} + C_{\mu})} = \frac{g_m}{2\pi(C_{\pi} + C_{\mu})}$$

perché $r_{\pi} = \frac{\beta}{g_m}$

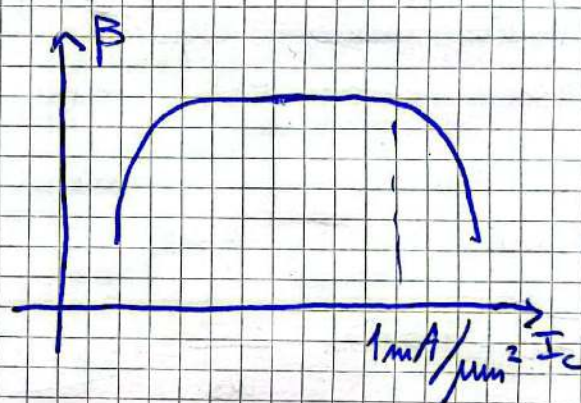
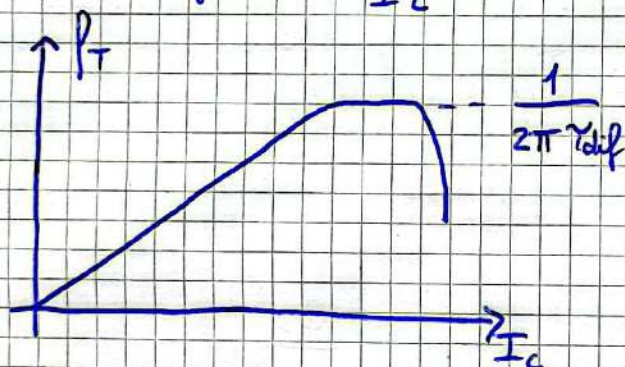
sia g_m che C_{π} dipendono da I_c , infatti:

$$g_m = \frac{I_c}{V_{th}} \quad \text{e} \quad C_{\pi} = \frac{q}{kT} \gamma_{diff} I_c = \gamma_{diff} g_m$$

ovvero:

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(g_m \gamma_{diff} + C_{\mu})} = \frac{1}{2\pi(\gamma_{diff} + \frac{C_{\mu}}{g_m})}$$

dove $\frac{C_{\mu}}{g_m} = \frac{C_{\mu}}{I_c} V_{th}$. Diagramma di f_T vs I_c :



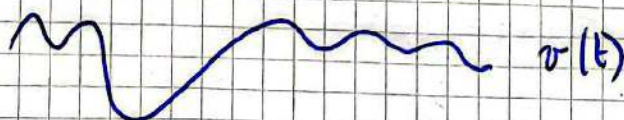
Il motivo per cui f_T cala per alti valori di I_c è che β cala per alti valori di I_c .

Per avere f_T alto (quindi banda ampia) e anche β elevato, è bene far operare il BJT con I_c nei pressi di $1 \text{ mA}/\mu\text{m}^2$, in particolare tra $100 \mu\text{A}/\mu\text{m}^2$ e $1 \text{ mA}/\mu\text{m}^2$.

I BJT vengono usati per circuiti che devono operare velocemente e con basso rumore.

Rumore

Una variabile elettrica (tensione o corrente) ha andamento temporale:



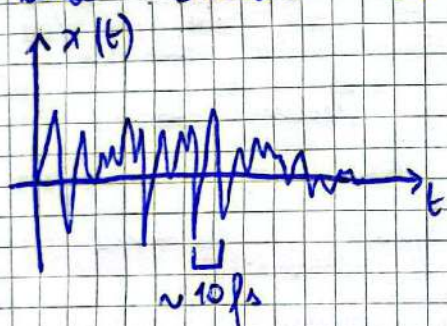
$x(t)$ è la composizione di 3 componenti:

segnale, disturbi e rumore. Breve:

$$x(t) = s(t) + d(t) + n(t)$$

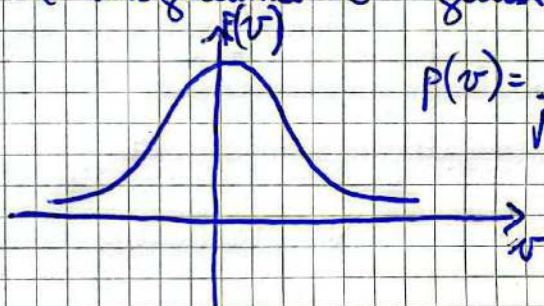
Con $x(t)$ variabile elettrica generica.

$n(t)$ è il rumore ed è correlato alla dinamica del sistema. Le cariche hanno fluttuazioni randomiche dovute alla temperatura e questo genera rumore. Le fluttuazioni solitamente hanno una durata di qualche decina di fs.



Solitamente il rumore è gaussiano.

$\Rightarrow$ l'istogramma è gaussiano.



$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$$

Vale che $\langle n(t) \rangle = 0$

Per leggere correttamente il segnale, vogliamo che l'ampiezza del segnale sia maggiore dell'ampiezza del rumore, dove solitamente come ampiezza del rumore si considera σ . Vale inoltre che:

$$\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle$$

Il rumore è costituito dalla somma di più componenti armoniche. Consideriamo il caso in cui il rumore è costituito da due armoniche:

$$A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \text{Abbiamo}$$

calcolare $\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle$ Breve:

$$\begin{aligned} \langle n^2(t) \rangle &= \langle A^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + B^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ &+ 2AB \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle = \end{aligned}$$

$\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$ se abbiamo 2 armoniche a frequenze diverse, il valore quadratico medio è la somma del valore quadratico medio di ogni armonica, perché le due armoniche sono ortogonali.

possiamo quindi dire che:

$$\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle = \sum_i \Delta \epsilon_i^2$$

Si può anche vedere in termini di energia: l'energia dell'intera forma d'onda è la somma dell'energia di ogni componente armonica. 30/8/25

In realtà lo spettro è continuo. Chiamo $S(\omega)$ lo spettro di $\langle n^2 \rangle$. $\Delta \sigma^2$ è la componente dello spettro tra f e $f + \Delta f$. Scriviamo più propriamente:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) df$$

$S(f)$ è la densità spettrale di potenza. Se trattiamo come grandezza la tensione, $S(f)$ ha unità di misura V^2/Hz .

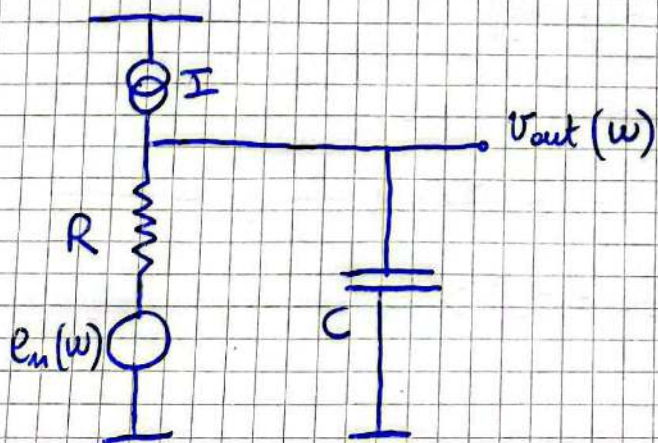
Wiener-Khinchin Theorem: questo dice che $S(\omega) = \mathcal{F}\{K_{xx}(\tau)\}$ dove $K_{xx}(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione.

questa è definita come: $K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot x(t - \tau) dt$

però se riferita al rumore: $K_{nn}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t) n(t - \tau) dt$

vediamo come gestire il rumore nei circuiti.

Consideriamo il seguente circuito elementare:



$e_n(\omega)$ è la componente armonica del rumore a frequenza ω e ampiezza e .

$$T(s) = \frac{V_{out}}{e_n} = \frac{1}{1 + sRC} \quad \text{da cui } T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$V_{out}(\omega) = e_n(\omega) \cdot T(j\omega) = e_n \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right|$$

se quindi $e_n(\omega) = A \sin(\omega t)$ allora

$$V_{out}(\omega) = A \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{dove}$$

$$\varphi = \tan^{-1}(\omega RC)$$

Del rumore noi siamo interessati alla sua potenza.
La potenza portata da ogni armonica in uscita vale:

$$\frac{A^2}{2} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \quad \text{Per calcolare la potenza totale,}$$

somme tutti i contributi facendo l'integrale.

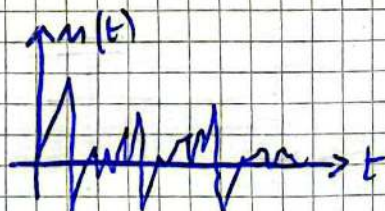
La potenza del rumore tra f e df è data da $S_n(f) df$. Per ciò vale che $\frac{A^2}{2} = S_n(f) df$

$$\text{da cui: } \frac{A^2}{2} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{S_n(f) df}{1 + (\omega RC)^2} \quad \text{Per calcolare}$$

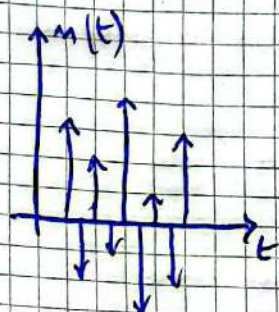
il rumore totale in uscita si fa l'integrale, perciò:

$$\langle n_{out}^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} \frac{S_n(f) df}{1 + (\omega RC)^2} \quad \text{L'andamento del rumore}$$

nel tempo è una serie di picchi:



si può vedere questa forma d'onda come una serie di funzioni a punta di delta:



La trasformata di Fourier di una S è la funzione costante. Per ciò ogni picco di $n(t)$ contribuisce con uno spettro costante.

la somma di vari picchi inavvolati tra loro
da uno spettro piatto.

7/10/2h

Lezione 8

Però se il rumore è termico, lo spettro è piatto

e G_{out}^2 può essere scritto come:

$$G_{out}^2 = W \int_0^{+\infty} \frac{df}{1 + W^2 \gamma^2} = \frac{W}{2\pi\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{2\pi df \cdot \gamma}{1 + (2\pi f \gamma)^2} =$$

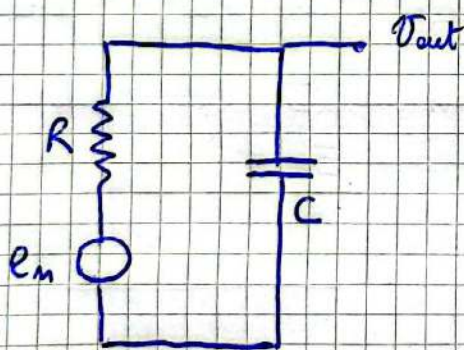
$$= \left[x = 2\pi f \gamma \right] = \frac{W}{2\pi\gamma} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{W}{2\pi\gamma} \left[\tan^{-1} x \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{W}{2\pi\gamma} \frac{\pi}{2} = \frac{W}{4\gamma} ; \quad W \text{ ha unità di misura } \frac{V^2}{Hz},$$

$\frac{1}{\gamma}$ ha unità di misura Hz $\Rightarrow G_{out}^2$ ha unità di
misura V^2 il che ha senso.

$\frac{1}{4\gamma} = BW_{eq}$ cioè la banda equivalente.

Consideriamo ancora il circuito:



In questo sistema l'energia
è immagazzinata nel condensatore
e dipende dalla tensione ai capi
del condensatore.

Però l'energia E dipende da
 V_{out} : $E(V_{out})$ e quindi da un

solo parametro. l'equazione differenziale che descrive
l'andamento della tensione nel tempo è del primo ordine:

$$C \frac{dV_{out}}{dt} + \frac{V_{out}}{R} = \frac{e_n}{R} \quad \text{Però nel dominio di}$$

Laplace la funzione di trasferimento ha un solo

polo di libertà, dato che il sistema ha un solo grado di libertà, l'energia media in equilibrio termico vale: $\langle E \rangle = \frac{KT}{2}$ Inoltre, dato che

l'energia è immagazzinata nel condensatore, vale che

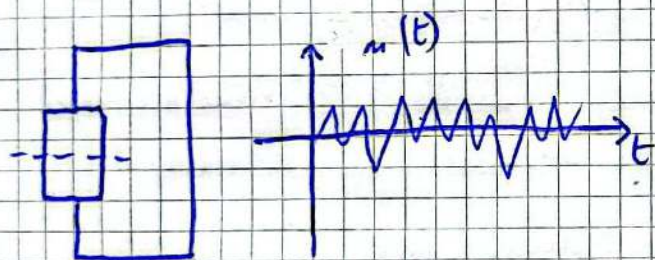
$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} C \langle V_{out}^2 \rangle \quad \text{da cui} \quad \langle V_{out}^2 \rangle = \frac{KT}{C}$$

Ma $\langle V_{out}^2 \rangle = G_{out}^2$ perciò $\frac{KT}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{out}(f) df$

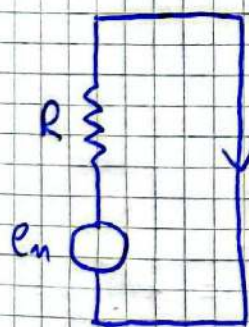
Perciò: $G_{out}^2 = \frac{W}{hT} = \frac{KT}{C}$ da cui $W = hKT \cdot \frac{1}{C} \cdot RC \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = hKTR$$

Studiamo ora il rumore di corrente. Consideriamo il circuito:



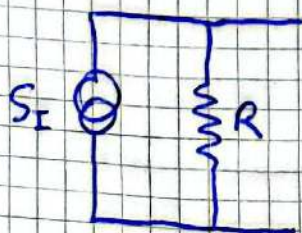
← Grafico della corrente che scorre attraverso la linea tratteggiata.



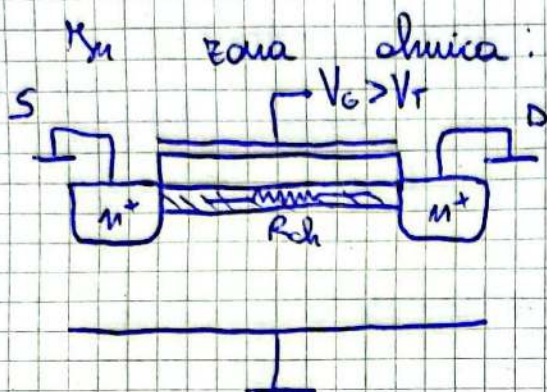
In termini di densità spettrale di potenza: $i_n = \frac{e_n(f)}{R}$ $S_I(f) df = \frac{S_V(f) df}{R^2} \Rightarrow$

$$S_I(f) = \frac{hKTR}{R^2} = \frac{hKT}{R}$$

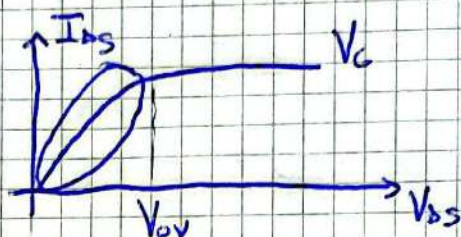
Perciò possiamo ricavare l'equivalente Norton:



Ora ricavare il rumore di un transistor MOSFET



La zona ohmica il canale è pressoché uniforme e forma una resistenza R_{ch} .



La zona ohmica:

$$I_{DS} = 2K \left[(V_G - V_T) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right] \quad \text{Se } V_{DS} \text{ molto piccola,}$$

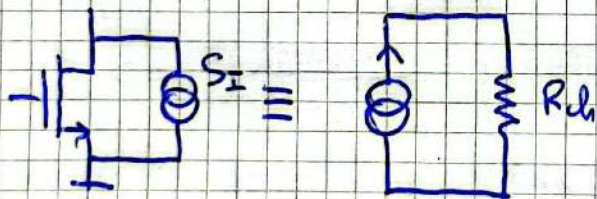
il MOS opera quasi come un resistore lineare.

$$G_{ch} = [\text{conduttanza di canale}] = 2K (V_G - V_T)$$

Se V_{DS} è piccola il termine $\frac{1}{2} V_{DS}^2$ diventa trascurabile e G_{ch} ha quell'espressione.

Per un transistor che opera vicino all'origine del grafico $I_{DS}(V_{DS})$ il modello equivalente per il rumore è un resistore R_{ch} .

Usando il Norton equivalente:



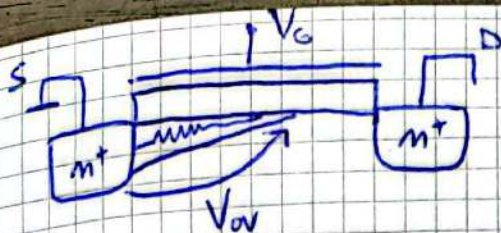
$$\text{dove } S_I = \frac{4kT}{R_{ch}} = 4kT g_m$$

Infatti $\frac{1}{R_{ch}} = G_{ch} = g_m$. Infatti via G_{ch} che

g_m ha espressione $2K (V_G - V_T)$.

Ora capire come gestire il rumore in zona di saturazione.

MOS in saturazione:



Anche in questo caso c'è una resistenza nel canale, che genera rumore termico.

Ci sarà ancora un legame lineare tra G_m e I_{DQ} , però bisogna introdurre un coefficiente correttivo γ che dipende da V_{GS} e V_{DS} . Perciò:

$$\frac{hKT}{R_{ch}} = hKT \gamma(V_{GS}, V_{DS}) g_m \quad \text{Per la nostra trattazione}$$

faremo, consideriamo γ con i seguenti valori:

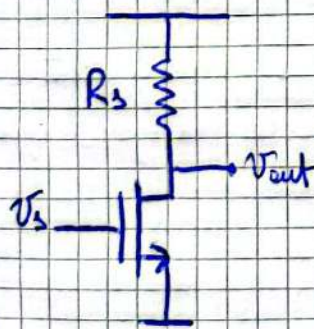
$\gamma = 1$ in regione ohmica, mentre $\gamma = \frac{2}{3}$ in regione di saturazione.

Abbiamo visto che il guadagno massimo μ vale:

$$\mu = g_m r_o = \frac{2V_A}{V_{ov}}, \quad \text{indipendente dalla corrente.}$$

Da questo sembrerebbe che potremmo implementare un amplificatore con bassissima corrente che consumi pochissimo. In realtà non è così, perché il rumore impone una limitazione sulla corrente e quindi sulla potenza dissipata.

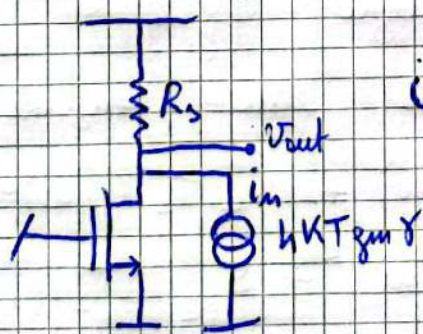
Consideriamo il circuito:



$$V_{out} = -g_m R_S V_S$$

Consideriamo ora

il solo effetto del rumore:



i_n nasce per R_S generando V_{out} pari a:

$$V_n = i_n R_S \Rightarrow S_{out}(f) df = S_{in}(f) df \cdot R_S^2 \quad \text{da cui}$$

$$G_{out}^2 = \int_0^{+\infty} S_{out}(f) df = \int_0^{+\infty} S_{in}(f) df R_S^2 = hKT \gamma g_m R_S^2 \int_0^{+\infty} df =$$

$hKT \gamma g_m R_s^2 BW$. G_{out}^2 dipende da g_m e quindi dalla corrente di polarizzazione del transistor.

Quello che dobbiamo fare è comparare G_{out}^2 con il segnale V_{out} .

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{\frac{g_m^2 R_s^2 V_b^2}{2}}{\frac{hKT \gamma g_m R_s^2 BW}{1/N^2}} =$$

$$= \frac{g_m}{hKT \gamma BW} \frac{V_b^2}{2}$$

Si vede che all'aumentare

della transconduttanza aumenta il SNR.

Questo è ciò che limita il consumo di potenza, non è possibile implementare un zero power amplifier perché avrebbe un pessimo SNR.

Un circuito è in generale rappresentabile come:



C'è una sorgente e un carico. Nel mezzo una rete con una serie di elementi sorgenti di rumore.

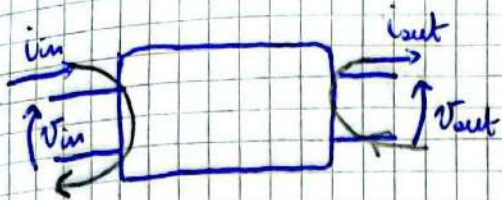
Per calcolare l'effetto di ogni singola sorgente di rumore nell'unità si può usare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Per esempio:

$$V_{out}(w) = e_1 T_1(jw) + i_2 T_2(jw) + \dots \text{ da cui:}$$

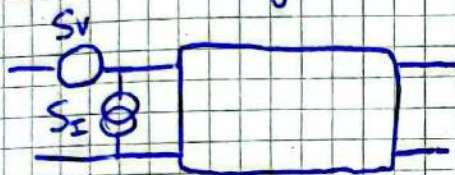
$$S_{out}(w) = S_{e_1} |T_1(jw)|^2 + S_{i_2} |T_2(jw)|^2 + \dots$$

Ogni volta che abbiamo una rete a due porte, cioè:



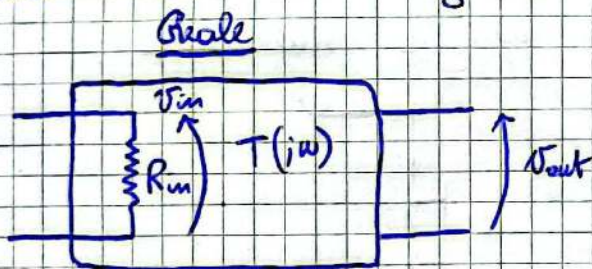
C'è un legame lineare tra le variabili in ingresso e quelle in uscita.

Un teorema dice che il rumore generato all'interno della rete a due porte può essere modellizzato come una rete a due porte priva di rumore, mentre il rumore è rappresentato in modo univoco con 2 generatori in questo modo:



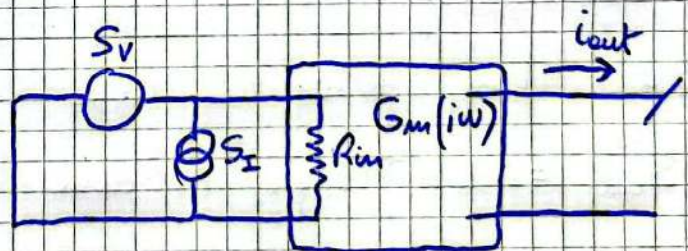
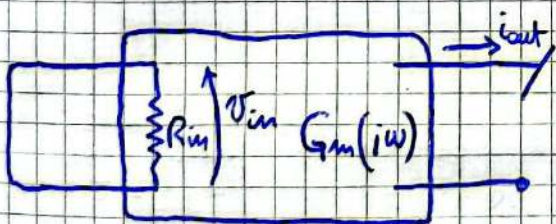
I valori di S_V e S_I sono indipendenti da R_S e R_L .

Consideriamo il seguente caso:



Obiettivo: calcolare S_V e S_I da applicare al circuito ideale, privo di rumore.

Cortocircuitiamo gli ingressi di entrambe le reti, ideale e reale, calcoliamo i_{out} e a tal scopo portiamo l'unità a massa. Quindi:



Nel caso di circuito ideale: $S_{out}^{(0)} = S_V |G_m(jw)|^2$ dove il pedice (0) significa che l'ingresso è cortocircuitato.

Nella rete reale: facendo i conti per ogni sorgente di rumore interna alla rete e usando la sovrapposizione degli effetti si viene a ottenere $S_{out}^{(0)}$.

Uguagliando si può calcolare S_V come:

$$S_v = \frac{S_{out}^{(0)}}{|G_m(j\omega)|^2}$$

dove in questa espressione $S_{out}^{(0)}$ è calcolato usando la rete reale.

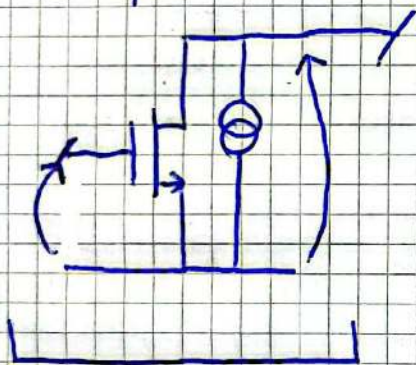
Se invece vogliamo calcolare S_I : teniamo gli ingressi delle reti come circuiti aperti, perciò:

nella rete reale si fanno tutti i conti di i_{out} dovuti a ogni sorgente di rumore. In questo modo si ottiene $S_{out}^{(0)}$. Mentre nel circuito senza rumore:

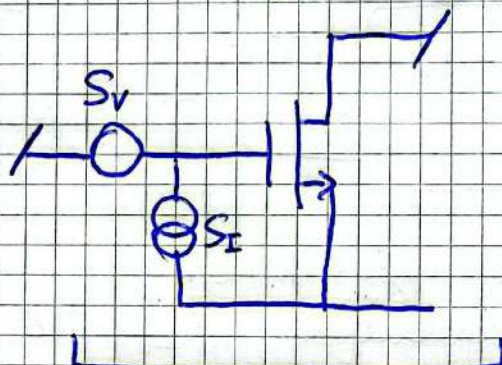
$$S_{out}^{(0)} = S_I R_{in}^2 |G_m(j\omega)|^2 \quad \text{da cui:}$$

$$S_I = \frac{S_{out}^{(0)}}{R_{in}^2 |G_m(j\omega)|^2}$$

Esempio: consideriamo un singolo transistor.



real network



rete priva di rumore

Nel caso della rete reale:

$$S_{out}^{(0)} = 4kT \gamma g_m \quad \text{dove } l' \text{ input, ovvero il gate, è connesso a un punto a banda impedenza.}$$

Nella rete ideale: S_I va diretto a massa e non genera alcuna variazione di tensione al gate.

Mentre S_v modifica la tensione al gate e questo genera corrente per il transistor. Perciò:

$$S_{out}^{(0)} = S_v g_m^2 \quad \text{Eguagliando le due } S_{out}^{(0)}$$

trovate con i due circuiti:

$$S_{out}^{(0)} = hKT \delta g_m = S_V g_m^2 \Rightarrow S_V = \frac{hKT \delta g_m}{g_m^2} =$$

$$= \frac{hKT \delta}{g_m}$$

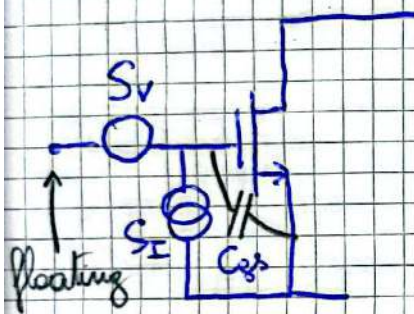
Ora calcoliamo S_I , il generatore

di corrente.

Ora l'input lo imponiamo a impedenza infinita:

nel circuito reale $S_{out}^{(0)} = hKT \delta g_m$

Nella rete ideale:



S_V in questo caso non genera alcuna variazione di tensione al gate, a causa del nodo floating. Per calcolare l'effetto di S_I dobbiamo tenere conto della presenza di C_{gs} .

La tensione al gate per effetto di S_I è:

$$S_I \left(\frac{1}{\omega C_{gs}} \right)^2 \text{ da cui la corrente in uscita vale:}$$

$$S_I \left(\frac{g_m}{\omega C_{gs}} \right)^2 \text{ vale che } S_I \left(\frac{g_m}{\omega C_{gs}} \right)^2 = hKT \delta g_m$$

$$\text{da cui } S_I = \frac{hKT \delta g_m}{g_m^2} \omega^2 C_{gs}^2$$

3/10/2h

31/8/25

Lezione 3

Ricordiamoci che la f_T di un uMOS vale:

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_{gs} + C_{gd})} \approx \frac{g_m}{2\pi C_{gs}} \text{ perciò } \omega_T = 2\pi f_T = \frac{g_m}{C_{gs}}$$

Però S_I può essere scritto come:

$$S_I = hKT \delta g_m \left(\frac{\omega}{\omega_T} \right)^2$$

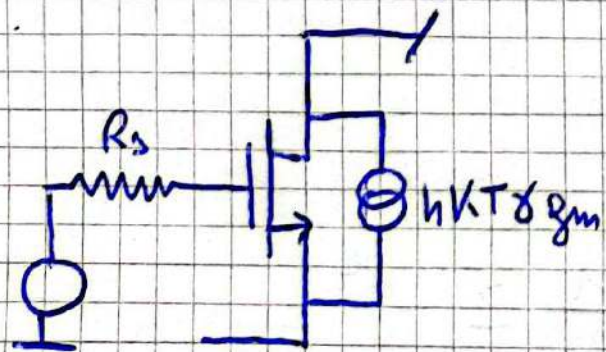
S_V è costante con la frequenza, mentre S_I dipende

da ω^2 . Questo perché: S_{out} è costante e vale $hKT \gamma g_m$. l'impedenza data da C_{gs} vale

$\frac{1}{\omega^2 C_{gs}^2}$. Per dare in uscita una quantità costante,

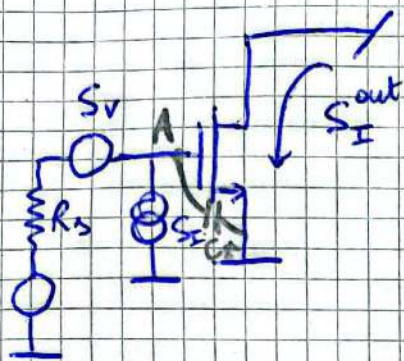
il prodotto tra S_I e $\frac{1}{\omega^2 C_{gs}^2}$ deve essere costante, quindi S_I dipende da ω^2 .

Testiamo il teorema, vediamo se funziona con un valore generico di R_s e un valore generico di R_L . Consideriamo quindi il circuito:



Per questo circuito, $\forall R_s$ vale che $S_{out} = hKT \gamma g_m$.

Consideriamo ora il circuito:



Chiamo e_m la tensione fornita dal generatore S_V .

Considero l'effetto di e_m : spezzo S_I e il generatore di corrente.

$$v_A = e_m \frac{1}{1 + s R_S C_{gs}} = e_m \frac{1}{1 + j \omega \tau}$$

La corrente in uscita vale $i = g_m v_A =$

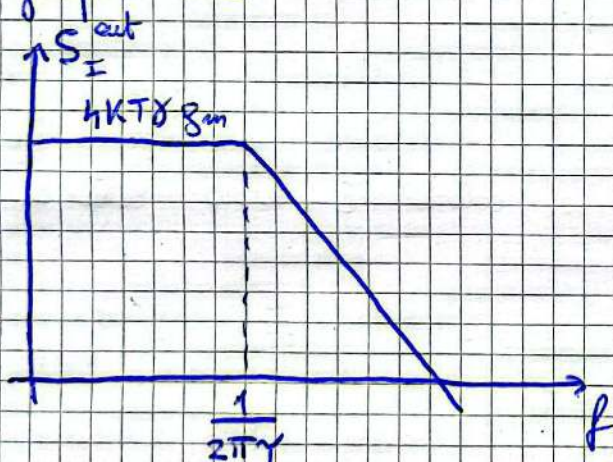
$$= e_m \frac{g_m}{1 + j \omega \tau}$$

Trattiamo ora in termini di

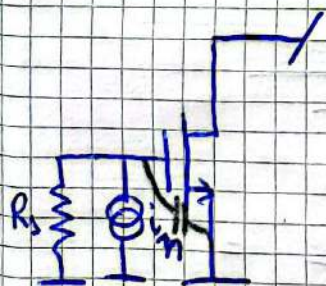
densità spettrale di potenza:

$$S_I^{out} = S_V \frac{g_m^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{4kT\gamma}{g_m} \frac{g_m^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = 4kT\gamma \frac{g_m}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Graficamente:



Consideriamo ora il contributo del generatore di corrente:



$$v_A = i_m \frac{R_S}{1 + s R_S C_{gs}}, \quad i = g_m v_A =$$

$$= i_m \frac{R_S g_m}{1 + s R_S C_{gs}}$$

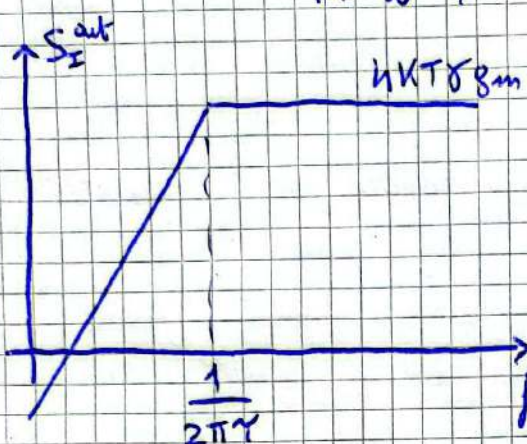
in termini di densità

spettrale di potenza:

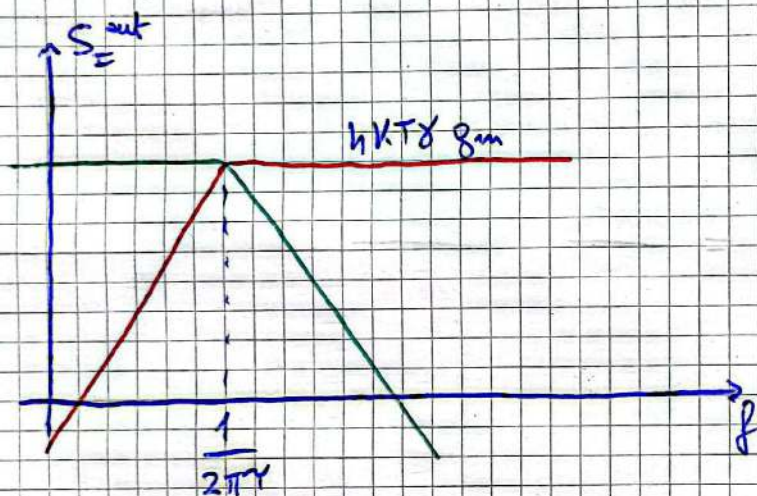
$$S_I^{out} = S_I \frac{g_m^2 R_S^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = 4kT\gamma g_m \frac{\omega^2 C_{gs}^2 R_S^2 g_m^2}{g_m^2 (1 + \omega^2 \tau^2)} =$$

$$= hKT \gamma g_m \frac{\omega^2 \gamma^2}{1 + \omega^2 \gamma^2}$$

Graficamente:

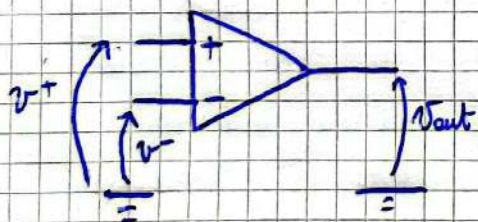


Mettendo insieme i contributi di S_E e S_V :



g_m totale, mettendo insieme i due contributi, si ottiene un grafico costante pari a $hKT\gamma g_m$.

Ovviamente chiederci se l'amplificatore è una rete a due porte:



$$v_{out} = f(v^+, v^-)$$

$$v_{out} = A^+ v^+ - A^- v^-$$

Definiamo: $v_d = v^+ - v^-$ e $v_{cm} = \frac{v^+ + v^-}{2}$

Quindi: $v^+ = v_{cm} + \frac{v_d}{2}$ e $v^- = v_{cm} - \frac{v_d}{2}$

Però: $v_{out} = A^+ \left(v_{cm} + \frac{v_d}{2} \right) - A^- \left(v_{cm} - \frac{v_d}{2} \right) =$
 $= \frac{A^+ + A^-}{2} v_d + (A^+ - A^-) v_{cm}$

Se $A^+ - A^- = 0$, allora v_{out} dipende solo da

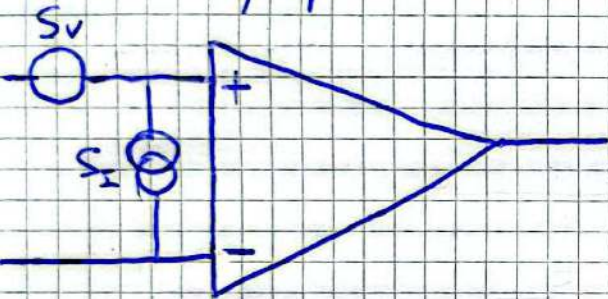
v_{ol} e in questo caso l'amplificatore è una rete a due porte.

$A_{ol} = \frac{A^+ + A^-}{2}$ e $A_{cm} = A^+ - A^-$, se $A_{cm} = 0$ allora l'amplificatore è una rete a due porte.

In questo caso $CMRR = \frac{A_d}{A_{cm}} \rightarrow \infty$

il obiettivo è progettare un amplificatore differenziale che abbia CMRR molto ampio, 100 o 120 dB.

In tal caso possiamo rappresentare l'intero rumore dell'amp come:

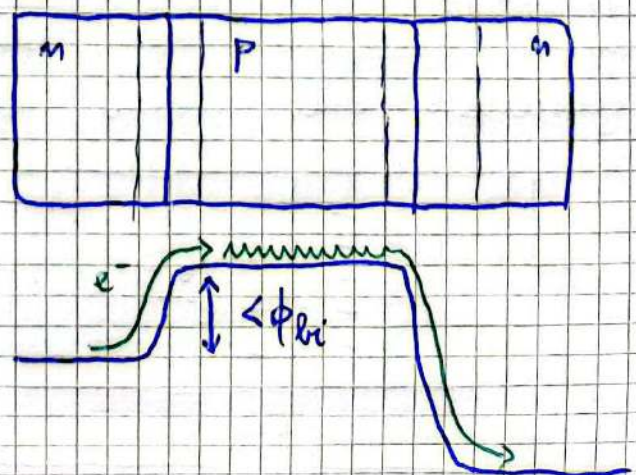
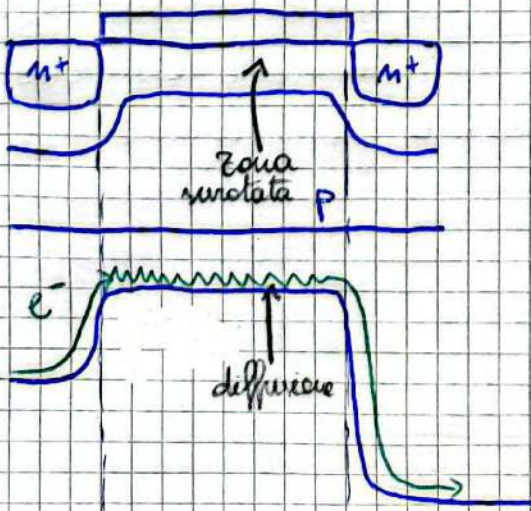


Studiamo ora il rumore in un MOS che opera sottosoglia e in un BJT. Le due trattazioni sono analoghe, infatti in un MOS che opera sottosoglia la corrente vale:

$$I_D = I_s e^{\frac{q}{nKT} (V_{GS} - V_T)}$$

In entrambi i diris =

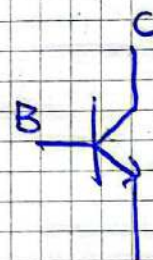
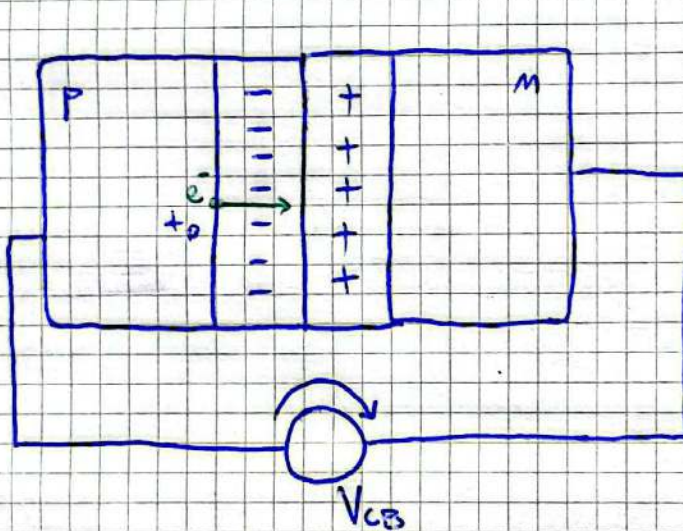
retivi (MOS sottosoglia e BJT) gli elettroni superano la barriera di potenziale, si muovono per diffusione, e vengono raccolti dal drain o dal collettore



La diffusione degli elettroni non ha sempre la stessa durata, il tempo di transito ha delle fluttuazioni casuali che generano rumore. Anche gli elettroni che superano la barriera di potenziale lo fanno con una distribuzione casuale nel tempo. C'è un valore medio di carica per unità di tempo, ma l'evento avviene in modo casuale.

L'obiettivo è calcolare il rumore lato collettore (o lato drain) dovuto a questi processi casuali.

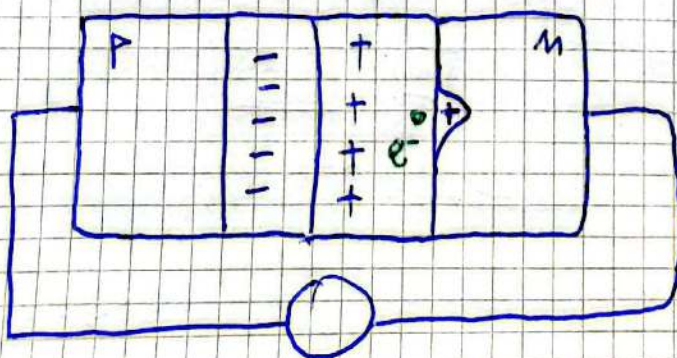
Per calcolare il valore di S_I , consideriamo il moto degli elettroni in una giunzione polarizzata in avanti:



Stiamo considerando la giunzione base-collettore.

L'elettrone in prossimità della zona surdotata viene attratto dentro questa lasciando una carica positiva nella regione P.

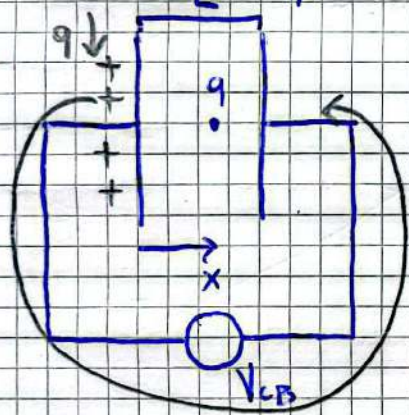
Quando l'elettrone arriva in prossimità della regione N, allontana gli elettroni in prossimità ed esso genera una piccola zona carica positivamente:



Berio: appena l'elettrone lascia la zona p ed entra nella zona svuotata, genera una carica $+q$ al confine tra zona p e zona svuotata.

Man mano che si muove lungo la zona svuotata la carica $+q$ nella zona p diminuisce, e cresce la carica nella regione n al confine con la zona svuotata. Questa carica cresce fino a raggiungere il valore $+q$.

Parlando più in generale:



Q_L : carica sull'armatura sinistra.

$$Q_L = q \frac{L-x}{L}$$

Q_R : carica sull'armatura destra.

$$Q_R = q \frac{x}{L}$$

Q_L all'inizio vale $+q$, poi diminuisce. La carica si sposta verso l'altra armatura seguendo il percorso esterno, passando per il generatore di tensione esterno. La corrente che scorre per questo percorso esterno $\bar{i}$ è pari alla derivata della carica:

$$i = \frac{dQ_R}{dt} = \left[\text{possiamo considerare } Q_R \text{ e } Q_L, \bar{i} \text{ uguale} \right] =$$

$$= \frac{q}{L} \frac{dx}{dt} = \frac{q}{L} v(t) \quad \text{dove } v(t) \text{ è la velocità}$$

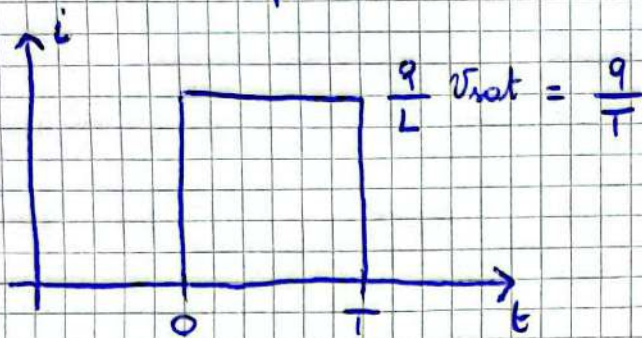
della carica nel muoversi da un'armatura all'altra.

T è il tempo di percorrenza medio e vale:

$$T = \frac{L}{\bar{v}} \quad \text{dove } \bar{v} \text{ è la velocità media.}$$

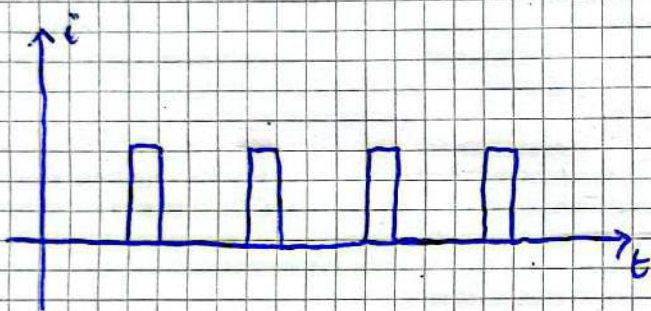
Sato che la giunzione è polarizzata inversamente, allora $\bar{v} \approx v_{sat}$ da cui $T \approx \frac{L}{v_{sat}}$

Scrivo graficamente:



Da notare che l'area della corrente, ovvero la carica totale, è pari a q come giusto che sia.

Se le cariche fossero tutte equidistribuite, si avrebbe che:



In realtà i rettangoli non sono tutti equidistanti, ma sono posizionati nel tempo in modo casuale.

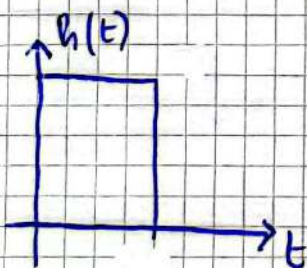
Cio che è noto è che il numero medio di portatori per unità di tempo è costante.

$$\lambda = \frac{I}{q}$$

Se consideriamo un intervallo di tempo Δt , il numero di cariche medio in Δt vale $\lambda \Delta t$.

Ogni impulso ha espressione: $q h(t)$, dove

$h(t)$ è la forma di un rettangolo normalizzato:

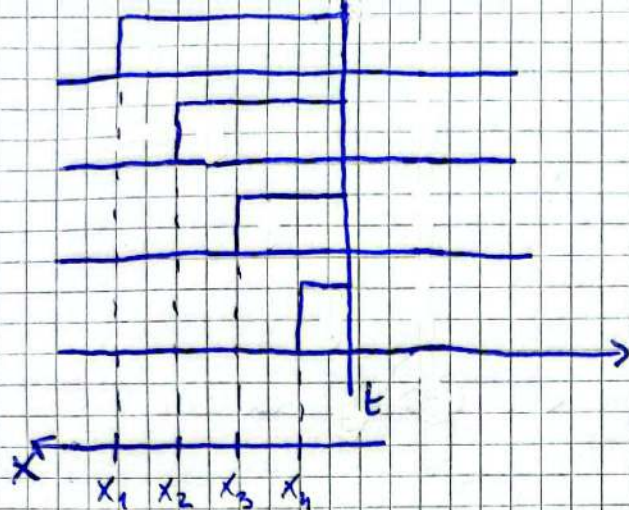


Scrivo:

$$i(t) = \sum_i q h(t|t_i)$$

Scrivo osserviamo la corrente in t , data dalla sovrapposizione di più impulsi nati all'istante t_i precedente a t .

Graficamente:



$$i(t) = q h(x_1) + q h(x_2) + q h(x_3) + \dots$$

Se per esempio $h(x_1)$ dura meno di x_1 , allora $q h(x_1) = 0$

Calcoliamo ora il valore medio della corrente all'istante t . Se come intervallo di tempo considero dx , il numero di impulsi che partono nell'intervallo di tempo dx vale λdx . Ogni impulso contribuisce all'ampiezza della corrente di una quantità $q h(x)$. Perciò sommando tutti i contributi:

$$\langle i(t) \rangle = q \lambda \int_0^{+\infty} h(x) dx, \quad \text{ma } h(x) \text{ ha area unitaria} \Rightarrow \int_0^{+\infty} h(x) dx = 1 \quad \text{da cui } \langle i(t) \rangle = q \lambda$$

Calcoliamo ora $\langle i^2(t) \rangle$, una quantità che è correlata al rumore.

$$\langle i^2(t) \rangle = (q h(x_1) + q h(x_2) + q h(x_3) + \dots)^2 = q^2 h^2(x_1) + q^2 h^2(x_2) + \dots + 2 q^2 h(x_1) h(x_2) + 2 q^2 h(x_1) h(x_3) + \dots$$

spostandosi nel continuo:

i termini $q^2 h^2(x_1) + q^2 h^2(x_2) + \dots$ vengono sostituiti con:

$$\int_0^{+\infty} \lambda q^2 h^2(x) dx$$

Per lavorare con i doppi prodotti: consideriamo due coordinate: x e y .

Perciò: $2 q^2 h(x_1) h(x_2) + 2 q^2 h(x_1) h(x_3) + \dots$ vengono sostituiti con:

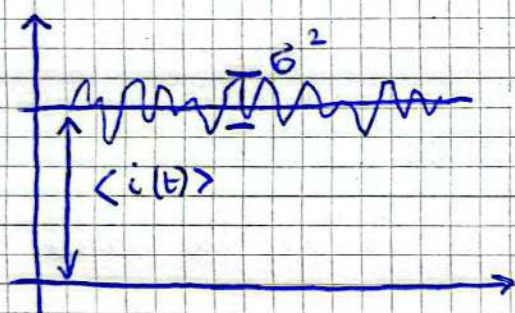
$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda q h(x) dx \cdot \lambda q h(y) dy = \int_0^{+\infty} \lambda q h(x) dx \int_0^{+\infty} \lambda q h(y) dy =$$

$$= (\lambda q)^2 = (\langle i(t) \rangle)^2 \quad \text{Quindi:}$$

$$\langle i^2(t) \rangle = \int_0^{+\infty} \lambda q^2 h^2(x) dx + (\langle i(t) \rangle)^2 \quad \text{da cui}$$

$$\langle i^2(t) \rangle - (\langle i(t) \rangle)^2 = \lambda q^2 \int_0^{+\infty} h^2(x) dx$$

Tale che $\sigma^2 = \langle i^2(t) \rangle - (\langle i(t) \rangle)^2$ graficamente:



Per il teorema di Parseval:

$$\int_0^{+\infty} h^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \text{quindi}$$

$$\sigma^2 = \lambda q^2 \int_0^{+\infty} h^2(x) dx = \lambda q^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

$|H(\omega)|^2$ è una funzione pari, perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \quad \text{da cui:}$$

$$\sigma^2 = 2 \lambda q^2 \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{Per definizione la}$$

varianza è l'integrale della densità spettrale di potenza, ovvero $\sigma^2 = \int_0^{+\infty} S(f) df$

perciò $S(f) = 2q\lambda^2 |H(f)|^2$

11/10/2h

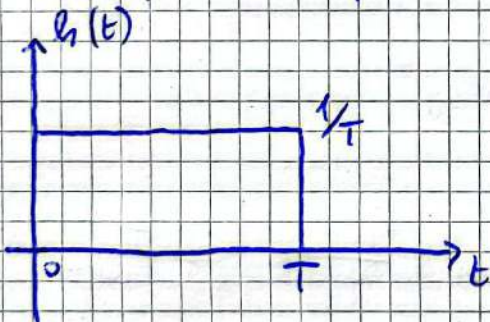
Lezione 10

Quindi nella trattazione della lezione precedente:
quando ho la serie di impulsi, il contributo di $q h(x_i)$ sulla corrente i può avere due valori

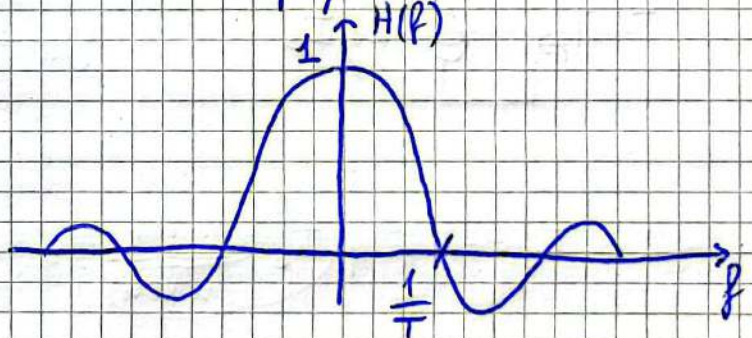
$$q h(x_i) = \begin{cases} \frac{q}{T} & \text{se } x_i < T \\ 0 & \text{se } x_i > T \end{cases}$$

La trasformata di Fourier di una funzione rettangolare, è la funzione seno cardinale.

ovvero, nel tempo:



nella frequenza:



$H(f) = \text{sinc}(\pi f T)$. Quindi $S(f) = 2q\lambda^2 |H(f)|^2$

$\Rightarrow S(f) = 2\lambda q^2 \text{sinc}^2(\pi f T)$ dato che $I = \lambda q$

allora $S(f) = 2qI \text{sinc}^2(\pi f T)$

Nelle nostre applicazioni, la frequenza di funzionamento dei circuiti è molto inferiore a $\frac{1}{T}$.

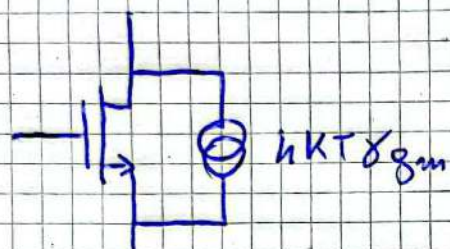
ovvero possiamo assumere che nelle nostre frequenze di interesse $\text{sinc}(\pi f T) \approx 1$. Da cui

$S(f) = 2qI$, quindi un valore costante con

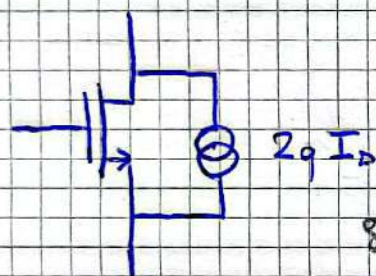
la frequenza, ovvero un rumore bianco.

Il rumore legato alla granularità delle cariche che ha $S(f) = 2qI$ è chiamato shot noise.

Avevamo quindi visto che per un MOS polarizzato sopra soglia il rumore è:



Mentre ora abbiamo visto che per un MOS polarizzato sotto soglia il rumore è:



γ_m weak inversion:

$$g_m = \frac{I_D}{n V_{th}}$$

$$2qI_D = 2q \underbrace{I_D}_{g_m \frac{n V_{th}}{n V_{th}}} = 2n g_m q \frac{KT}{q} = 2nKT g_m$$

che è un'espressione che non si discosta troppo da quella nel caso di MOS sopra soglia.

$$2nKT g_m = hKT\gamma g_m \quad \text{dove in questo caso } \gamma = \frac{n}{2}$$

Quindi in definitiva il rumore di un MOSFET può sempre essere scritto come $hKT\gamma g_m$, dove:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{in weak inversion} \\ 1 & \text{in regione ohmica} \\ \frac{2}{3} & \text{in saturazione} \end{cases}$$

N.B.: i processi di rumore sono però differenti. γ_m forte inversione il rumore è termico, in debole inver =

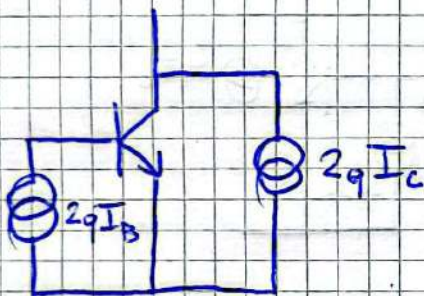
sione il rumore è shot noise.

Studiamo ora il BJT.

I_B e I_C sono proporzionali, ma sono indipendenti. I_B è dovuta al moto delle lacune da base a emettitore, I_C è dovuta al moto degli elettroni da emettitore a collettore. Perciò I_B e I_C sono caratterizzate da fluttuazioni indipendenti.

Perciò I_B è caratterizzata da shot noise pari a $2qI_B$.

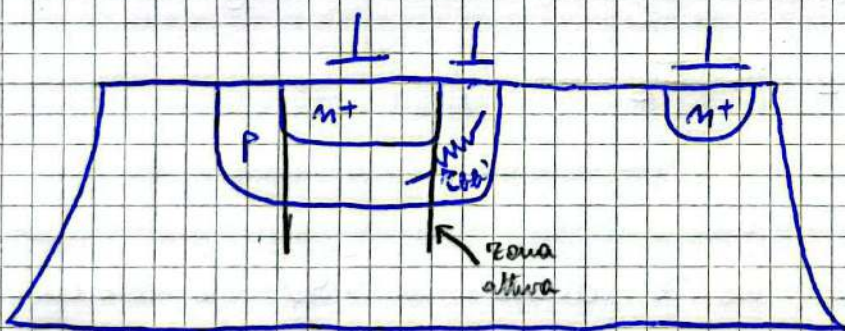
Mentre I_C ha shot noise pari a $2qI_C$. Quindi:



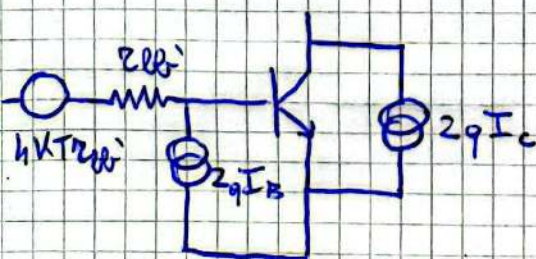
Ci sono quindi due sorgenti di shot noise.

La zona di base è posizionata tra la zona attiva della giunzione e il contatto esterno è caratterizzata da una resistenza.

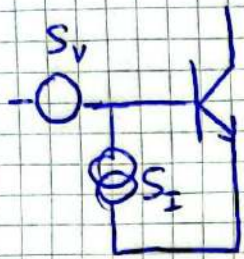
1/9/25



Questa resistenza viene indicata con $r_{bb'}$ ed è caratterizzata da rumore termico $4kT r_{bb'}$. In definitiva, il modello del rumore di un BJT è:



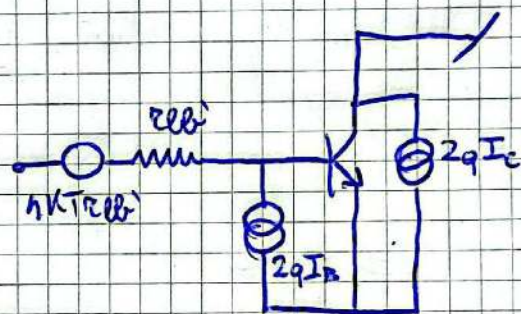
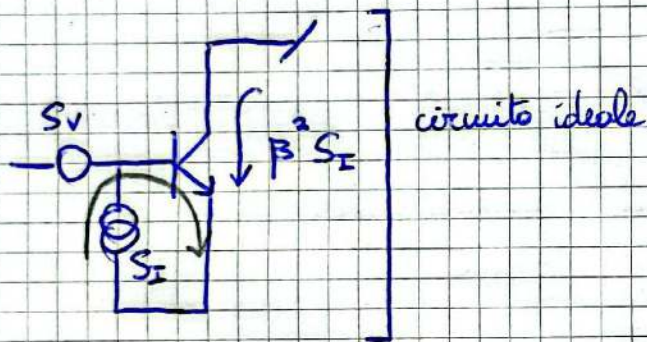
Anche per i BJT possiamo rappresentare il rumore in forma più compatta usando solo 2 generatori.



Calcoliamo i valori di S_V e S_I :

Partiamo da S_I , lasciando aperto il terminale di ingresso.

Circuito reale:



Nel circuito reale: $S_{out}^{(m)} = 2qI_B \beta^2 + 2qI_C$

Nel circuito ideale: $S_{out}^{(m)} = \beta^2 S_I$ Ognuno:

$$\beta^2 S_I = 2qI_B \beta^2 + 2qI_C \Rightarrow S_I = 2qI_B + 2q \frac{I_C}{\beta^2} =$$

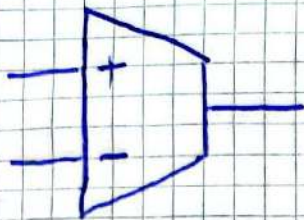
$$= 2qI_B + \underbrace{2q \beta \frac{I_B}{\beta^2}}_{\text{trascurabile}} \approx 2qI_B$$

Svolgendo invece i conti per il calcolo di S_V si ricava che:

$$S_V = hKT \left(r_{cb'} + \frac{1}{2g_m} \right)$$

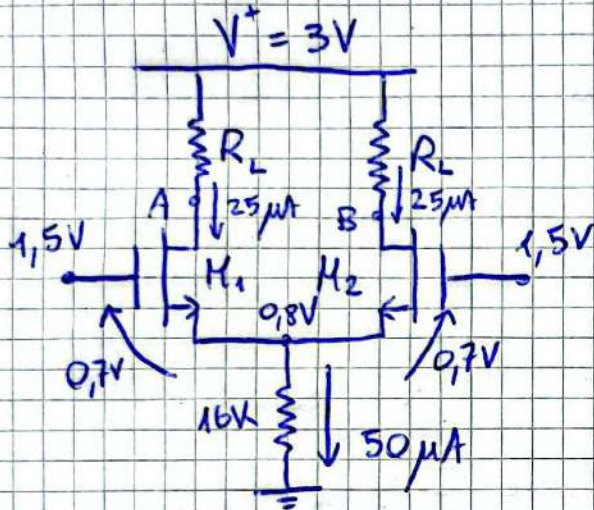
Design of differential amplifiers

All' inizio della nostra trattazione parleremo della progettazione dell' OTA



$$i_{out} = G_m v_d$$

Differential stage: (esempio con numeri ragionevoli)



$$V_T = 0,6V \Rightarrow V_{ov} = 0,1V$$

Imponiamo una tensione V_{ov} piccola per avere grande g_m . Infatti $g_m = \frac{2I_D}{V_{ov}}$

$$V_A = V_B = 3V - R_L I, \quad \text{dove} \quad I = 25\mu A$$

Assumiamo M_1 e M_2 operino in saturazione:

$$V_A = V_B > 0,9V \Rightarrow 3V - R_L I > 0,9V. \quad \text{Imponiamo}$$

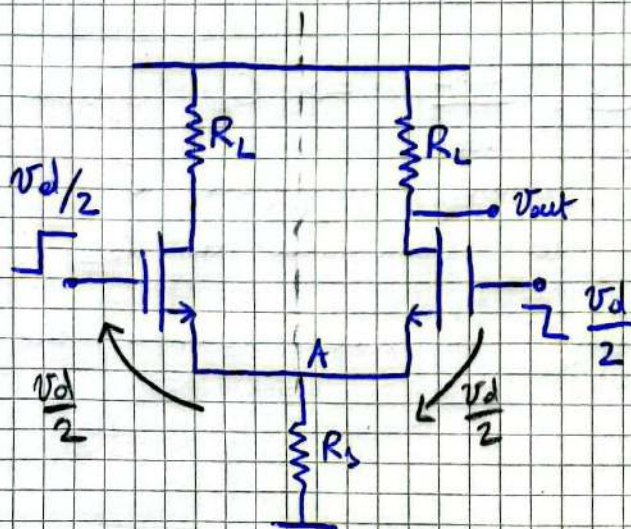
per esempio $V_A = V_B = 1,5V$ da cui $R_L = \frac{1,5V}{25\mu A} = 60k\Omega$

$$I = K' \left(\frac{W}{L} \right) V_{ov}^2 \quad \text{dove } K' = 50\mu A/V^2 \quad \text{per cui:}$$

$$\frac{W}{L} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0,1^2} = 50$$

$$g_m = \frac{2I}{V_{ov}} = 500\mu A/V \Rightarrow \frac{1}{g_m} = 2k\Omega$$

Facciamo ora lo studio nel caso di segnale differenziale:

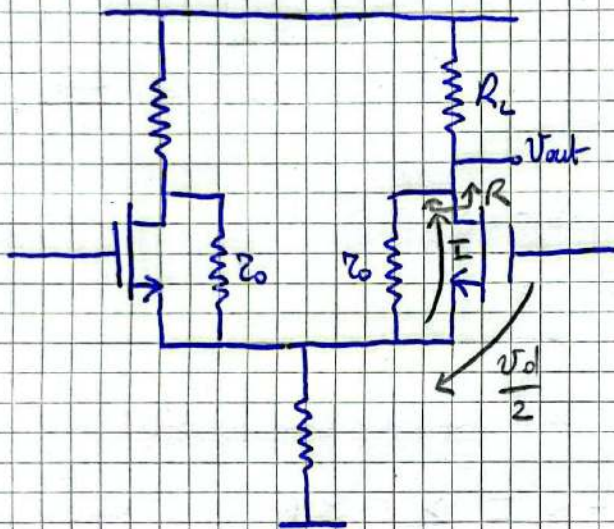


lo studio è simmetrico
e il segnale in ingresso è differenziale, perciò il nodo A rimane costante in tensione
Perciò $v_{gs} = \frac{v_d}{2}$

Però per i transistori serve una corrente pari a $g_m \frac{V_d}{2}$. Per M_1 la corrente scorre verso il basso, mentre per M_2 la corrente scorre verso l'alto.

Quindi: $V_{out} = g_m \frac{V_d}{2} R_L$

Consideriamo ora la presenza delle resistenze r_o :



Dato che $r_{oM1} = r_{oM2}$ il circuito rimane simmetrico. Il nodo A rimane fisso perché $R = R_L \parallel r_o$

Mentre $I = g_m \frac{V_d}{2}$,

però $V_{out} = g_m \frac{V_d}{2} (R_L \parallel r_o)$

Se vale che $r_o \gg R_L$ allora $V_{out} = g_m \frac{V_d}{2} R_L$

Il guadagno differenziale vale:

$$G_d = \frac{g_m}{2} R_L \quad \text{e} \quad G_d = \frac{g_m}{2} (R_L \parallel r_o) \quad \text{se non vale che}$$

$r_o \gg R_L$. In questo circuito G_d ha un valore

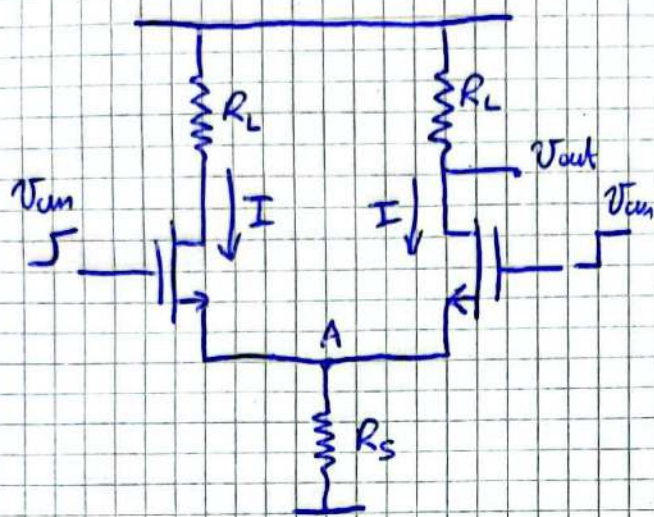
basso. Per aumentarlo dovremmo aumentare R_L , riducendo però la tensione V_{DS} ai capi dei transistori.

$$G_d = \frac{g_m}{2} R_L = \frac{2I_D}{2V_{OV}} R_L = \frac{I_D R_L}{V_{OV}} = \frac{\Delta V_L}{V_{OV}} \Rightarrow G_d \text{ dipende}$$

della tensione ai capi di R_L , ma maggiore è questa tensione, minore è la dinamica di V_{DS} .

Noi vorremmo che il guadagno di modo comune sia molto piccolo.

Calcoliamo quindi G_{cm} di questo circuito:



Trascuriamo inizialmente le resistenze r_o .

Dato che $1/g_{m1} = 2k\Omega$

e $R_S = 16k\Omega$, tra

gli ingressi e il nodo A

c'è praticamente un source follower ideale.

Corrente per R_S nasce corrente $\frac{V_{in}}{R_S}$, questa corrente

si divide equamente per i due percorsi, nasce per R_L e quindi $V_{out} = \frac{V_{in}}{2R_S} R_L \Rightarrow G_{cm} = \frac{R_L}{2R_S}$

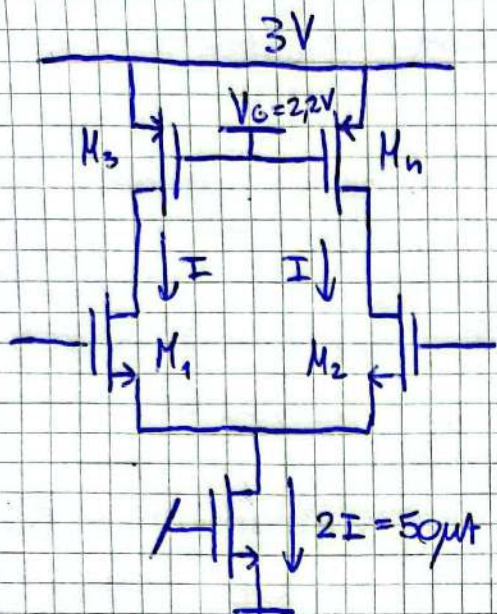
che non è 0. Per ridurre G_{cm} potremmo aumentare R_S . Ma questo vuol dire aumentare la tensione

ai capi di R_S e ridurre la dinamica di V_{out} . $G_{cm} = \frac{R_L}{2R_S} \frac{I}{I} = \frac{\Delta V_L}{\Delta V_S}$ dove ΔV_L è la

tensione ai capi di R_L e ΔV_S la tensione ai capi di R_S . In questo circuito il CMRR è molto molto basso, vale circa 5 quando noi vorremmo un valore di 10^5 .

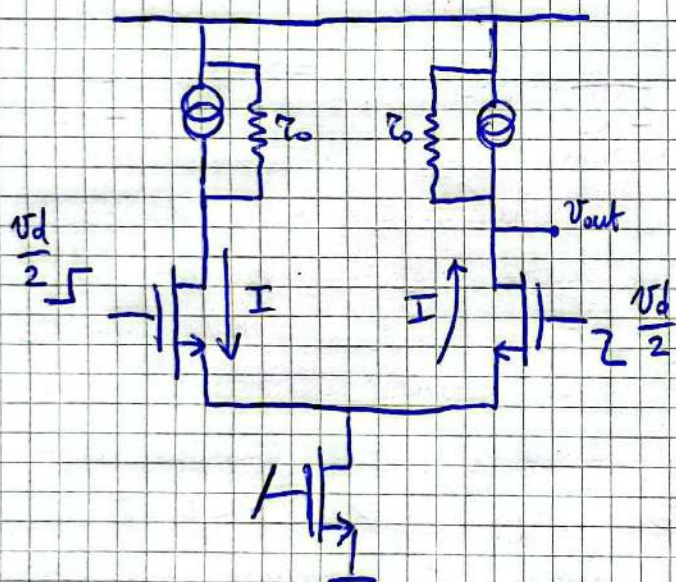
Sostituiamo i resistori con generatori di corrente (in particolare con MOS) che sono in grado di fornire la stessa corrente indipendentemente dal valore di tensione ai loro capi (se ideali, e se operano in saturazione).

Osservo:



M_3 e M_4 hanno una tensione $V_{ov} = 0,2V$.

Consideriamo il seguente circuito e studiamo il comportamento di segnale:



Trascuriamo per ora le r_o di M_1 e M_2 .

$$I = \frac{g_m}{2} v_d$$

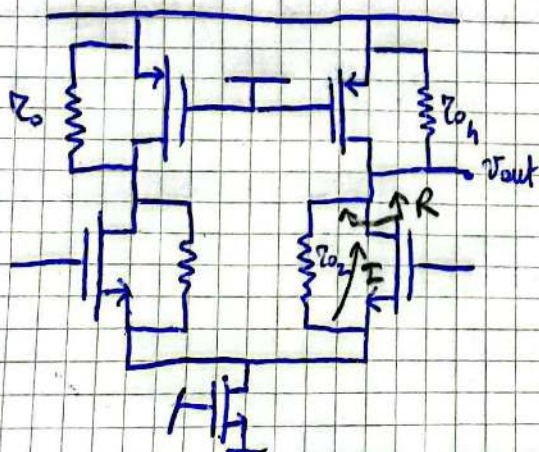
$$v_{out} = \frac{g_m}{2} v_d r_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_d = \frac{g_m r_o}{2}$$

14/10/24

Lezione 11

Consideriamo ora la presenza delle r_o di M_1 e M_2 :



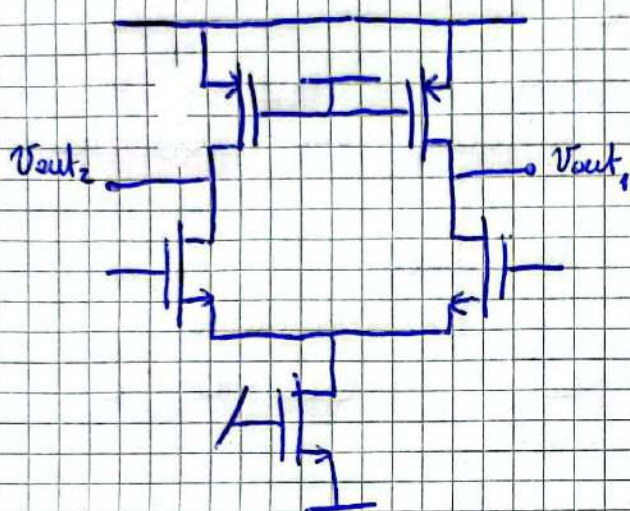
$$I = g_m v_d/2$$

$$R = r_{o1} \parallel r_{o2} \text{ da cui}$$

$$v_{out} = \frac{g_m}{2} v_d (r_{o1} \parallel r_{o2})$$

da cui $G_d = \frac{g_m}{2} (r_{o1} \parallel r_{o2})$

Se come uscita consideriamo la tensione:



$V_{out1} - V_{out2} \Rightarrow$ definiamo

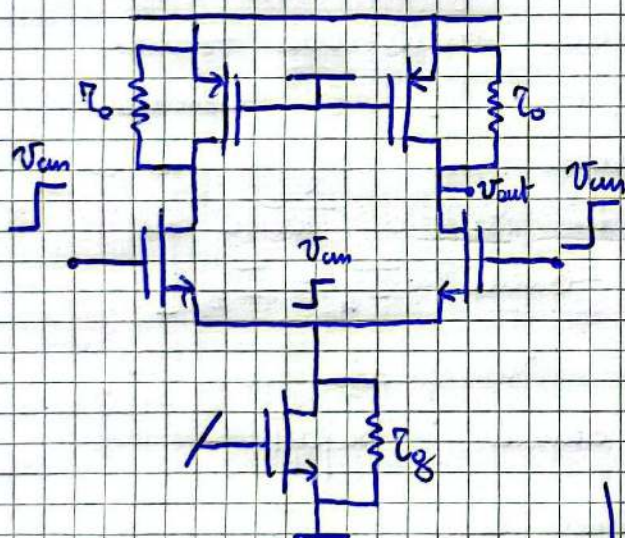
G_d come:

$$\frac{V_{out1} - V_{out2}}{V_d}$$

allora in

questo caso G_d è il doppio rispetto a G_d single ended.

Calcoliamo ora il guadagno di modo comune di questa configurazione:



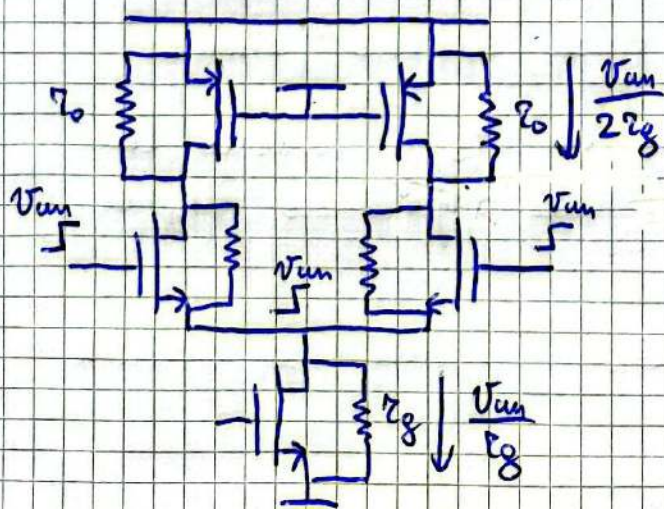
$\frac{1}{g_m} \ll r_g$ allora M_1 e M_2 follower ideali.

Però per r_g scorre una corrente pari a $\frac{V_{cm}}{r_g}$ Però

$$V_{out} = - \frac{V_{cm}}{2r_g} \cdot r_o \quad \text{da cui}$$

$$|G_{cm}| = \frac{r_o}{2r_g}$$

Consideriamo ora le r_o di M_1 e M_2 :



Per r_o scorre $\frac{V_{cm}}{2r_g}$

da cui $V_{out} = - \frac{V_{cm}}{2r_g} \cdot r_o$ e

$$|G_{cm}| = \frac{r_o}{2r_g} \Rightarrow \text{la presenza}$$

di r_o su M_1 e M_2 non modifica

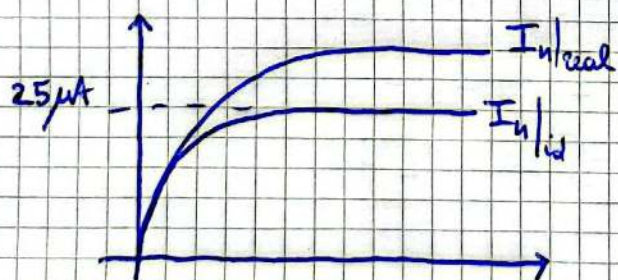
il guadagno di modo comune.

Il modo più facile per aumentare il CMRR e ridurre G_{cm} aumentando r_g . Questo si può fare aumentando la lunghezza del canale, o usando la configurazione cascode con generatore di coda.

Se in questo caso usiamo il full differential output, allora idealmente (se il circuito è perfettamente simmetrico) $V_{out2} = V_{out1}$, $G_{cm} = 0$ e $CMRR \rightarrow \infty$.

Il problema principale di questo circuito è l'incertezza che si ha nella tensione di soglia V_T . Infatti questa non ha un valore fisso, ma ha una certa incertezza. Una variazione di V_T genera una variazione di V_{ov} e quindi una variazione della corrente. La corrente di M_1 e M_2 è definita da M_5 , quindi può esserci un conflitto tra la corrente di M_5 e quella di M_n a causa di un diverso valore di V_T . Perciò $I_n \neq I_5/2$.

Supponiamo che $I_n > I_5$. In questo caso M_n e M_3 operano in zona ohmica. Infatti



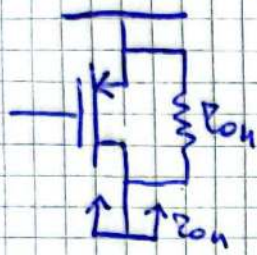
Nel caso di I_n/id M_n opera in saturazione.

Nel caso di $I_n/real$ M_n opera in zona ohmica.

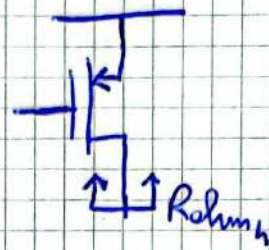
Se M_n fornisce più corrente di M_2 , allora la tensione al drain di M_2 sale portando M_n a operare in zona ohmica.

Questo va a degradare G_d , perché la resistenza

resta verso l'alto non è più r_{on} ma R_{ohm_n}
non vale più che:



ma vale che:



e $R_{ohm_n} < r_{on} \Rightarrow G_d$ è minore.

Consideriamo ora il caso in cui $I_n < I_{s/2}$:

ora la tensione al drain di M_2 scende.

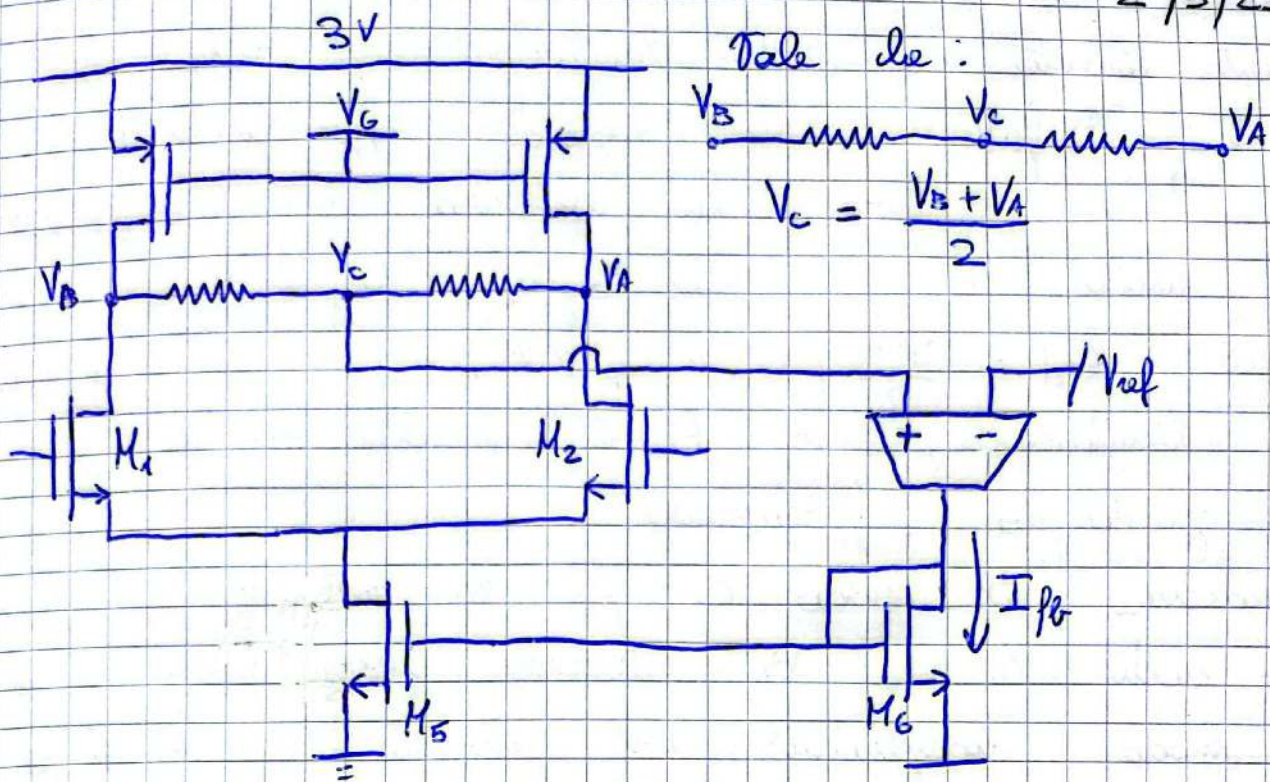
Mauro: il circuito si comporta sempre in modo simmetrico. Per semplicità facciamo la trattazione considerando un solo lato, ma in realtà ciò che succede a destra accade anche a sinistra e vale sempre che $V_{Tn} = V_{Tp}$.

M_2 quindi va a operare in zona ohmica.

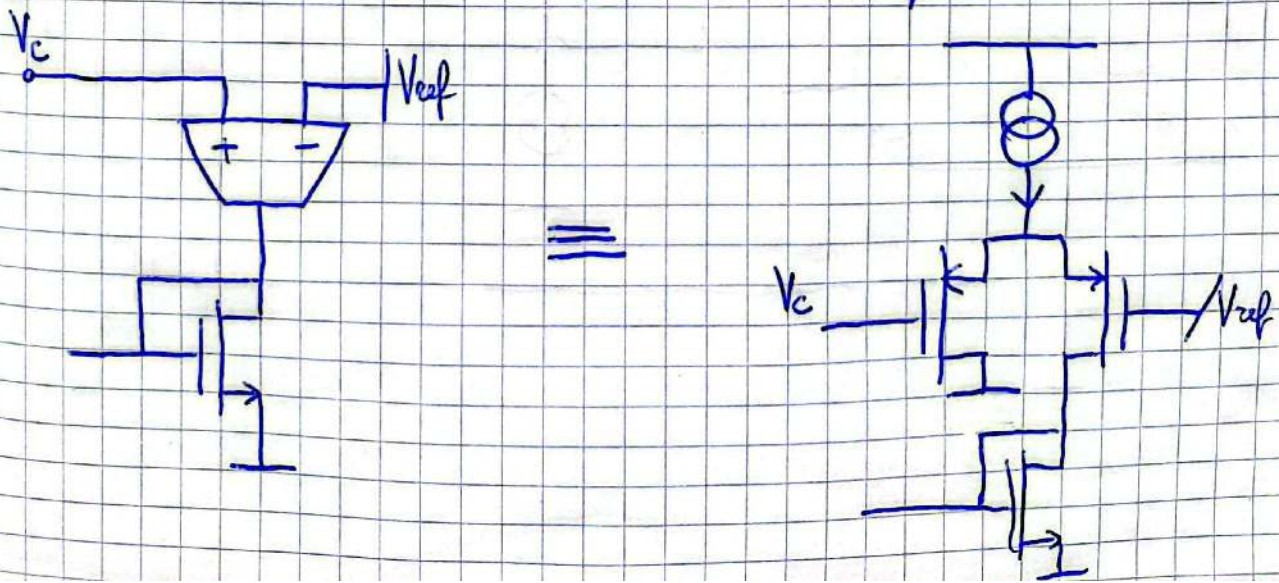
Però è M_5 che fissa la corrente in M_1 e M_2 , quindi il conflitto rimane. Quello che succede è che anche il drain di M_5 scende in tensione portando M_5 a operare in zona ohmica.

Quello che dovremmo fare è verificare che i drain di M_1 e M_2 siano al loro valore nominale, in modo tale che nessun transistor stia operando in zona ohmica. Dovremmo trovare una soluzione che nel caso in cui le tensioni non si trovano al valore nominale, il circuito è in grado di riportarle al valore corretto. Abbiamo implementare una retroazione.

Consideriamo il circuito:



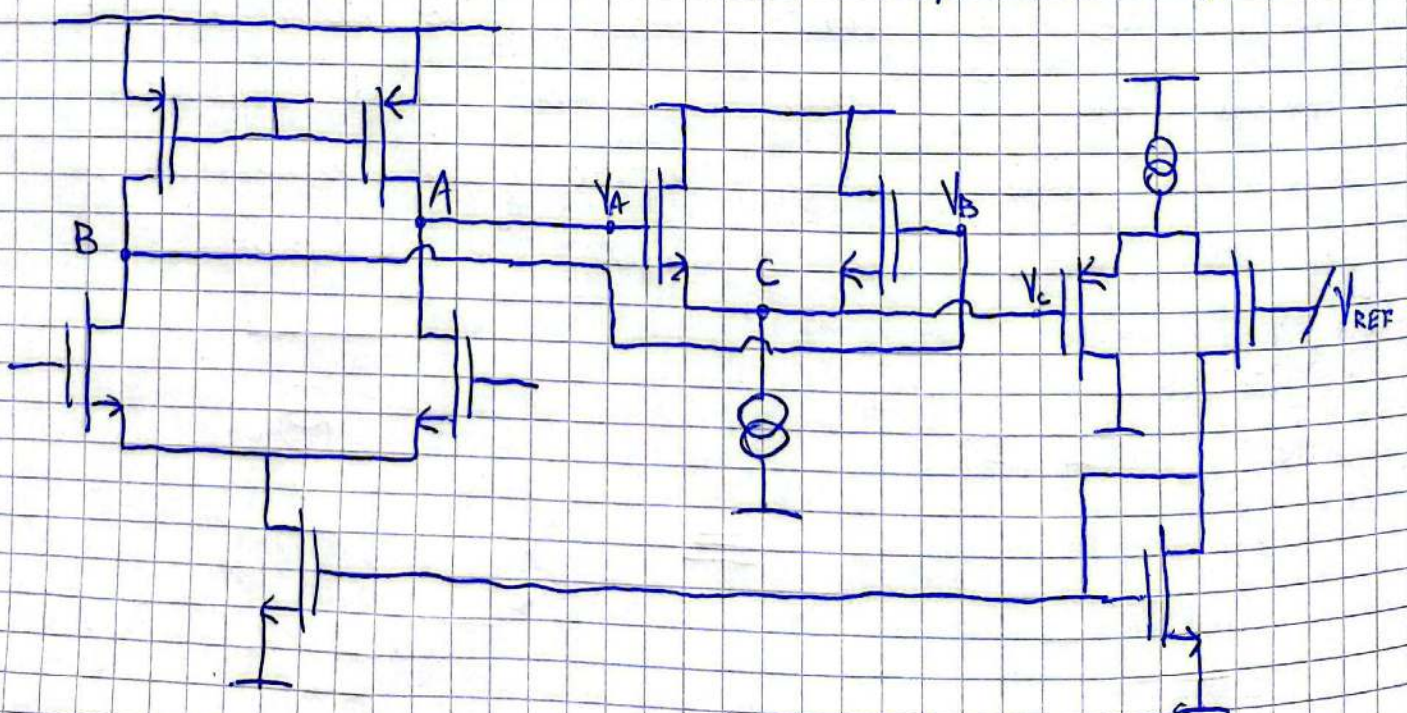
V_{ref} lo si pone uguale al valore nominale di V_C .
 Se V_C aumenta, aumenta la corrente I_{fb} e quindi
 aumenta anche la corrente di M_5 per effetto dello
 specchio di corrente. Per ciò di conseguenza aumenta
 anche la corrente per M_1 e M_2 , facendo
 così scendere V_A e V_B , quindi facendo scendere
 anche V_C e chiudendo l'effetto della retroazione.
 Questa rete è detta common mode feedback
 network perché va a correggere le variazioni di
 modo comune del circuito. In particolare:



Questo circuito ha delle limitazioni su segnale differenziale. Infatti: se segnale differenziale V_c sta fisso, però la resistenza vista dal nodo di uscita è $R_{out} = r_{o2} \parallel r_{on} \parallel R$.
Però $G_d = \frac{g_m}{2} (r_{o2} \parallel r_{on} \parallel R)$. R è quindi una limitazione, se R è piccola va a ridurre il guadagno differenziale.

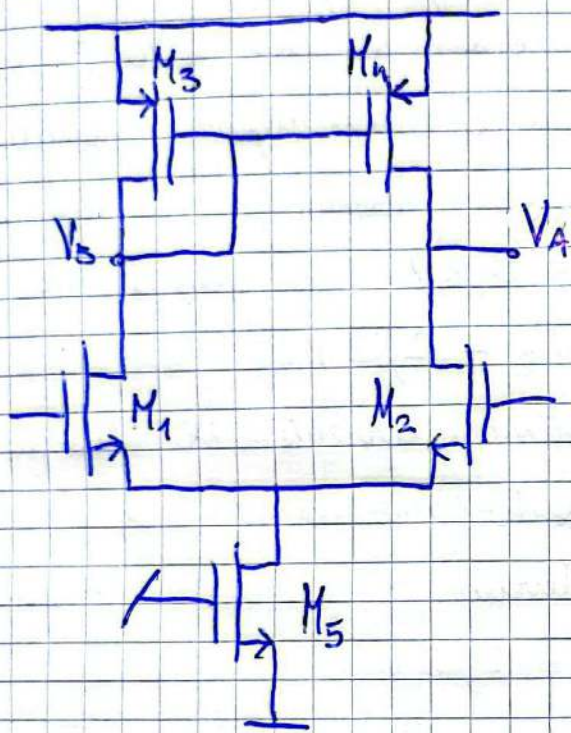
Prendiamo il modo C per la retroazione, perché i nodi A e B devono essere liberi di muoversi in modo indipendente nel caso di segnale differenziale. La retroazione deve agire solo su segnale di modo comune, agendo quindi sulla media di V_A e V_B senza impedire la variazione differenziale.

Soluzione alternativa per non ridurre R_{out} : usare due buffers implementati con source follower. Quindi:



In questo modo $R_{out} = r_{o1} \parallel r_{o2}$ e non viene degradato il guadagno differenziale.

Studiamo ora i circuiti single-ended:
il differential amplifier single ended definitivo
è:



Vediamo come lo speglio di corrente M_3 e M_4 risolve i problemi:

anche in questo caso le correnti di M_4 e M_5 sono indipendenti, perché ogni transistor ha una sua V_{GS} .

Anche in questo caso consideriamo $M_1 = M_2$ e $M_3 = M_4$.

Supponiamo che la corrente I_5 che scorre per M_5 valga $50 \mu A$.

Trascuriamo per ora la presenza delle r_o di M_1 e M_2 . Sotto questa approssimazione la corrente che scorre per M_1 e M_2 dipende solo da V_{GS1} e V_{GS2} . Se M_1 e M_2 sono uguali, la corrente I_5 si divide equamente tra M_1 e M_2 .

La corrente per M_1 forza la corrente per M_3 .

Quindi V_{GS3} di M_3 si adatta al valore appropriato affinché M_3 porti la stessa corrente di M_1 .

M_3 e M_n sono uguali e hanno lo stesso valore di $V_{GS} \Rightarrow$ la corrente per M_3 è la stessa di M_n .

Se $V_{T3} = V_{Tn}$ e $V_{T3} \neq V_{To}$ con V_{To} valore nominale della tensione di soglia, non cambia niente. V_{GS3} si aggiunge affinché M_3 porti la stessa corrente di M_1 . Di conseguenza cambia $V_{GSn} = V_{GS3}$ e dato che $M_3 = M_n$, I_3 sarà comunque uguale a I_n .

Supponiamo di avere $V_{ov3} = 0,2V$, allora se $V_{T3} = 0,6V$ si ha che $V_B = 2,2V$.

M_3 e M_n portano la stessa corrente e hanno stessa V_{GS} , ma se consideriamo anche il channel modulation effect, devono avere anche stessa V_{DS} . Perciò $V_A = V_B = 2,2V$.

Supponiamo ora che anche M_1 e M_2 siano affetti di channel modulation effect. Ora in linea di principio può valere che $V_{GS1} \neq V_{GS2}$ e $V_{GS3} \neq V_{GSn}$.

Se $V_A = V_B$ si ha però la soluzione del circuito, perché: se $V_A = V_B$:

$I_n = I_3$ perché M_3 e M_n hanno stessa V_{GS} e stessa V_{DS} .

$I_3 = I_1$ per forza, per legge di Kirchhoff.

$I_1 = I_2$ perché M_1 e M_2 hanno stessa V_{GS} ma anche stessa V_{DS} .

Perciò: $I_n = I_3 = I_1 = I_2$ e il circuito opera in modo appropriato.

Supponiamo il caso in cui $V_A > 2,2V$, dove $2,2V$ è il valore nominale.

In questo caso $V_{DS4} < V_{DS3}$ e quindi $I_4 < I_3$.

$I_3 = I_1$ per KCL. Ora, se $V_A > 2,2V$,

allora $V_{DS2} > V_{DS1}$ e quindi $I_2 > I_1$.

Però: $I_4 < I_3 = I_1 < I_2$. Ma in

questo modo risulta che $I_2 > I_4$, il che non è possibile perché non sarebbe rispettata la KCL.

Anche nel caso in cui $V_A < 2,2V$ otterremmo

un assurdo. Però in definitiva deve necessariamente

valere che $V_A = V_B = 2,2V$.

Studiamo ora il caso in cui il circuito non ha

più le coppie di transistori uguali, cioè $M_1 \neq M_2$

e/o $M_3 \neq M_4$.

Supponiamo ad esempio che $V_{T4} > V_{T3}$. In questo

caso M_4 porta meno corrente del valore nomi-

nale. Affinché M_4 e M_2 portino la stessa corrente,

V_A deve scendere rispetto a V_B , con il rischio di portare M_2 in zona ohmica.

Se invece $V_{T4} < V_{T3}$, allora M_4 porta più

corrente del valore nominale e V_A deve salire

in tensione affinché $I_4 = I_2$, con il rischio di

portare M_4 in zona ohmica.

Il modo A è un modo ad alta resistenza,

(infatti R_{out} è grande per avere grande G_o)

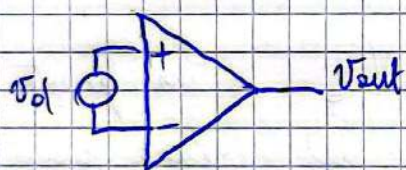
questo vuol dire che una piccola variazione di corrente per il modo A genera una grande

variazioni di tensione. Una variazione di corrente può essere generata da segnale in ingresso, ma anche da un mismatch tra i transistori.

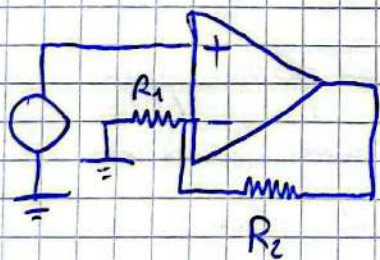
Se V_A è diverso dal valore nominale anche se $V_{ol} = 0$, allora abbiamo un offset in uscita.

Il problema dell'offset è che è differenziale, e dato che il guadagno è elevato, basta un piccolo offset per far saturare l'uscita e rendere l'amplificatore inutile.

Ma l'amplificatore non si usa mai da solo per amplificare un segnale differenziale, non si usa il circuito:

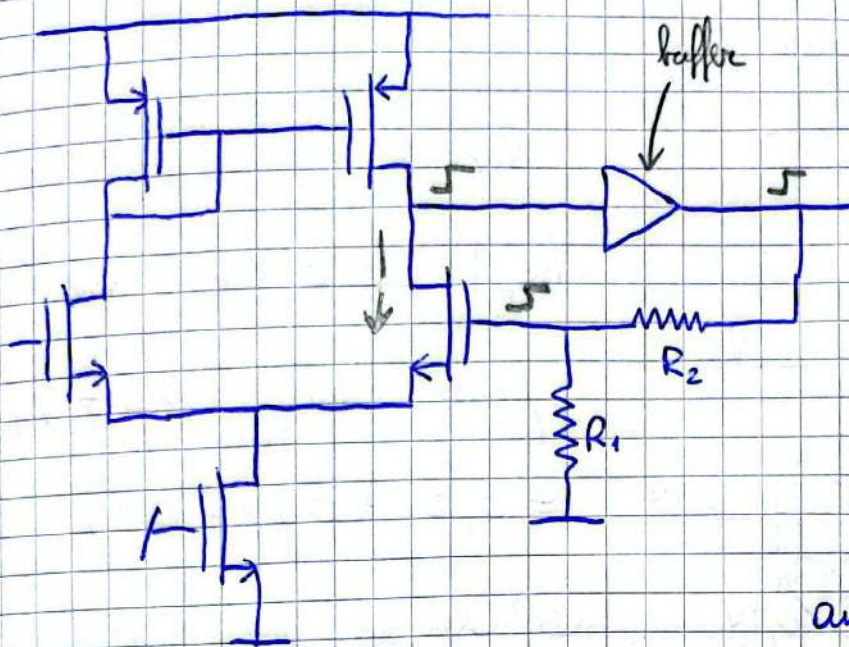


L'amplificatore viene sempre inserito in una rete di retroazione come ad esempio:



e in questo caso il guadagno complessivo del circuito dipende solo da R_2 e R_1 e non dai parametri dell'amplificatore affetti dalle non idealità dei transistori che lo compongono.

Però se inseriamo lo stadio differenziale in una rete di retroazione:



Ora la rete $R_2 - R_1$ non appartiene allo stadio differenziale, è esterna e serve per sfruttare correttamente lo stadio.

Servono quello che fa e anche compensare le

non idealità. Infatti se per esempio V_A è maggiore del valore nominale, allora per effetto della retroazione V_{G2} cresce, scorre più corrente per $M_2 \Rightarrow$ scorre più corrente per M_1 e quindi V_A si abbassa.

15/10/24

Lezione 12

Il loop va a ridurre lo scostamento di A dal suo valore nominale.

Chiamo ΔI il mismatch tra le correnti I_2 e I_1 dovuto allo scostamento di V_A .

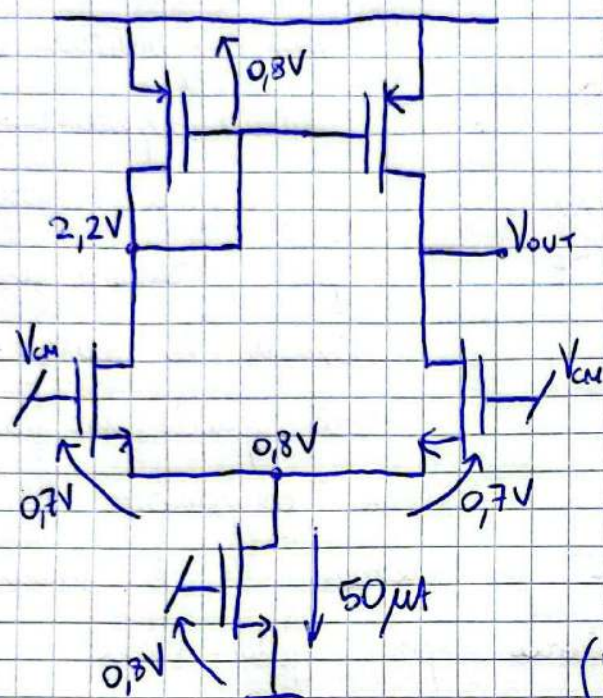
Lo scostamento di V_A dopo l'effetto del loop è:

$$\frac{\Delta I \cdot R_{out}}{1 - G_{loop}}$$

1 - G_{loop}

Studiamo ora la dinamica del circuito: in particolare ci chiediamo quale sia il range di tensioni in ingresso possibile affinché i transistori continuino a operare in saturazione.

Considero il circuito:



$$V_{ovT} = 2,2V; \quad V_{th} = 1,5V$$

$$V_{DS5}|_{min} = 0,2V = V_{ov},$$

$$\text{perciò } V_{ch}|_{min} = 0,2V + V_{GS1} = 0,2V + 0,7V = 0,9V$$

Calcoliamo ora $V_{ch}|_{max}$:

$$V_{DS1}|_{min} = 0,1V, \quad \text{perciò}$$

$$(V_{G1} - V_{D1})|_{max} = 0,6V$$

$$\Rightarrow V_{GS1}|_{max} = V_{ch}|_{max} = 0,6V + V_{D1} = 2,2V + 0,6V = 2,8V \quad \text{In definitiva:}$$

$$0,9V < V_{ch} < 2,8V$$

Calcoliamo ora la dinamica in uscita: consideriamo gli ingressi fissi a 1,5V.

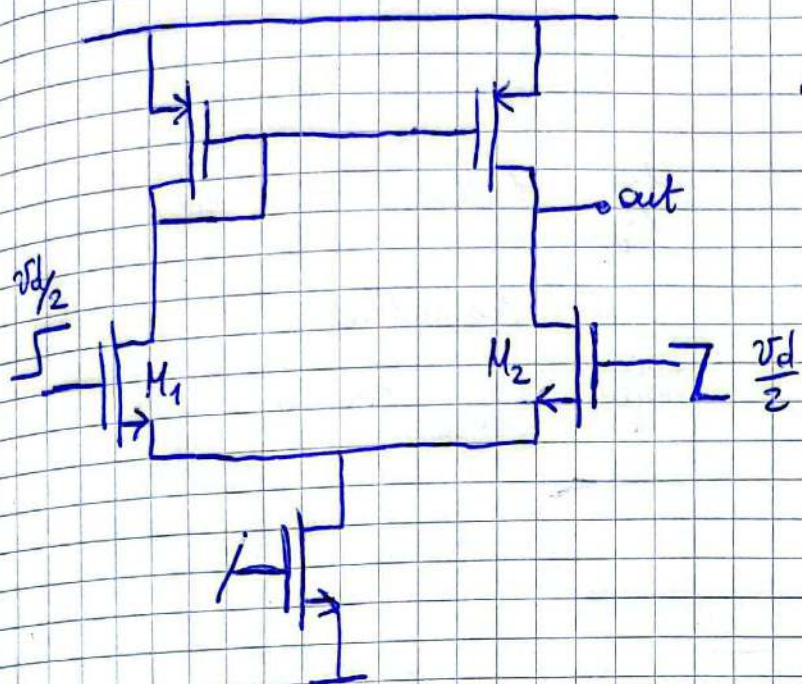
$$V_{SD4}|_{min} = 0,2V \Rightarrow V_{out}|_{max} = 3V - 0,2V = 2,8V$$

Calcolo ora $V_{out}|_{min}$:

$$(V_{G2} - V_{out})|_{max} = 0,6V \Rightarrow V_{out}|_{min} = 0,9V$$

Calcoliamo ora guadagno differenziale, guadagno di modo comune e CMRR.

Partiamo dal guadagno differenziale:



Consideriamo per ora
che $r_{o1} = r_{o2} \rightarrow \infty$.

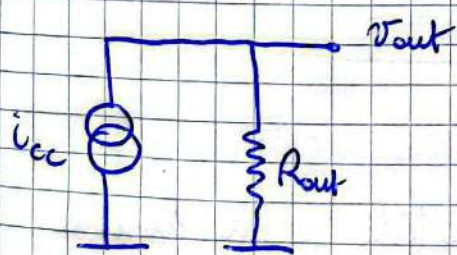
Per simmetria $V_{gs1} = \frac{V_d}{2}$

e $V_{gs2} = -\frac{V_d}{2}$.

Il drain di M_5 sta
fino in tensione.

E invece consideriamo le resistenze r_o di M_1 e M_2 ,
dato che il carico (lo specchio di corrente) non
è simmetrico, la tensione V_d non si divide
equamente tra V_{gs1} e V_{gs2} .

Uniamo il teorema di Norton: dobbiamo ricavare
l'equivalente Norton del circuito visto dal nodo di uscita.
In particolare: dobbiamo calcolare i_{cc} che è la
corrente che scorre verso l'uscita se questa è
cortocircuitata a massa. E poi dobbiamo calcolare
 R_{out} , cioè la resistenza vista dal nodo di
uscita. Si ricava così:



calcolando così V_{out} come:

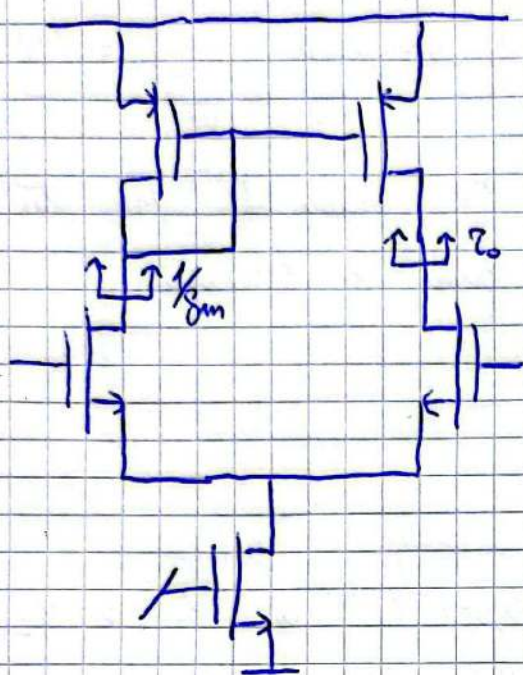
$$V_{out} = i_{cc} \cdot R_{out}.$$

Cortocircuitando l'uscita, si ripristina più o meno
la simmetria del circuito.

*infatti:

caso

floating:

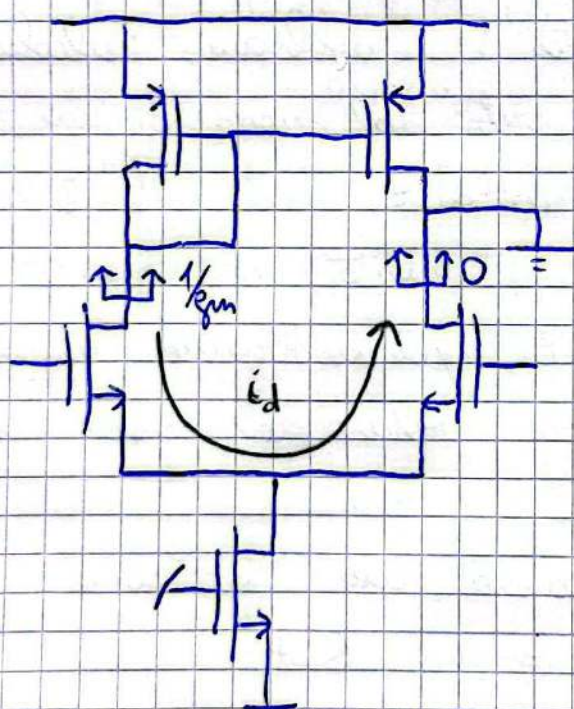


$$1/g_m \neq r_o \Rightarrow \text{non}$$

c'è simmetria.

*infatti $1/g_m \ll r_o$

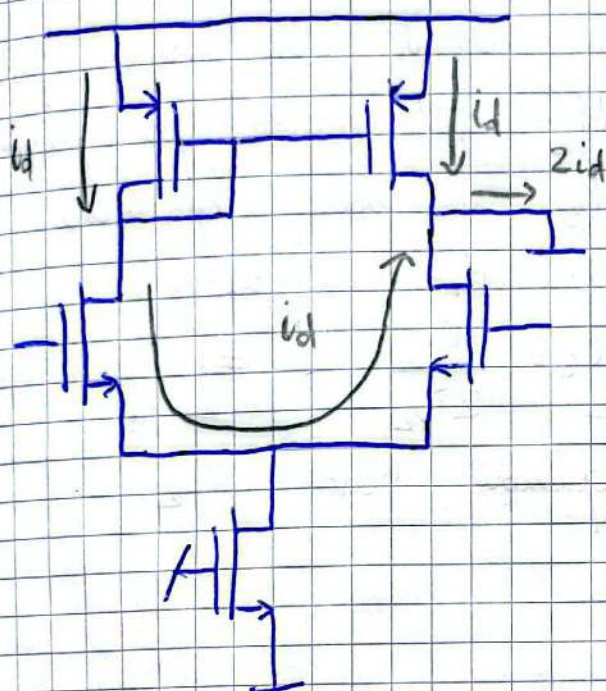
Caso out cortocircuitato a massa:



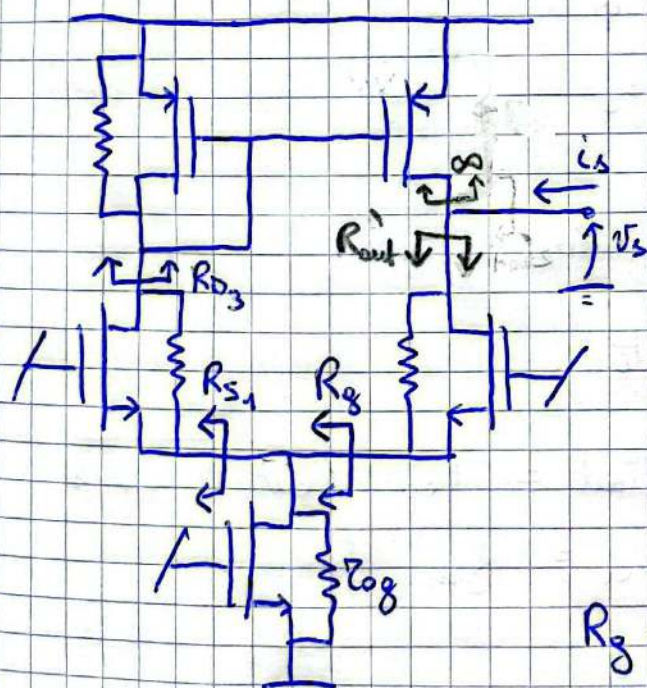
Ora $1/g_m$ è abbastanza simile a impedenza nulla $\Rightarrow$ il circuito si può considerare simmetrico.

Ora quindi, con l'uscita cortocircuitata, la tensione al drain di M_5 rimane pressoché invariata e v_d si divide equamente tra M_1 e M_2 .
Si genera quindi una corrente differenziale i_d

che ha espressione: $i_d = \frac{g_m}{2} v_d$.
 Per effetto dello specchio di corrente, la corrente in uscita vale $2 i_d$:



Calcoliamo R_{out} :



$R_{out} = r_{o1} \parallel R_{out}'$, noto ciò, posso calcolare R_{out}' ignorando la presenza di r_{o1} . In questo caso, senza r_{o1} , $R_{out}' = \frac{v_s}{i_s}$.

$$R_{D3} = \frac{1}{g_{m3}} \parallel r_{o3} \approx \frac{1}{g_{m3}}$$

$$R_{S1} = \frac{R_{D3} + r_{o1}}{1 + g_{m1} r_{o1}} \approx \frac{1}{g_{m1}} \text{ dato}$$

$$\text{che } r_{o1} \gg R_{D3} = \frac{1}{g_{m3}}$$

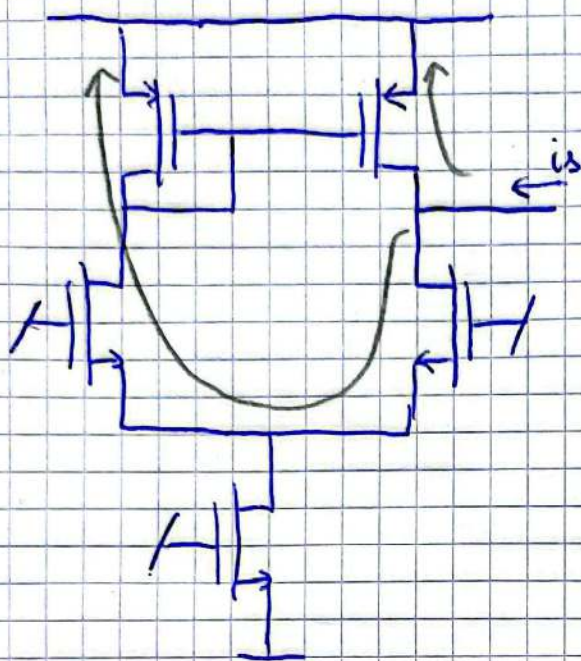
$$R_g = R_{S1} \parallel r_{o2} \approx R_{S1} \approx \frac{1}{g_{m1}}$$

$$R_{out}' = r_{o2} (1 + g_{m2} R_g) = r_{o2} \left(1 + \frac{g_{m2}}{g_{m1}} \right) = 2 r_{o2}$$

dato che $g_{m1} = g_{m2}$

C'è anche lo specchio
nel calcolo di R_{out} :

che agire e va considerato



la corrente che scende per
 M_2 , scende poi per
 M_3 e viene specchiata
per M_1 . Perciò:

$$i_s = \frac{V_s}{2r_{o2}} \cdot 2 \Rightarrow \frac{V_s}{i_s} = r_{o2}$$

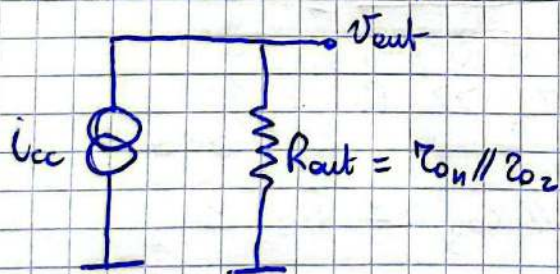
quindi $R_{out} = r_{o2}$.

C'è quindi un loop tale che $G_{loop} = -1$ che
fa sì che: $R_{out} |_{open\ loop} = 2r_{o2}$, mentre

$$R_{out} |_{closed\ loop} = \frac{2r_{o2}}{1+1} = r_{o2}$$

In conclusione: $R_{out} = r_{o1} \parallel r_{o2}$

Tornando all'equivalente Norton:



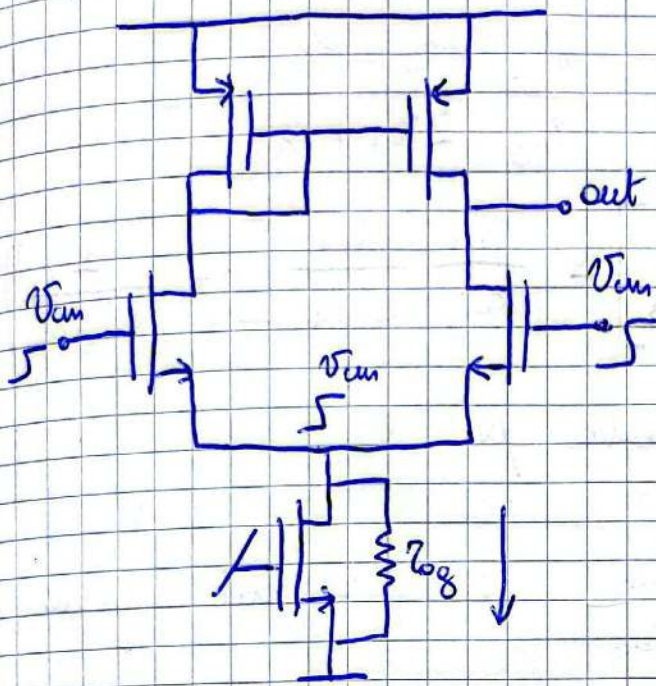
$$V_{out} = i_{cc} \cdot R_{out} \quad \text{dove}$$

$$i_{cc} = g_m V_d$$

Quindi il guadagno differenziale vale:

$$G_d = \frac{V_{out}}{V_d} = g_m (r_{o1} \parallel r_{o2}) \approx \frac{\mu}{2}$$

Calcoliamo ora il guadagno di modo comune:



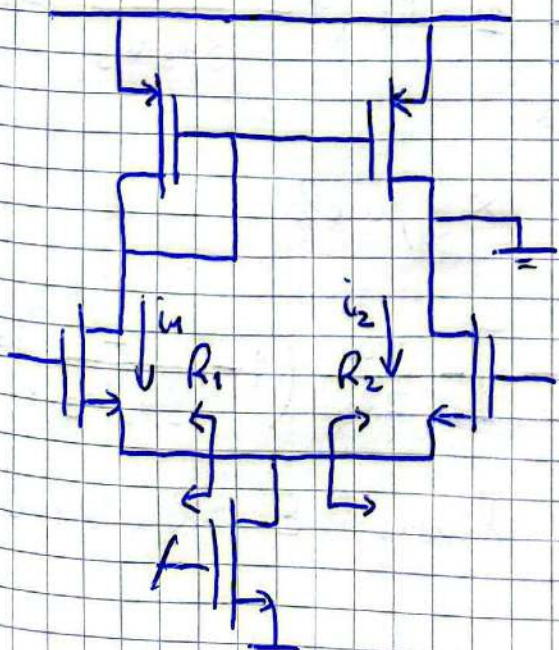
Per effetto dei follower, anche il drain di M_2 sale di una tensione V_{cm} . Per r_{og} scorre una corrente pari a $\frac{V_{cm}}{r_{og}}$.

Se tutto fosse ideale, la corrente per r_{og} si divide equamente tra M_1 e M_2 , questa stessa corrente scorre

per M_3 e M_4 e in uscita la corrente è nulla. Ma in realtà non è così a causa delle asimmetrie.

Procediamo ancora con l'equivalente Norton:

R_{out} è la stessa del caso di segnale differenziale e vale $r_{o1} \parallel r_{o2}$. Dobbiamo calcolare i_{cc} . In questo caso la corrente in uscita è piccola, quindi dobbiamo considerare in modo preciso le asimmetrie, altrimenti si risulterebbe che $i_{cc} = 0$.



R_1 e R_2 sono simili, ma non perfettamente uguali.

$$R_1 = \frac{r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}}{1 + g_{m1} r_{o1}}$$

$$R_2 = \frac{r_{o2}}{1 + g_{m2} r_{o2}} = [M_1 = M_2] =$$

$$= \frac{r_{o1}}{1 + g_{m1} r_{o1}}$$

$$i_1 = \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad i_2 = \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow$$

$$i_1 = \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{r_{o1}}{2r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}}; \quad i_2 = \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}}{2r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}} =$$

$$= \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{r_{o1}}{2r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}} \left[1 + \frac{\frac{1}{g_{m3}}}{r_{o1}} \right] \approx \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{r_{o1}}{2r_{o1}} \left[1 + \frac{1}{g_{m3} r_{o1}} \right] =$$

$$= \frac{v_{in}}{2r_{o2}} \left[1 + \frac{1}{g_{m3} r_{o1}} \right]. \quad \text{Mentre per } i_1:$$

$$i_1 = \frac{v_{in}}{r_{o2}} \frac{r_{o1}}{2r_{o1} + \frac{1}{g_{m3}}} \approx \frac{v_{in}}{2r_{o2}}. \quad \text{Si vede quindi}$$

che $i_1 \neq i_2$

i_1 va in M_3 e specchiata su M_1 . In realtà dobbiamo tenere conto della presenza di r_{o3} ha corrente che viene specchiata e solo quella che scorre per M_3 , non quella che scorre per r_{o3} .

La corrente i_{H3} che scorre per M_3 e viene specchiata vale:

$$i_{H3} = i_1 \frac{r_{o3}}{\frac{1}{g_{m3}} + r_{o3}} = \frac{i_1}{1 + \frac{1}{g_{m3} r_{o3}}} \approx i_1 \left(1 - \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} \right) = i_n$$

dato che $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ se x piccola.

$$i_{cc} = i_2 - i_n = \frac{v_{in}}{2r_{o2}} \left[1 + \frac{1}{g_{m3} r_{o1}} \right] - \frac{v_{in}}{2r_{o2}} \left(1 - \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} \right) =$$

$$= \frac{v_{in}}{2r_{o2}} \left(\frac{1}{g_{m3} r_{o1}} + \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} \right) \quad \text{chiamo } \varepsilon \text{ il termine}$$

tra parentesi, l'ordine di grandezza di ϵ è $\frac{2}{\mu}$.

Però l'equivalente Norton in segnale di modo comune è:



Però:

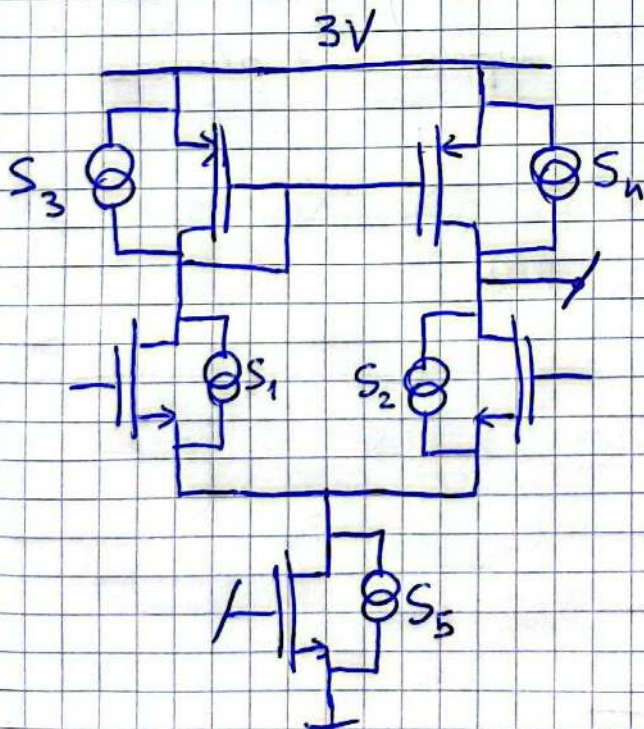
$$G_{cm} = \frac{\epsilon}{2r_{o3}} (r_{o1} \parallel r_{o2})$$

Però: $CMRR = \frac{G_d}{G_{cm}} = \frac{2g_{m1}r_{o3}}{\epsilon}$

l'ordine di grandezza di G_{cm} è $\frac{1}{2\mu}$,

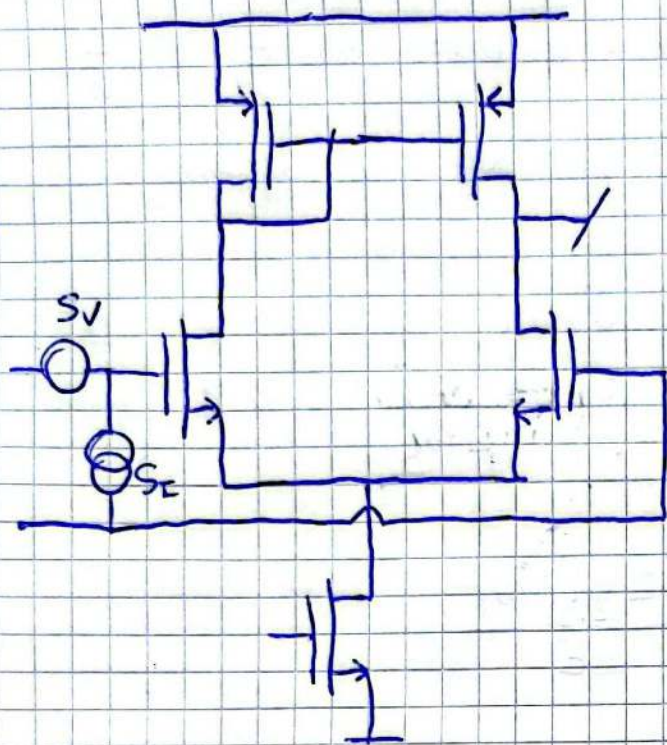
mentre l'ordine di grandezza del CMRR è μ^2 , il che non è male.

Studiamo ora il rumore dello stadio differenziale:



Dove $S_i = 4kT \delta g_{mi}$

Q non interessa il rumore riferito in ingresso e rap = presentato da S_I e S_V , però:

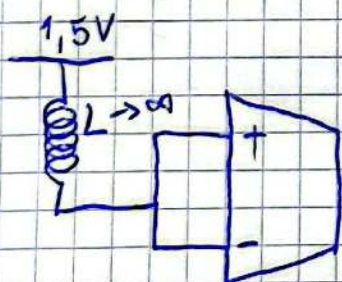


Sotto l'assunzione che il CMRA è molto grande, lo stadio differenziale è una rete a due porte e quindi possiamo usare il teorema per calcolare S_I e S_V .

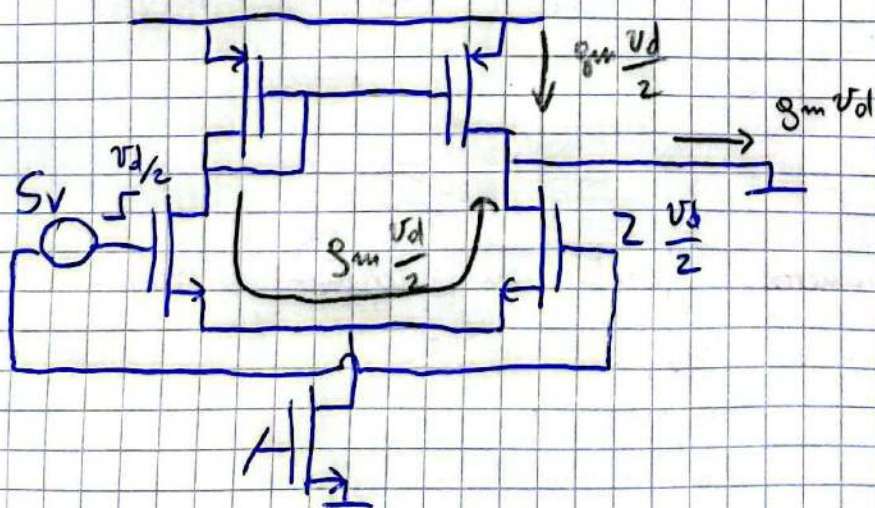
S_I e S_V sono indipendenti dall'impedenza di uscita e di ingresso. Per semplicità consideriamo l'uscita cortocircuitata

a massa. Per calcolare S_V cortocircuitiamo tra loro gli ingressi.

Per definire la polarizzazione degli ingressi, si usa un induttore con induttanza molto alta. Questo permette di settare la tensione di polarizzazione, ponendo un'alta impedenza tra gli ingressi e l'alimentazione:

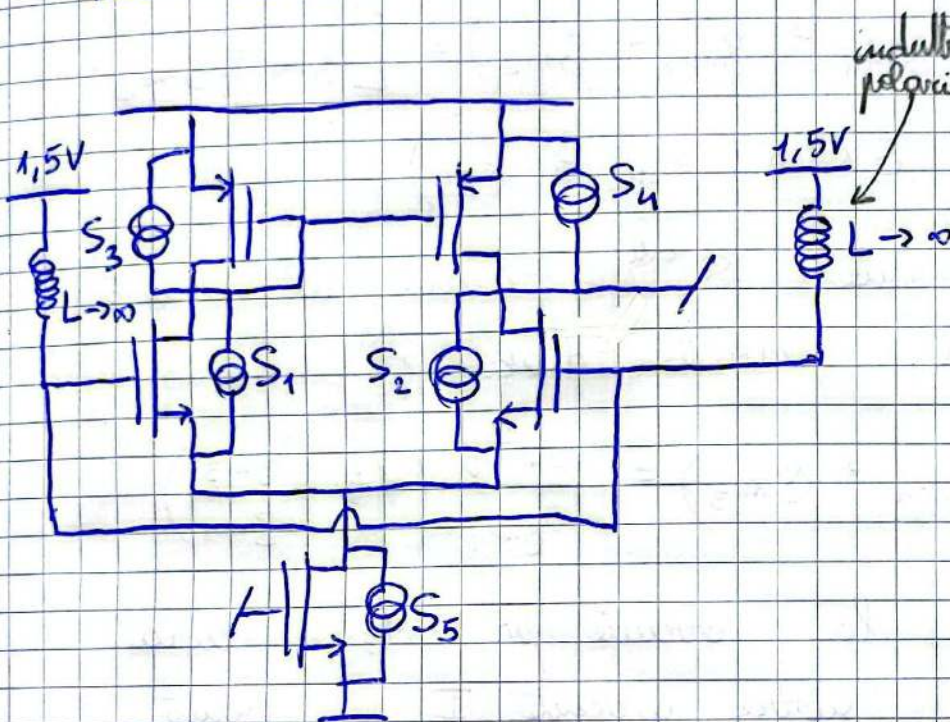


Consideriamo il circuito:



ha densità spettrale di potenza della corrente di ru =
more in unità $\bar{e}$: $g_{m1}^2 S_v$. Berni
 $S_I^{out} = g_{m1}^2 S_v$.

Nel circuito reale:

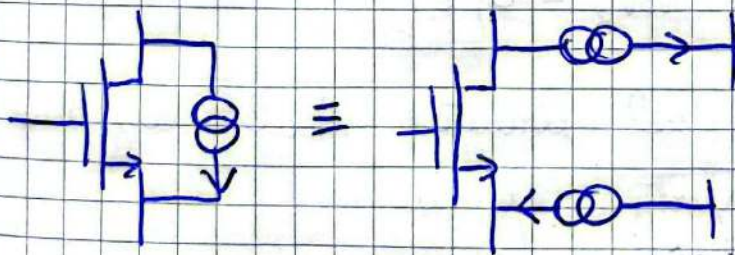


Del generatore S_5
c'è una forzatura
di corrente E che
va in uscita a cau-
sa delle asimmetrie
del circuito, ma
questa corrente è
trascurabile.

la corrente di S_3 entra in M_3 , viene specchiata
in M_4 e va in uscita. $\Rightarrow S_I^{out} \big|_{S_3} = S_3$.

S_4 va direttamente in uscita.

Per calcolare l'effetto di S_1 usiamo lo splitting
theorem.



S_1 conneso al source
di M_1 è un generatore
di modo comune e non
ha effetti sull'uscita

S_1 conneso al drain di M_1 manda corrente in
 M_3 , questa corrente viene specchiata in M_4 e
mandata in uscita.

Quindi $S_I^{out}|_{S_1} = S_1$.

Splittiamo anche S_2 . Un generatore $\bar{e}$ di modo comune, l'altro va direttamente in uscita. Perciò in definitiva $S_I^{out} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$$= 4KT\gamma (g_{m3} + g_{m4} + g_{m1} + g_{m2}) = [g_{m1} = g_{m2}; g_{m3} = g_{m4}] = 8KT\gamma (g_{m3} + g_{m1})$$

Equagliando le due S_I^{out} ricavate col circuito reale e con il circuito ideale:

$$S_V = \frac{8KT\gamma}{g_{m1}^2} (g_{m1} + g_{m3}) = \frac{8KT\gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{g_{m3}}{g_{m1}} \right)$$

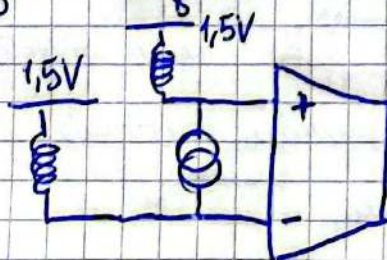
E chiamo $2I$ la corrente per M_5 , allora per i transistori nasce corrente I . Perciò:

$$g_{m3} = g_{m4} = \frac{2I}{V_{ov3}} \quad \text{e} \quad g_{m1} = \frac{2I}{V_{ov1}}, \quad \text{perciò}$$

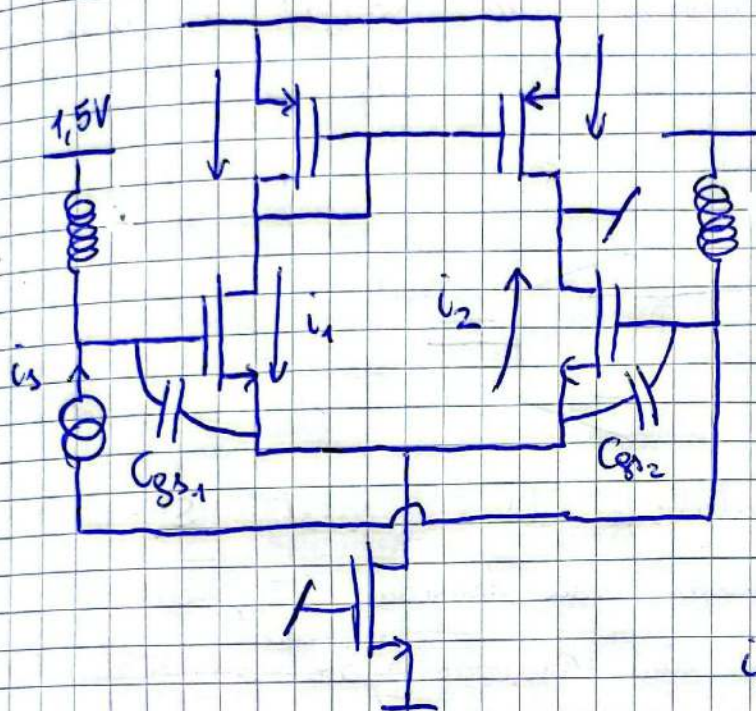
$$\frac{g_{m3}}{g_{m1}} = \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}} \quad \text{da cui} \quad S_V = \frac{8KT\gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}} \right)$$

Per ridurre S_V , è una buona scelta porre $V_{ov1} < V_{ov3}$ (per esempio $V_{ov1} = 0,1V$ e $V_{ov3} = 0,2V$)

Calcoliamo ora S_I : nel circuito ideale lasciamo gli ingressi circuiti aperti. Quindi:



Nel circuito ideale dobbiamo ora considerare le C_{gs} di M_1 e M_2 :



$$v_{gs1} = \frac{i_s}{s C_{gs1}}$$

$$i_1 = g_{m1} v_{gs1} = \frac{g_{m1}}{s C_{gs1}} i_s$$

i_s scorre anche per C_{gs2} generando v_{gs2} .

$$v_{gs2} = - \frac{i_s}{s C_{gs2}}$$

$$i_2 = \frac{g_{m2}}{s C_{gs2}} i_s = - \frac{g_{m1}}{s C_{gs1}} i_s$$

$$i_{out} = i_2 + i_n, \text{ ma } i_n = i_3 \text{ e } i_3 = i_1$$

$$\Rightarrow i_{out} = \frac{2 g_m}{s C_{gs}} i_s, \text{ da cui, in termini di rumore:}$$

$$S_I^{out} = \frac{4 g_m^2}{\omega^2 C_{gs}^2} S_I$$

Consideriamo ora il circuito reale: la trattazione è identica a quella fatta prima, per calcolare S_v . Perciò $S_I^{out} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 =$

$$= 8KT \gamma (g_{m1} + g_{m3})$$

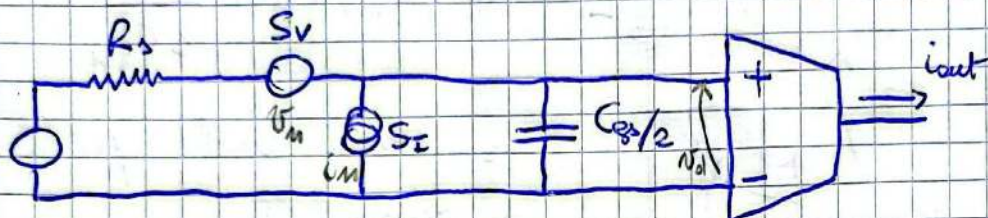
Equagliando le due espressioni di S_I^{out} ricavate con circuito reale e ideale si trova che:

$$S_I = 8KT \gamma g_{m1} \left(1 + \frac{g_{m3}}{g_{m1}} \right) \frac{\omega^2 C_{gs}^2}{4 g_{m1}^2} = \frac{8KT \gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{g_{m3}}{g_{m1}} \right) \frac{\omega^2 C_{gs}^2}{4} = S_v \frac{\omega^2 C_{gs}^2}{h}$$

21/10/24

Lezione 13

Verifichiamo il teorema. Consideriamo una sorgente con una resistenza R_s e vediamo se i risultati ottenuti sono validi. Considero il circuito:



Consideriamo prima il contributo del generatore S_v : supponendo che questo fornisca una tensione v_m , ai capi di $C_{gs}/2$ c'è una tensione pari a:

$$\frac{v_m}{1 + s \frac{C_{gs}}{2} R_s} = \frac{v_m}{1 + s \gamma}$$

vale $g_{m1} v_d$ da cui $i_{out} = g_{m1} \frac{v_m}{1 + s \gamma}$

S_v termini di rumore:

$$S_{I}^{out} = S_v \frac{g_{m1}^2}{1 + \omega^2 \gamma^2}$$

Consideriamo ora il contributo del generatore S_i : diamo in la corrente mossa dal generatore.

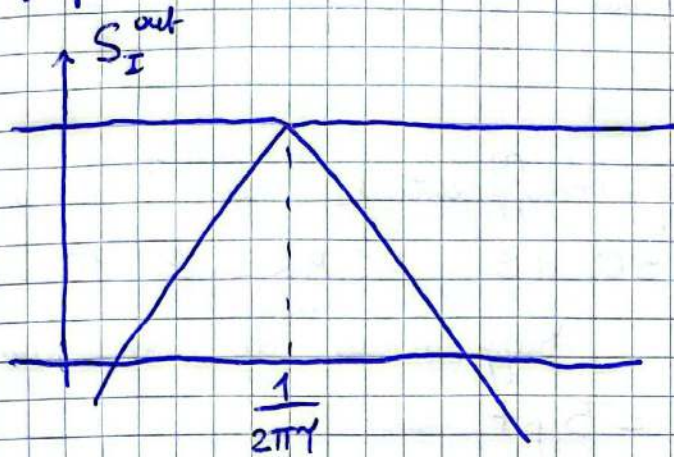
$$i_{out} = g_m v_d = g_{m1} \frac{R_s}{1 + s \gamma} i_m$$

rumore: $S_{I}^{out} = S_i \frac{(g_{m1} R_s)^2}{1 + \omega^2 \gamma^2}$

Complessivamente: $S_{I}^{out} = S_v \frac{g_{m1}^2}{1 + \omega^2 \gamma^2} + S_i \frac{(g_{m1} R_s)^2}{1 + \omega^2 \gamma^2}$

tende a 0 per $\omega \rightarrow \infty$
tende a 0 per $\omega \rightarrow 0$

Graficamente:



$$S_I^{\text{out}}(0) = S_V g_{m1}^2, \quad \text{ma } S_V = \frac{4KT\gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right)$$

$$\Rightarrow S_I^{\text{out}}(0) = 4KT\gamma g_{m1} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right)$$

$$S_I = S_V \omega^2 \left(\frac{C_{gs}}{2}\right)^2, \quad \text{piu' vale che:}$$

$$S_I \frac{(g_{m1} R_s)^2}{1 + \omega^2 \gamma^2} = S_V \omega^2 \left(\frac{C_{gs}}{2}\right)^2 \frac{R_s^2 g_{m1}^2}{1 + \omega^2 \gamma^2} \quad \text{per}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \text{questo termine vale } S_V g_{m1}^2 \Rightarrow$$

$$S_I^{\text{out}}(\infty) = S_V g_{m1}^2 = 4KT\gamma g_{m1} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right)$$

in definitiva, la sovrapposizione dei due termini, restituisce $S_I^{\text{out}}(\omega)$ costante e pari a $4KT\gamma g_{m1} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right)$ come ottenuto in precedenza.

Inciso: se la banda di funzionamento del circuito è inferiore a $\frac{1}{2\pi\gamma}$, il contributo rilevante di S_I^{out} è dovuto a S_V , mentre se la banda è superiore a $\frac{1}{2\pi\gamma}$ il contributo maggiore è dovuto a S_I . Nei nostri esercizi considereremo sempre che la banda sia inferiore a $\frac{1}{2\pi\gamma}$, quindi

ci limiteremo a calcolare S_V .

Esempio numerico:

Progettare un amplificatore con le seguenti caratteristiche: $G_d \approx 30 \text{ dB}$, $CHRR \approx 30 \text{ dB}$; $S_V \leq (5 \text{ V}/\sqrt{\text{Hz}})^2$. Supponiamo di avere un carico capacitivo $C_L = 5 \text{ pF}$.

L'amplificatore sarà costituito da due stadi.

Il primo stadio deve essere in grado di fornire $G_d = 45 \text{ dB} = 178$

Il primo stadio è costituito da uno stadio dif-ferenziale.

Calcoliamo dapprima la corrente di polarizzazione:

$$G_d = g_{m1} (r_{o1} \parallel r_{o2}) = \frac{2I}{V_{ov1}} \cdot \frac{V_{A_{n,2}}}{2I} \Rightarrow \text{la corrente}$$

non influenza G_d . la corrente influenza il rumore, quindi S_V .

$$S_V = \frac{8KT\gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right). \text{ Per ridurre } S_V, \text{ dimen-}$$

sioniamo $V_{ov1} = 0,1 \text{ V}$ e $V_{ov3} = 0,2 \text{ V} \Rightarrow \left(1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ov3}}\right) = 1,5$.

$$\text{Tale che: } \frac{8KT\gamma}{1 \text{ mA/V}} = (4,7 \text{ mV}/\sqrt{\text{Hz}})^2, \text{ perciò}$$

imponendo $g_{m1} = 1,5 \text{ mA/V}$ si ottiene:

$$S_V = \frac{8KT\gamma}{1 \text{ mA/V}} \cdot \frac{1}{1,5} \cdot 1,5 = (4,7 \text{ mV}/\sqrt{\text{Hz}})^2 \text{ che}$$

soddisfa il requisito richiesto.

$$g_{m1} = \frac{2I}{V_{ov1}} \Rightarrow 2I = g_{m1} \cdot V_{ov1} = 150 \mu A$$

$\Rightarrow$ per M_5 servono $150 \mu A$, per gli altri MOS servono $75 \mu A$. Per M_5 impostiamo $V_{ov5} = 0,2 V$.

Volgendo i conti si ottiene che:

$$g_{m3} = g_{m4} = \frac{2I}{V_{ov3}} = \frac{150 \mu A}{0,2 V} = 750 \mu A/V$$

$$g_{m5} = \frac{hI}{V_{ov5}} = 1,5 \text{ mA/V} \quad \text{Calcoliamo ora i valori}$$

$$\text{di } \frac{W}{L} : \quad \frac{W}{L} = \frac{I}{K' V_{ov}^2}, \quad \text{dove } K' \Big|_{nMOS} = 50 \mu A/V^2$$

$$\text{e } K' \Big|_{pMOS} = 25 \mu A/V^2, \quad \text{questi valori di } K' \text{ dipendono}$$

dalla tecnologia. Quindi volgendo i conti:

$$\left(\frac{W}{L}\right)_{1,2} = 150; \quad \left(\frac{W}{L}\right)_{3,4} = 75; \quad \left(\frac{W}{L}\right)_5 = 75$$

$$G_d = \frac{V_{A1,2}}{V_{ov1}} = 178 \Rightarrow V_{A1,2} = 17,8 V. \quad \text{Da questo}$$

valore di V_A possiamo calcolare L , ovvero la lunghezza del canale. Per $L = 0,35 \mu m$ si ha

$V_A = 7 V$. L e V_A sono direttamente proporzionali

$$\Rightarrow L \geq 0,89 \mu m. \quad \text{Scegliamo } L = 1 \mu m$$

$$\Rightarrow M_1, M_2, M_3 \text{ e } M_4 \text{ hanno } L = 1 \mu m.$$

$$\text{Da cui: } W_1 = W_2 = 150 \mu m \text{ e } W_3 = W_4 = 75 \mu m.$$

$$V_A = \frac{1 \mu m}{0,35 \mu m} \cdot 0,7 V = 20 V$$

$$r_o = \frac{V_A}{I} \quad \text{da cui: } r_{o1} = r_{o2} = 267 \text{ k}\Omega$$

$$r_{o3} = r_{o4} = 267 \text{ k}\Omega \quad \mu = g_m r_o = \frac{2V_A}{V_{ov}}$$

$$\text{Svolgendo i conti si ottiene: } \mu_1 = \mu_2 = 400$$

$$\mu_3 = \mu_4 = 200$$

Dimensioniamo ora M_5 . Abbiamo usato il requisito sul CHRR.

$$\text{CHRR} = \frac{2g_{m1} r_{o8}}{\epsilon} \quad \epsilon = \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} + \frac{1}{g_{m3} r_{o4}} =$$

$$= \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = 0,01$$

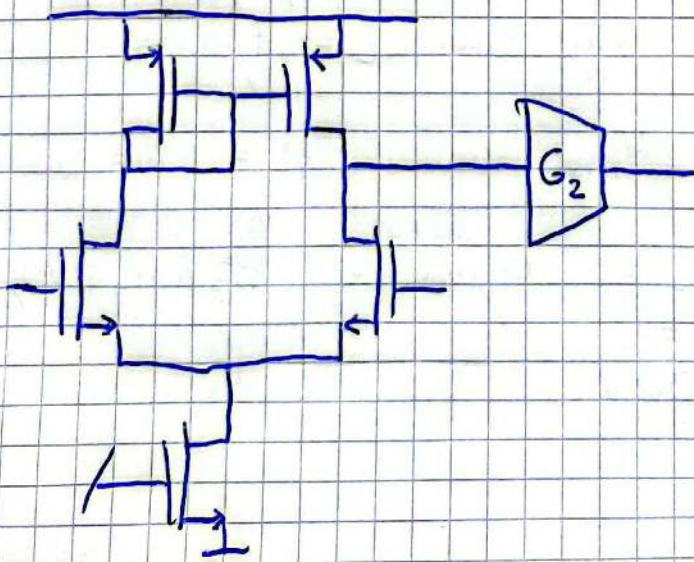
$$r_{o8} \geq \frac{\text{CHRR} \cdot \epsilon}{2g_{m1}} = 105 \text{ k}\Omega \quad V_{A5} = r_{o5} \cdot I_5 = 15,8 \text{ V}$$

da cui $L_5 \geq 0,79 \mu\text{m}$, imponiamo $L_5 = 1 \mu\text{m}$
 Sapendo L_5 e sapendo $\left(\frac{W}{L}\right)_5$ si ricava 5/9/25
 che $W_5 = 75 \mu\text{m}$. $r_{o5} = 133 \text{ k}\Omega$

$$\mu_5 = 200$$

*riso: il CHRR dipende solo dal primo stadio.

*infatti:



$$G_d = G_{d1} \cdot G_2$$

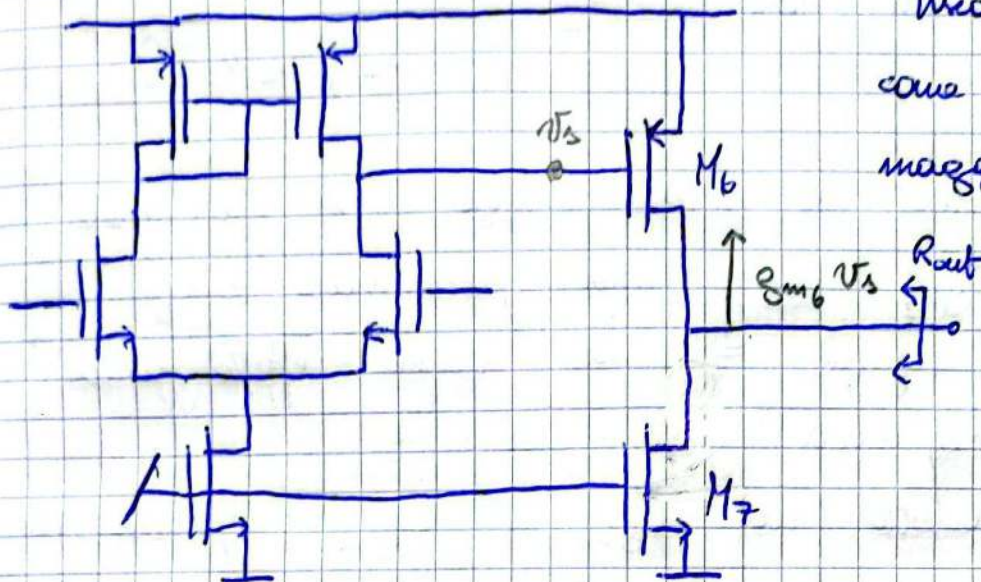
$$G_{cm} = G_{cm1} \cdot G_2$$

$$\text{CHRR} = \frac{G_d}{G_{cm}} = \frac{G_{d1} \cdot G_2}{G_{cm1} \cdot G_2} =$$

$$= \frac{G_{d1}}{G_{cm1}} \Rightarrow \text{il CHRR}$$

dipende solo dal primo stadio.

Abbiamo definito il primo stadio, passiamo ora al secondo. Come secondo stadio possiamo usare un common source p-type:



Usiamo un pMOS come M_6 per avere maggiore dinamica.

$$R_{out} = r_{o6} \parallel r_{o7} \Rightarrow G_2 = g_{m6} (r_{o6} \parallel r_{o7}) =$$

$$= \frac{2I_6}{V_{ov6}} \cdot \frac{V_{AG}}{2I_6} = \frac{V_{AG}}{V_{ov6}}, \text{ vogliamo che } G_2 = 178.$$

$$V_{ov6} = V_{ov_n} = 0,2 \text{ V} \quad V_{AG} = G_2 \cdot V_{ov6} = 35,6 \text{ V}$$

da cui $L_6 \gg 1,78 \mu\text{m}$, imponiamo $L_6 = 1,8 \mu\text{m}$.

$$V_{ov7} = 0,2 \text{ V} \text{ e } L_7 = 1,8 \mu\text{m}.$$

La corrente per M_6 e M_7 è arbitraria. Per simmetria diciamo $I_6 = I_5 = 150 \mu\text{A}$.

Svolgendo i conti per calcolare gli altri parametri si ottiene:

$$g_{m6} = g_{m7} = 1,5 \text{ mA/V} \cdot \left(\frac{W}{L}\right)_6 = 150,$$

$$\left(\frac{W}{L}\right)_7 = 75 \quad W_6 = 270 \mu\text{m} \text{ e } W_7 = 135 \mu\text{m}.$$

$$r_{o6} = r_{o7} = 240 \text{ k}\Omega \quad \mu_6 = \mu_7 = 360$$

Il circuito ha le seguenti prestazioni:

$$G_d = 31 \text{ dB}, \quad CMRR = 32 \text{ dB}, \quad S_v = (1,7 \text{ mV}/\sqrt{\text{Hz}})^2$$

Studiamo ora la risposta in frequenza dello stadio.

$$C_L \text{ introduce un polo: } f_2 = \frac{1}{2\pi C_L (r_{o6} \parallel r_{o7})} =$$

$$= 265 \text{ kHz}$$

Consideriamo ora le varie C_{gs} dei transistori:

C_{gs1} e C_{gs7} non sono posizionati lungo il percorso del segnale $\Rightarrow$ non hanno effetto nella risposta in frequenza.

Il polo introdotto da C_{gs1} e C_{gs2} dipende da R_s , quindi dalla resistenza della sorgente in ingresso. Questo valore è fuori dal nostro controllo.

C_{gs3} e C_{gs4} sono in parallelo e il segnale fa variare la tensione ai loro capi $\Rightarrow$ introducano un polo. La resistenza vista è $1/g_{m3}$, quindi

$$f_1 = \frac{g_{m3}}{2\pi \cdot 2C_{gs3}} = \frac{f_{T3}}{2} \text{ che è un valore alto.}$$

$$C_{gs} = \frac{2}{3} C'_{ox} W/L, \text{ dove } C'_{ox} = 5 \text{ pF}/\mu\text{m}^2 \text{ da cui}$$

$$C_{gs3} = 250 \text{ pF} \text{ da cui } f_1 = 250 \text{ kHz}$$

$C_{gs6} = 1,62 \text{ pF}$. C_{gs6} vede come resistenza la resistenza d'uscita del primo stadio.

$$f_3 = \frac{1}{2\pi C_{gs6} (r_{o2} \parallel r_{o4})} = 733 \text{ kHz}$$

3 due poli che contano sono $f_2 = 265 \text{ KHz}$ e $f_3 = 733 \text{ KHz}$

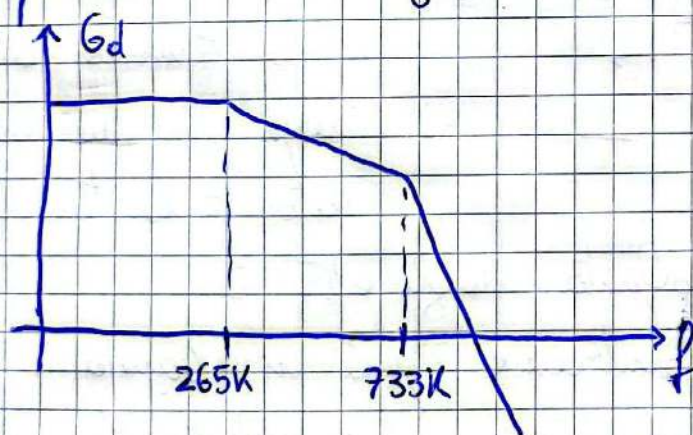
C_{gd6} è affetta da effetto Miller, perché c'è un guadagno tra gate e drain di M_6 .

Però la capacità effettiva dovuta all'effetto di Miller è $C_{gd}(1 + G_c)$ dove G_c è il guadagno ai capi del condensatore.

Calcoliamo il valore di C_{gd6} :

$C_{gd6}' = 0.1 \text{ fF}/\mu\text{m}$ che è la capacità per unità di W .
 $\Rightarrow C_{gd6} = 2.6 \text{ fF}$ e $C_{gd}(1 + G_c) = 0.5 \text{ pF}$. Questa capacità è molto piccola.

Quindi il diagramma di Bode del modulo è:



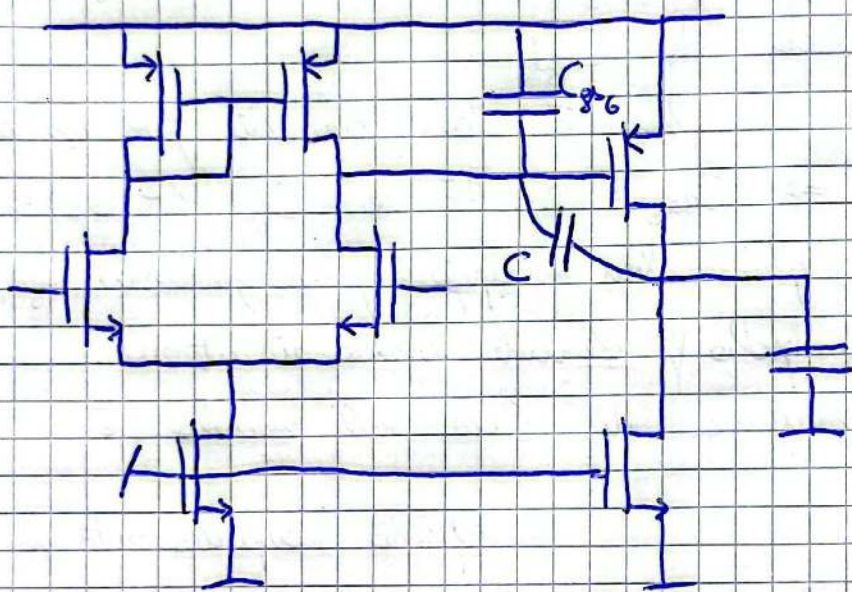
Questo comportamento in frequenza non è accettabile. L'amplificatore viene usato in closed loop, ovvero per esempio:



In questo caso G_{loop} comincia con G_d e G_{loop} attraversa l'area 0 dB con pendenza -40 dB/dec .

R_{out1} e R_{out2} devono essere grandi affinché sia il primo stadio che il secondo stadio forniscono alto guadagno. Queste resistenze con C_{gs6} e C_L generano poli a bassa frequenza,

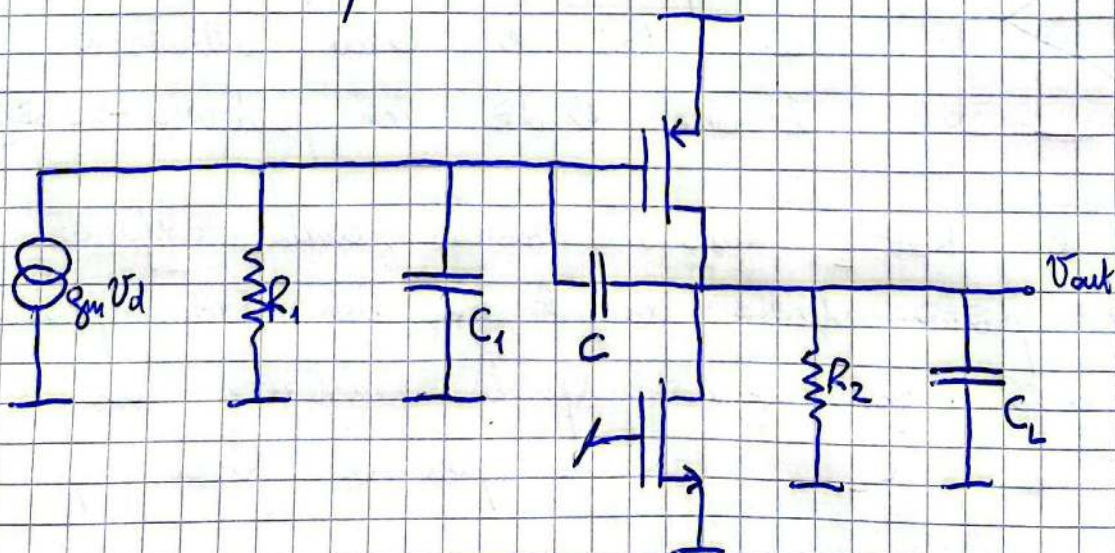
cioè poli dentro la banda. Dovremmo cercare di muovere uno di questi due poli fuori dalla banda di interesse così da intrinsecare l'asse 0 dB con pendenza -20 dB/dec. Cerchiamo sfruttare l'effetto di Miller su C_{gd6} per portare ad alta frequenza uno dei due poli. Consideriamo il circuito:



Ora i condensatori rilevanti, che introducono poli in banda, sono 3. Però i poli introdotti sono 2, perché una volta fissata la tensione ai capi di due condensatori, la tensione

ai capi del terzo è definita dagli altri 2.

Il primo stadio non introduce poli in banda e può essere sostituito dal suo equivalente Norton. Consideriamo quindi il circuito:



$$C_1 = C_{gs6} ; \quad R_1 = R_{out1} = r_{o1} \parallel r_{o2} ; \quad R_2 = r_{o6} \parallel r_{o7} ;$$

Funzione di trasferimento $T(s)$:

calcoliamo prima la funzione di trasferimento in DC.

$$T(0) = -g_{m1} R_1 g_{m6} R_2 = G_d$$

Ogni condensatore indipendente introduce un polo. Potrebbe anche introdurre uno zero. Se il numero di poli è pari al numero di zeri, allora $T(\infty)$ è costante.

In questo caso, se C_L è un corto circuito allora $T(\infty) = 0 \Rightarrow C_L$ non introduce zeri, o meglio introduce uno zero a frequenza infinita.

Anche se C_1 è un corto circuito $V_{out} = 0 \Rightarrow C_1$ introduce uno zero a frequenza infinita.

Se C è un corto circuito, il guadagno ha un valore finito e non nullo $\Rightarrow C$ introduce uno zero nella funzione di trasferimento.

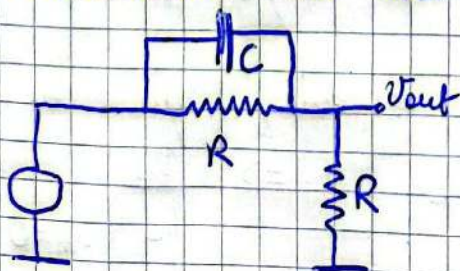
Però $T(s)$ sarà del tipo:

$$T(s) = -g_{m1} R_1 g_{m6} R_2 \frac{a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}$$

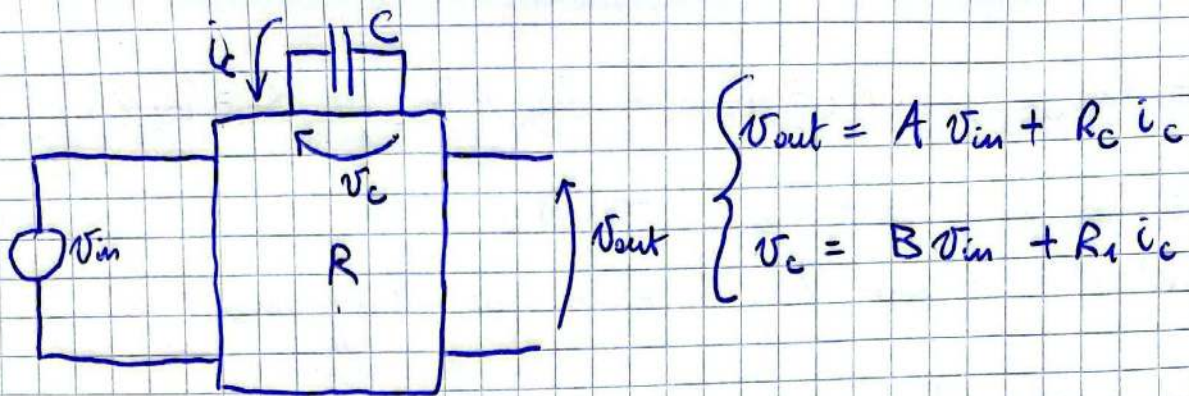
Per calcolare i coefficienti a_i e b_i si usa il time constant method.

Spieghiamo ora il time constant method.

Consideriamo la rete:



Che possiamo rappresentare in maniera semplificata come:



$$\frac{V_c}{i_c} = -\frac{1}{sC} \Rightarrow i_c = -sC V_c \quad \text{perci\u00f2:}$$

$$V_c + sC R_1 V_c = B V_{in} \Rightarrow V_c = \frac{B V_{in}}{1 + sC R_1} \quad \text{da cui}$$

$$i_c = -sC V_c = -\frac{B sC V_{in}}{1 + sC R_1} \quad \text{Quindi la prima}$$

equazione diventa:

$$V_{out} = A V_{in} - \frac{sC B R_c}{1 + sC R_1} V_{in} = A V_{in} \frac{1 + sC \left[R_1 - \frac{B R_c}{A} \right]}{1 + sC R_1}$$

22/10/2h

Lezione 1h

Quindi il trasferimento $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ \u00e8 caratterizzato da un guadagno in DC, un polo e uno zero.

A \u00e8 il guadagno in DC della rete. Infatti in DC il condensatore \u00e8 un circuito aperto $\Rightarrow i_c = 0$ e dalla prima equazione del sistema se $i_c = 0$ si ottiene $V_{out} = A V_{in}$ Nel nostro esempio

$$A = \frac{1}{2}$$

Il polo ha costante di tempo $\tau_p = R_1 C$.

R_1 \u00e8 il coefficiente di i_c nella seconda equazione del sistema. $V_c \Big|_{V_{in}=0} = R_1 i_c \Rightarrow \frac{V_c}{i_c} \Big|_{V_{in}=0} = R_1$

Infatti per calcolare la resistenza vista da C da cui si ricava poi τ_p , si spegne il generatore di ingresso e si calcola poi il rapporto $\frac{v_c}{i_c}$.

la costante di tempo dello zero è:

$$\tau_z = C \left(R_1 - \frac{BR_c}{A} \right) \quad \text{lo zero in una rete corrisponde a quella frequenza dove } v_{out} = 0 \quad \forall v_{in}.$$

Consideriamo la rete con $v_{out} = 0$:

Chiamo v_{in}^* e i_c^* quegli specifici valori di v_{in} e i_c tali che: $v_{out} = A v_{in}^* + R_c i_c^* = 0$

In questa specifica situazione il sistema diventa:

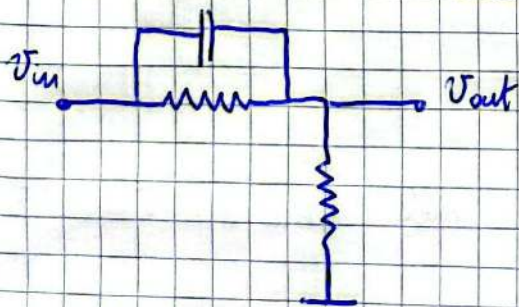
$$\begin{cases} 0 = A v_{in}^* + R_c i_c^* & \Rightarrow v_{in}^* = -\frac{R_c}{A} i_c^* \\ v_c^* = B v_{in}^* + R_1 i_c^* \end{cases}$$

$$v_c^* = \left(-B \frac{R_c}{A} + R_1 \right) i_c^* \Rightarrow \frac{v_c^*}{i_c^*} = R_1 - \frac{BR_c}{A} \quad \text{che è}$$

la resistenza della costante di tempo.

Però $R^* = R_1 - \frac{BR_c}{A}$ è la resistenza vista ai capi di C quando $v_{out} = 0$.

Nel caso della rete:



$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{2} \frac{1 + sCR}{1 + sC \frac{R}{2}}$$

Calcolando $\frac{v_{out}}{v_{in}}$ con la formula del partitore di tensione:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = \frac{R}{R + \frac{R}{1 + sCR}} = \frac{R(1 + sCR)}{2R + sCR^2} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{1 + sRC}{1 + sCR/2}$$

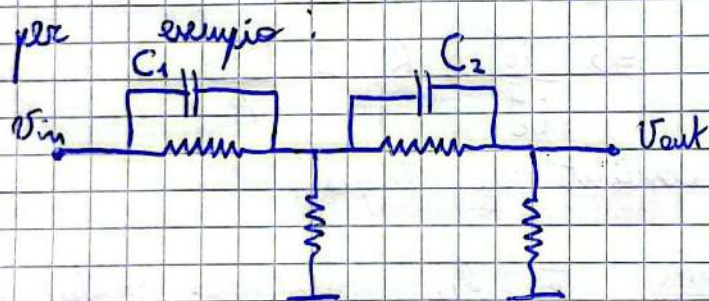
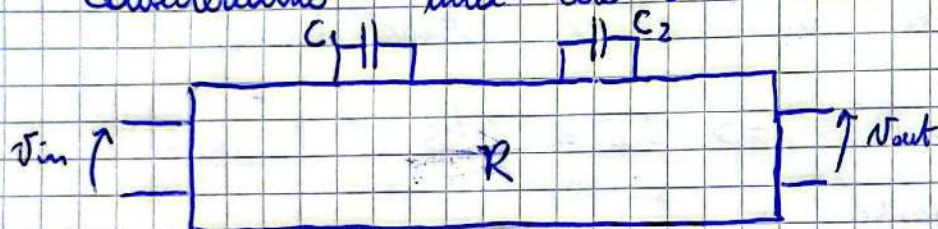
che ovviamente è uguale al risultato precedente.

Proviamo ora una generalizzazione per poter trattare reti di ordine superiore:

chiamo $R^{(0)}$ la resistenza vista da C quando l'ingresso è aperto e le altre capacità sono circuiti aperti.

Chiamo $R_o^{(0)}$ la resistenza vista da C quando l'uscita è a 0V e gli altri condensatori sono circuiti aperti.

Consideriamo una rete di ordine 2:



La funzione di trasferimento sarà del tipo:

$$T(s) = T(0) \frac{s^2 a_2 + s a_1 + 1}{s^2 b_2 + s b_1 + 1}$$

sC sono insinducibili. $\Rightarrow$ nel termine s^2 c'è sicuramente $C_1 C_2$.

Il numeratore di $T(s)$ sarà quindi del tipo:

$$s^2 C_1 C_2 d_{12} + s(C_1 d_1 + C_2 d_2) + 1$$

Il denominatore:

$$s^2 C_1 C_2 \beta_{12} + s(C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2) + 1$$

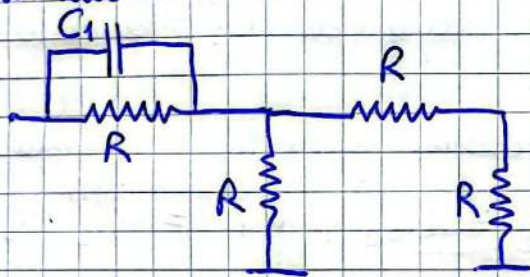
Partiamo dal caso $C_2 = 0 \Rightarrow$ circuito aperto.

In questo caso la rete diventa di primo ordine.

In questo caso: $T(s) = T(0) \frac{s C_1 d_1 + 1}{s C_1 \beta_1 + 1}$

dove β_1 è la resistenza ai capi di C_1 quando $C_2 = 0$ e d_1 è la resistenza ai capi di C_1 quando $v_{out} = 0$ e $C_2 = 0$. Breve:

$\beta_1 = R_1^{(0)}$ e $d_1 = R_{o1}^{(0)}$. Se $C_2 = 0$ la rete diventa:



$$R_1^{(0)} = \frac{2}{3} R // R = \frac{2}{5} R = \beta_1$$

con $V_{in} = 0$

Per calcolare $d_1 = R_{o1}^{(0)}$ pongo $V_{out} = 0$.

$$d_1 = R_{o1}^{(0)} = R$$

Per calcolare β_2 e d_2 impariamo invece $C_1 = 0$.

La rete è ora del primo ordine e $T(s) = T(0) \frac{s C_2 d_2 + 1}{s C_2 \beta_2 + 1}$

dove $\beta_2 = R_2^{(0)}$ e $d_2 = R_{o2}^{(0)}$.

$R_2^{(0)}$ si calcola con V_{in} spento e si ricava che

$$\beta_2 = R_2^{(0)} = R // \frac{3}{2} R = \frac{3}{5} R$$

Passiamo ora al calcolo di d_2 : $V_{out} = 0$.

$$d_2 = R_{o2}^{(0)} = R$$

Dobbiamo ora calcolare d_{12} e β_{12} .

Consideriamo ora $C_1 \rightarrow \infty \Rightarrow C_1$ è un corto circuito. In questo caso $T(s)$ diventa:

$$T(s) = T(0) \frac{s^2 C_1 C_2 d_{12} + s C_1 d_1}{s^2 C_1 C_2 \beta_{12} + s C_1 \beta_1} = T(0) \frac{s C_2 d_{12} + d_1}{s C_2 \beta_{12} + \beta_1} =$$

$$= \frac{d_1}{\beta_1} \cdot \frac{1 + s C_2 \frac{d_{12}}{d_1}}{1 + s C_2 \frac{\beta_{12}}{\beta_1}} \cdot T(0)$$

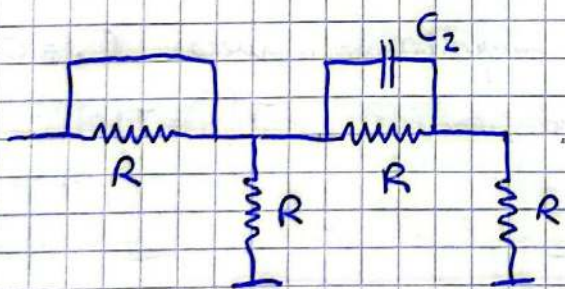
Ora: $\frac{\beta_{12}}{\beta_1} = R_2^{(1)}$ cioè la resistenza vista ai capi di C_2 quando C_1 è un corto circuito.

$\frac{d_{12}}{d_1}$ è la resistenza vista ai capi di C_2 quando $v_{out} = 0$ e C_1 è un corto circuito. Quindi

$$\frac{d_{12}}{d_1} = R_{02}^{(1)} \quad \text{ovvero} \quad d_{12} = R_{02}^{(1)} \cdot d_1 = R_{02}^{(1)} R_{01}^{(0)}$$

$$\beta_{12} = R_2^{(1)} \cdot \beta_1 = R_2^{(1)} R_1^{(0)}$$

Nella rete del nostro esempio:



$$R_2^{(1)} = R // R = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \beta_{12} = \frac{R}{2} \cdot \frac{2R}{5} = \frac{R^2}{5}$$

$$R_{02}^{(1)} = R \quad \text{e} \quad d_{12} = R \cdot R = R^2$$

In conclusione:

$$T(s) = T(0) \frac{s^2 C_1 C_2 R_{02}^{(1)} R_{01}^{(0)} + s (C_1 R_{01}^{(0)} + C_2 R_{02}^{(0)}) + 1}{s^2 C_1 C_2 R_2^{(1)} R_1^{(0)} + s (C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)}) + 1}$$

Arbitrariamente abbiamo considerato $C_1 \rightarrow \infty$ per calcolare d_{12} e β_{12} . Gli stessi risultati si possono ottenere ponendo invece $C_2 \rightarrow \infty$.

Infatti:

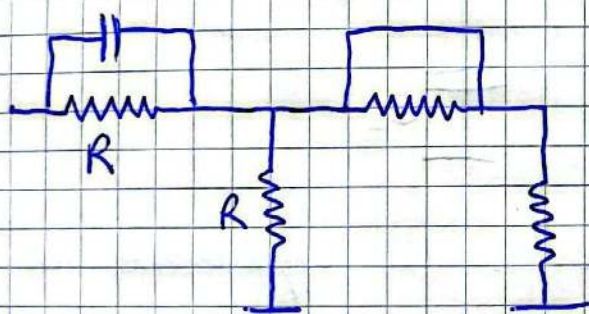
Consideriamo $T(s)$ per $C_2 \rightarrow \infty$, $T(s)$ diventa:

$$T(s) = \frac{s^2 C_1 C_2 d_{12} + s C_2 d_2}{s^2 C_1 C_2 \beta_{12} + s C_2 \beta_2} = \frac{d_2}{\beta_2} \frac{s C_2 \frac{d_{12}}{d_2} + 1}{s C_2 \frac{\beta_{12}}{\beta_2} + 1} \quad \text{dove:}$$

$$\frac{d_{12}}{d_2} = R_{01}^{(2)} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_{12}}{\beta_2} = R_1^{(2)} \quad \text{Ora vale che:}$$

$$d_{12} = R_{01}^{(2)} \cdot R_{02}^{(0)} \quad ; \quad \beta_{12} = R_1^{(2)} \cdot R_2^{(0)}$$

Calcoliamo in funzione di R i vari coefficienti:



$$R_1^{(2)} = R \parallel \frac{R}{2} = \frac{R}{3} \Rightarrow$$

$$\beta_{12} = \frac{R}{3} \cdot \frac{3}{5} R = \frac{R^2}{5} \quad \text{stesso}$$

risultato di prima.

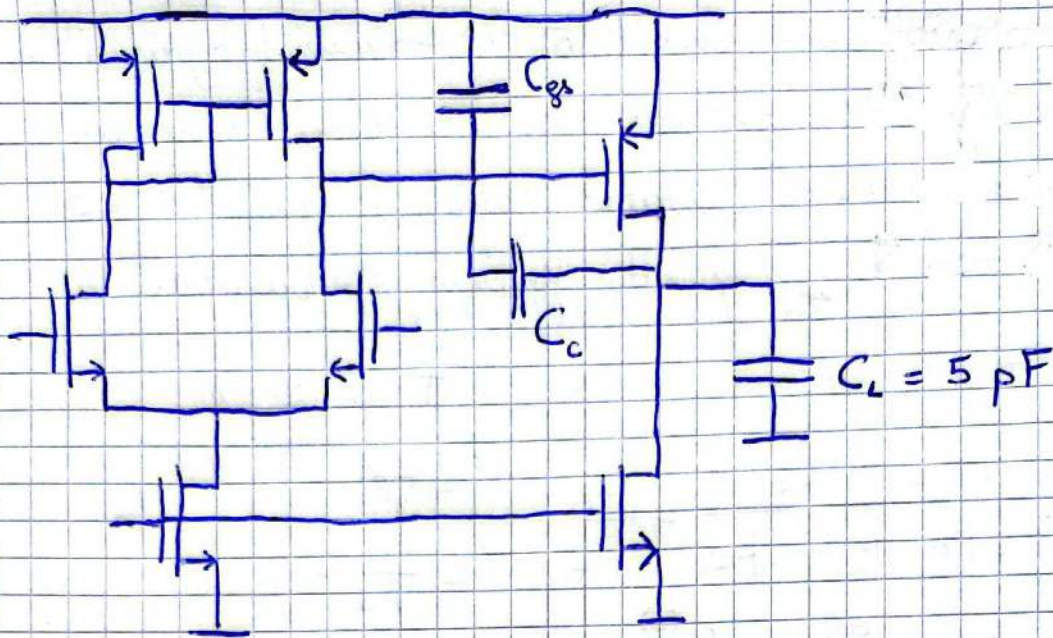
$$R_{01}^{(2)} = R \quad ; \quad R_{02}^{(0)} = R \Rightarrow d_{12} = R^2 \quad \text{stesso risultato di prima.}$$

Regola generale: nel termine $s^2 C_1 C_2 R_1^{(0)} R_2^{(1)}$:

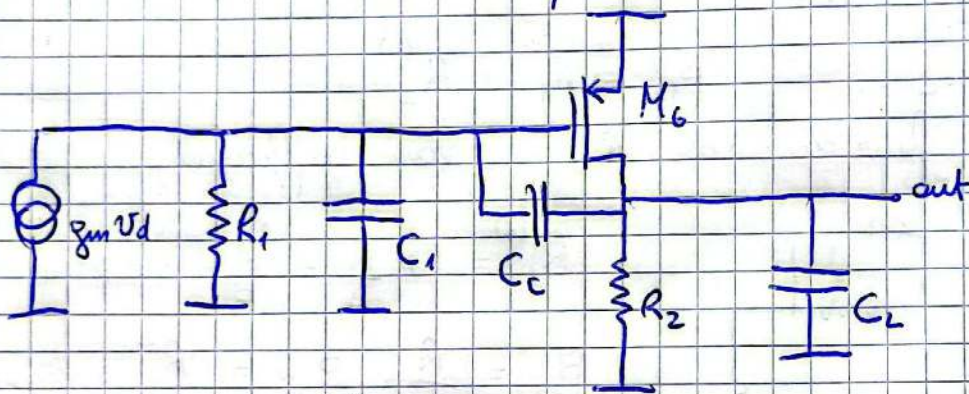
$C_1 \cdot C_2$ moltiplicato per: resistenza vista da C_1 quando C_2 è aperto per resistenza vista da C_2 quando C_1 è circuito chiuso.

Oppure: $s^2 C_2 C_1 R_2^{(0)} R_1^{(2)}$ che segue la stessa regola appena esposta, ma con numeri invertiti.

Studiamo un esempio:



Consideriamo la rete equivalente:



calcoliamo la funzione di trasferimento applicando il time constant method.

Avendo 3 condensatori, possiamo supporre che la rete sia di terzo ordine. Quindi:

$$T(s) = T(0) \frac{s^3 a_3 + s^2 a_2 + s a_1 + 1}{s^3 b_3 + s^2 b_2 + s b_1 + 1} \quad \text{in realtà}$$

sappiamo che i poli sono 2 perché i condensatori non sono tutti indipendenti $\Rightarrow b_3 = 0$, anche $a_3 = 0$. C_L introduce uno zero a frequenza infinita, perché $T(\infty) = 0$. Anche C_1 introduce uno zero a frequenza infinita.

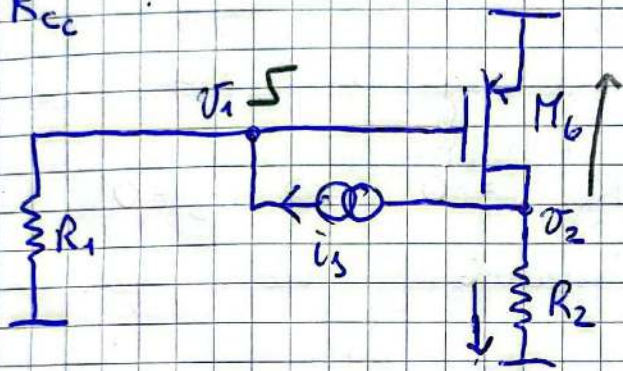
$\Rightarrow T(s)$ ha un solo zero e 2 poli. Quindi:

$$T(s) = -g_{m1} R_1 g_{m6} R_2 \frac{1}{s^2 b_2 + s b_1 + 1}$$

$$b_1 = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_c R_{c_c}^{(0)}$$

$R_{c_c}^{(0)}$: resistenza vista ai capi di C_c quando gli altri condensatori sono circuiti aperti. Calcoliamo

$R_{c_c}^{(0)}$:



i_s va per R_1 e fa salire il gate di M_6 di $i_s R_1$.

Per M_6 scorre corrente verso l'alto: $i_6 = g_{m6} R_1 i_s$

Per R_2 scorre corrente pari a $\frac{v_2}{R_2}$.

$$i_s = -\frac{v_2}{R_2} - g_{m6} R_1 i_s \Rightarrow v_2 = -R_2 i_s (1 + g_{m6} R_1)$$

$$v_s = v_1 - v_2 = i_s [R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2] \Rightarrow$$

$$\frac{v_s}{i_s} = R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2 \quad \left[\text{resistenza vista ai capi di } C_c \text{ quando le altre capacità sono circuiti aperti.} \right]$$

Però: $b_1 = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_c (R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2)$

Calcoliamo b_2 :

$$b_2 = C_1 C_2 R_1^{(0)} R_2^{(1)} + C_1 C_c R_1^{(0)} R_{c_c}^{(1)} + C_2 C_c R_2^{(0)} R_{c_c}^{(2)}$$

$$R_1^{(0)} = R_1 \quad R_2^{(1)} = R_2 \quad R_{c_c}^{(1)} = R_2 \quad R_{c_c}^{(2)} = R_1$$

Ricordando che: $R_1^{(0)}$: resistenza vista ai capi di C_1 quando le altre capacità sono circuiti aperti.

$R_2^{(1)}$: resistenza vista ai capi di C_2 quando C_1 corto circuito e C_c circuito aperto.

E così via le altre. Quindi polinomio al deno =

minatore:

$$s^2 R_1 R_2 (C_1 C_2 + C_1 C_c + C_2 C_c) + s [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_c (R_1 + R_2 + g_{mb} R_1 R_2)] + 1$$

Verifichiamo se effettivamente $b_3 = 0$:

$$b_3 = C_1 C_2 C_c R_1^{(0)} R_2^{(1)} R_c^{(1,2)}$$

$$R_1^{(0)} = R_1; \quad R_2^{(1)} = R_2; \quad R_c^{(1,2)} = 0 \Rightarrow b_3 = 0.$$

Usando un altro ordine di capacità, ad esempio

$$C_2 C_1 C_c R_2^{(0)} R_1^{(2)} R_c^{(1,2)} \quad \text{si ottiene ancora } 0.$$

$b_3 = 0$ in ogni caso.

25/10/2h

7/9/25

Lezione 15

Nota: nella lezione precedente, nei calcoli per calcolare il polinomio al denominatore, la capacità C_c è stata scambiata C_2 per semplicità.

Supponiamo di sapere che C_2 introduce uno zero a frequenza infinita, ma di non sapere che anche C_1 introduce uno zero a frequenza infinita.

Però il polinomio al numeratore sarà del tipo:

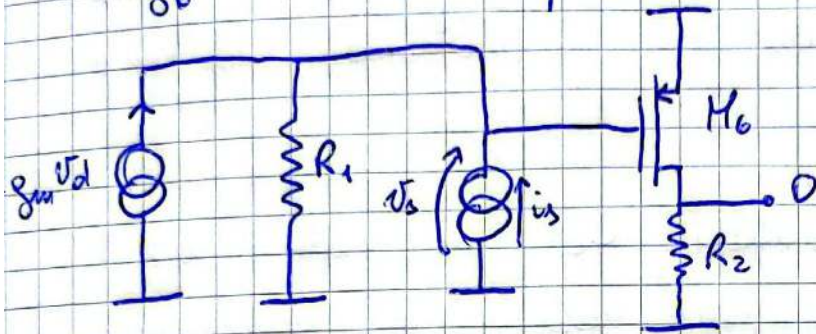
$$s^2 a_2 + s a_1 + 1 \quad \text{Dove:}$$

$$a_2 = C_1 C_c R_{o1}^{(0)} R_{oc}^{(1)}$$

significare $v_{out} = 0$. dove il pedice 0 sta a

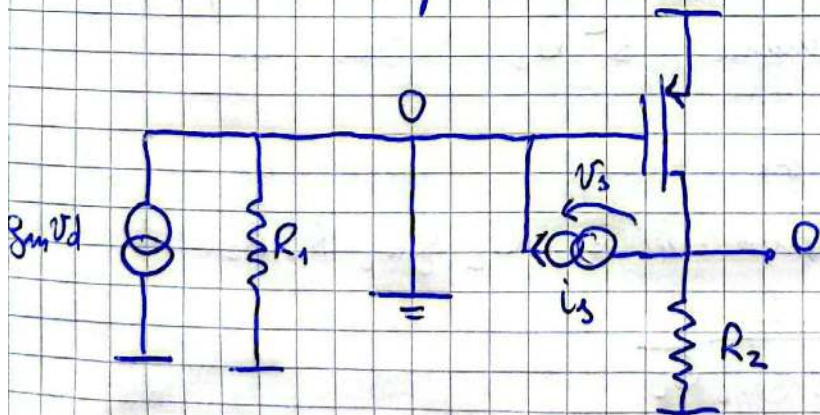
$$a_1 = C_1 R_{o1}^{(0)} + C_c R_{oc}^{(0)} \quad \text{Bastiamo calcolando } R_{o1}^{(0)}$$

$V_{out} = 0 \Rightarrow$ ai capi di R_2 non c'è tensione $\Rightarrow$ per R_2 non scorre corrente. Questo vuol dire che $V_{gs} = 0$. Quindi $V_s = 0$ e $R_{o1}^{(0)} = 0$.



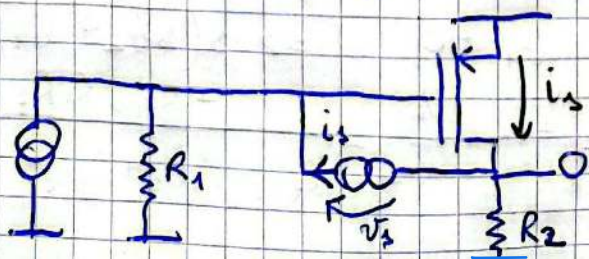
Se $V_s = 0$, i_s non può scorrere per R_1 , questo vuol dire che la corrente i_s e la

corrente del generatore $g_m V_d$ hanno stesso modulo.
 $\Rightarrow$ l'input $g_m V_d$ assume il valore corretto per soddisfare la KCL. Se $R_{o1}^{(0)} = 0$ allora $a_2 = 0$ (forse) perché dobbiamo calcolare anche $R_{oc}^{(1)}$, se $R_{oc}^{(1)} \rightarrow \infty$ allora a_2 potrebbe non valere 0. Nel caso in cui avviene che $R_{o1}^{(0)} = 0$ e $R_{oc}^{(1)} \rightarrow \infty$, allora invertiamo l'ordine per calcolare a_2 , cioè: $a_2 = C_c C_1 R_{oc}^{(0)} R_{o1}^{(1)}$.
 Calcoliamo quindi $R_{oc}^{(1)}$:



$V_s = 0 \Rightarrow R_{oc}^{(1)} = 0$
 da cui $a_2 = 0$.
 (Cosa che in realtà già sapevamo).

Calcoliamo ora $R_{oc}^{(0)}$:



C_1 ora è circuito aperto. Per R_2 non scorre corrente $\Rightarrow$ per M_6

sarà i_s verso il basso, questo vuol dire che
 v_{g6} rende di una quantità $i_s/g_{m6} \Rightarrow$
 $v_s = - \frac{i_s}{g_{m6}}$ da cui $R_{oc}^{(0)} = - \frac{1}{g_{m6}}$.

Però il numeratore è $-s \frac{C_c}{g_{m6}} + 1$ questo
 vuol dire che la funzione di trasferimento ha uno
 zero positivo.

Abbiamo ora dimensionare C_c in modo tale
 da avere i poli posizionati come desideriamo.

Data l'equazione: $s^2 b_2 + s b_1 + 1 = 0$ si ha

$$s_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2} \text{ ma questo procedimento è}$$

lungo.

Assumiamo che s_1 e s_2 (i valori che annullano il polinomio) siano ben distanti. Il che è
 servato perché l'obiettivo è separare i poli.

Se vogliamo calcolare la radice minore del polinomio,
 dato che le due radici sono molto lontane, possiamo
 trascurare il termine $s^2 b_2$. Da cui i
 $s b_1 + 1 = 0$ e $s_1 \approx - \frac{1}{b_1}$

in b_1 , il termine dominante è $C_c g_{m6} R_1 R_2$.

Però $s_1 \approx - \frac{1}{b_1} \approx - \frac{1}{R_1 R_2 g_{m6} C_c}$

Per la radice maggiore, con s grande, il polinomio diventa:
 $s^2 b_2 + s b_1 = 0 \Rightarrow s(s b_2 + b_1) = 0$
 da cui $\boxed{s=0}$ è $s_2 = - \frac{b_1}{b_2} = - \frac{g_{m6} R_1 R_2 C_c}{R_1 R_2 (C_1 C_2 + C_1 C_c + C_2 C_c)}$
 inutile

Calcolati (in modo approssimato ma in ogni caso affidabile)

s_1 e s_2 , possiamo ricavare i poli.

p_1 è il polo a bassa frequenza e vale:

$$p_1 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{g_{m6} C_1 R_1 R_2}$$

p_2 è il polo ad alta $f_{ce} =$

quenza e vale:
$$p_2 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_{m6} C_c}{C_c (C_1 + C_2) + C_1 C_2} \quad \text{e } C_c$$

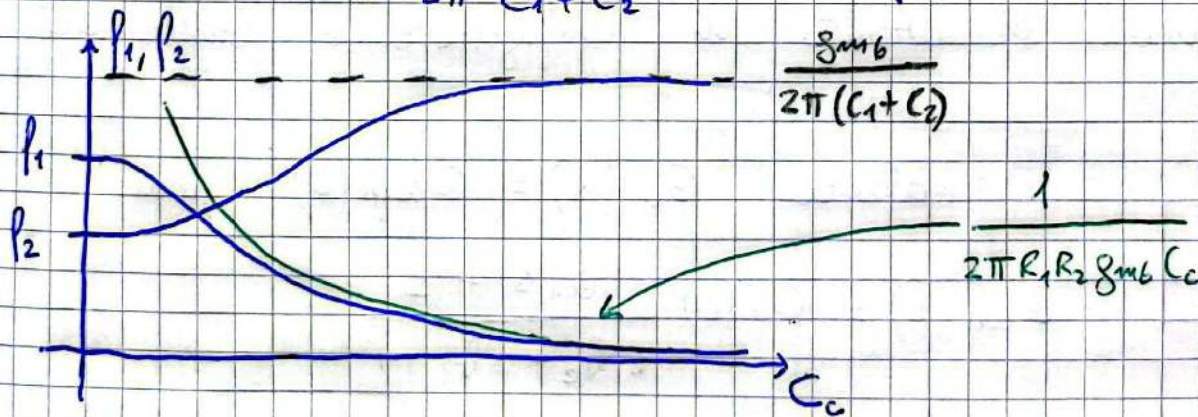
è grande:
$$p_2 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_{m6}}{C_1 + C_2}$$

Disegniamo il grafico di p_1 e p_2 in funzione di C_c .

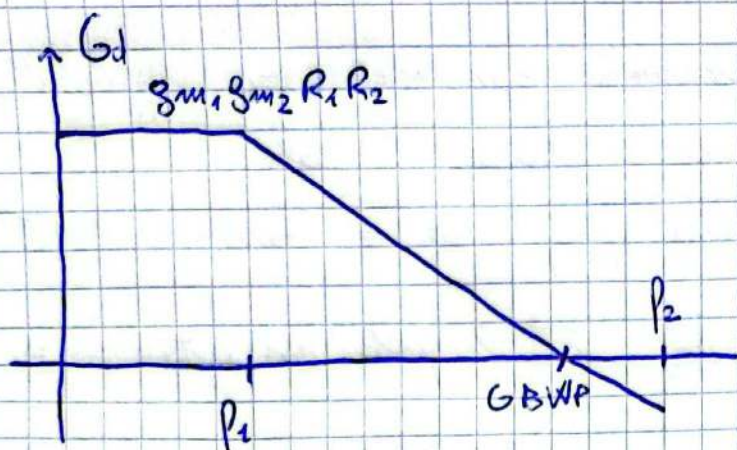
Per $C_c = 0$ (circuito aperto) avevamo già ricavato in precedenza (lezione 13) che $p_1 = 733 \text{ KHz}$ e $p_2 = 265 \text{ KHz}$ (in quella lezione p_1 l'avevamo chiamata p_3).

Aumentando C_c , dato che $p_1 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{1}{g_{m6} C_c R_1 R_2}$, p_1 diminuisce. Mentre p_2 va verso il valore

asintotico: $p_2 \approx \frac{1}{2\pi} \frac{g_{m6}}{C_1 + C_2}$ Graficamente:



Il diagramma di Bode con C_c grande è:
(cioè con p_1 e p_2 che assumono i loro valori asintotici)



Aumentando C_c , il primo polo si abbassa, il secondo polo si alza. L'obiettivo è avere $p_2 > \text{GBWP}$

$$\text{GBWP} = \frac{g_{m1} g_{m6} R_1 R_2}{2\pi g_{m6} R_1 R_2 C_c} = \frac{g_{m1}}{2\pi C_c}$$

Togliamo che

$$\text{GBWP} \leq p_2 \Rightarrow \frac{g_{m1}}{2\pi C_c} \leq \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_2)} \quad \text{da cui}$$

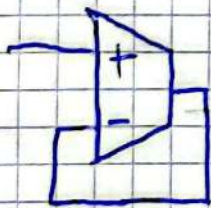
$$C_c \geq \frac{g_{m1}}{g_{m6}} (C_1 + C_2) = 6,6 \text{ pF}$$

C'è però anche lo zero da considerare. Questo ha frequenza: $p_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_c} = \frac{g_{m1}}{2\pi C_c}$ perché nel nostro

$$\text{caso } g_{m6} = g_{m1} \Rightarrow p_z = \text{GBWP}$$

Se impariamo $C_c = C_1 + C_2$, allora p_z , p_2 e GBWP sono tutti coincidenti.

Se mettiamo il circuito in configurazione buffer, cioè:



allora $G_d(s) = G_{\text{buf}}(s)$, perciò

$$G_{\text{buf}}(s) = G_d(0) \frac{a_1 s + 1}{s^2 b_2 + s b_1 + 1}$$

il polinomio al denominatore ha due radici, quindi può essere scritto come: $(1 + s\gamma_1)(1 + s\gamma_2)$. L'obiettivo ora è calcolare la fase del seguente numero complesso:

$$G_{\text{buf}}(j\omega) = G_d(0) \frac{1 + j\omega a_1}{(1 + j\omega\gamma_1)(1 + j\omega\gamma_2)}$$

$$\angle G_{\text{loop}}(j\omega) = \underbrace{\pi}_{G_d(s) < 0} + \arctan(\omega a_1) - \arctan(\omega \tau_1) - \arctan(\omega \tau_2)$$

$|\angle G_{\text{loop}}(j\omega)|$ aumenta all'aumentare di ω . $\Rightarrow$
il valore critico della frequenza è GBWP.

Quindi:

$$\angle G_{\text{loop}}(\text{GBWP}) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right)$$

$$\text{dato che } \omega \Big|_{\text{GBWP}} \cdot \tau_2 = p \Big|_{\text{GBWP}} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\omega_2} = \frac{\text{GBWP}}{p_2}$$

Il - davanti al termine $\tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right)$ si ha
perché $a_1 < 0$.

Calcoliamo ora il margine di fase: cioè quanto

$\angle G_{\text{loop}}(\text{GBWP})$ è diverso da 0.

Dato che $p_2 = p_2 = \text{GBWP}$, allora

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right) = 45^\circ \quad \text{Mentre } p_1 \ll \text{GBWP}$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_1}\right) \approx 90^\circ$$

$\angle G_{\text{loop}}(\text{GBWP}) = 0 \Rightarrow$ Il margine di fase è nullo
e la situazione è critica. Questo perché in
questo caso il segnale di ritorno dal loop è
in fase col segnale in ingresso, quindi viene
meno la retroazione negativa.

Noi vorremmo un margine di fase di almeno

60° . Questo vuol dire che:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{p_2}\right) < 30^\circ$$

8/9/25

Per ridurre il contributo dello zero nel margine

di fare, dobbiamo cercare di trasferirlo a frequenze maggiori. $f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_c}$; $GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C_c}$. Modificando C_c cambia sia f_z che $GBWP$, quindi è inutile. Abbiamo agire su g_{m6} , in particolare aumentare g_{m6} aumentando la corrente per M_6 . Supponiamo di moltiplicare la corrente I_6 di un fattore 3, in questo caso g_{m6} cresce di un fattore 3 e anche la frequenza dello zero diventa 3 volte più grande.

Berco $-\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -18^\circ$

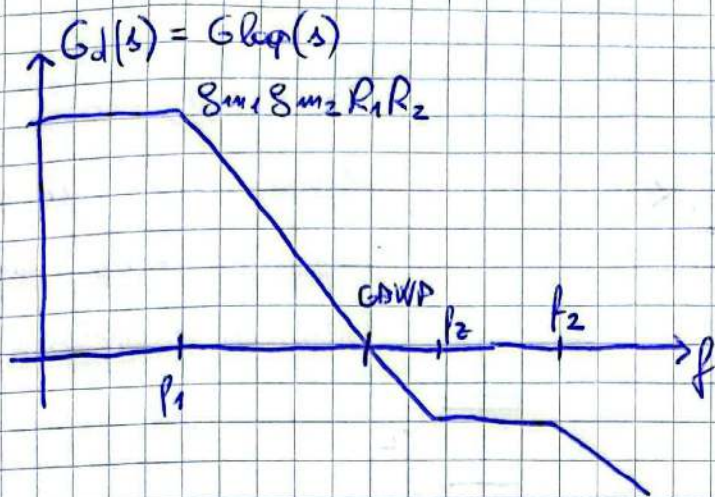
Deve quindi valere che $-\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) = -12^\circ$,
 affinché $-\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) = -30^\circ$.

$f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1+C_2)} \Rightarrow$ anche f_z è aumentato di un fattore 3. Quindi dopo aver aumentato I_6 di un fattore 3, vale che: $f_z = f_z = 3 \cdot GBWP$.

Berco se $f_z = f_z$, allora $\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) = 18^\circ$ che non va bene, perché noi vorremmo $\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{f_z}\right) = 12^\circ$.
 Abbiamo spostare il secondo polo dal $GBWP$ modificando gli altri parametri.

Se aumentiamo C_c , il $GBWP$ si sposta verso frequenze minori, anche lo zero si sposta a sinistra perché il rapporto tra zero e $GBWP$ vale $\frac{g_{m6}}{g_{m1}}$, indipendente quindi da C_c . Ma f_z non dipende da C_c , perciò f_z non cambia.

In questo caso il diagramma diventa:



Ora abbiamo:

$$\frac{GBWP}{p_2} = \frac{1}{3} \quad e$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18^\circ$$

Mentre aumenta la distanza tra $GBWP$ e

p_2 così da ridurre il termine $\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{p_2}\right)$

abbiamo modificato la corrente per M_6 e M_7 , perciò variano alcuni parametri di polarizzazione e dimensionamento del circuito.

$$I_6 = I_7 = 450 \mu A \quad g_{m6} = g_{m7} = 4,5 \text{ mA/V}$$

$$\left(\frac{W}{L}\right)_6 = \left(\frac{W}{L}\right)_7 = 3 \cdot \frac{270}{1,8} \quad C_{gs6} = 1,62 \text{ pF} \cdot 3$$

$$C_{gs7} = 3 \cdot 0,81 \text{ pF}$$

$$C_1 = C_{gs6} = 4,86 \text{ pF} \quad ; \quad p_2 = \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_2)} = 73 \text{ MHz}$$

Abbiamo fatto in modo che:

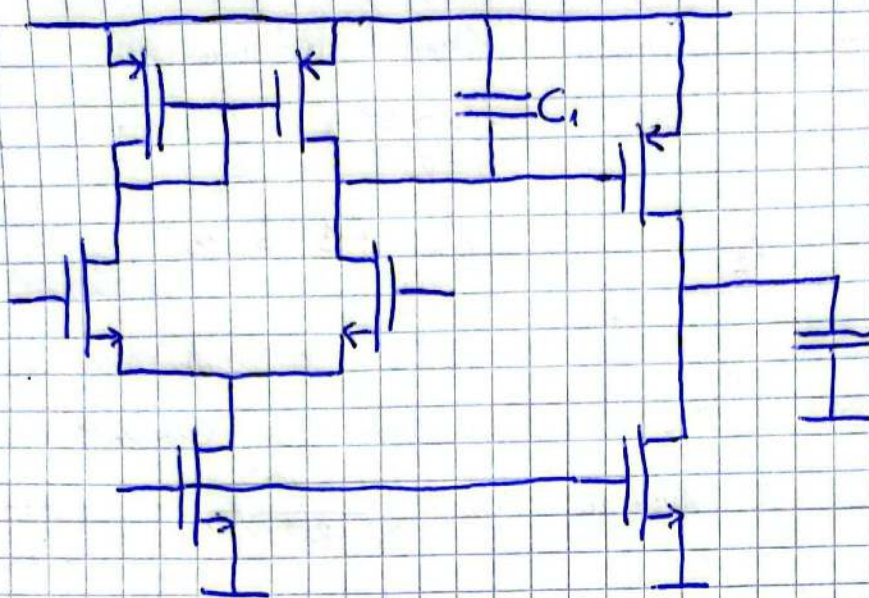
$$\tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{p_2}\right) = 12^\circ \quad \text{da cui } GBWP = 15 \text{ MHz}$$

Ora ricaviamo C_c tale da avere $GBWP = 15 \text{ MHz}$.

$$C_c = \frac{g_{m1}}{2\pi GBWP} = 16 \text{ pF} \quad \text{con questi dimensionamenti}$$

$$\phi_M = [\text{margine di fase}] = 60^\circ \quad \text{che \u00e8 accettabile.}$$

Concludiamo ora di capire il senso delle espressioni di p_1 , p_2 e p_2 :



In questo caso, senza C_c , le due capacità sono indipendenti e introducono i poli:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi C_1 R_1} \quad e$$

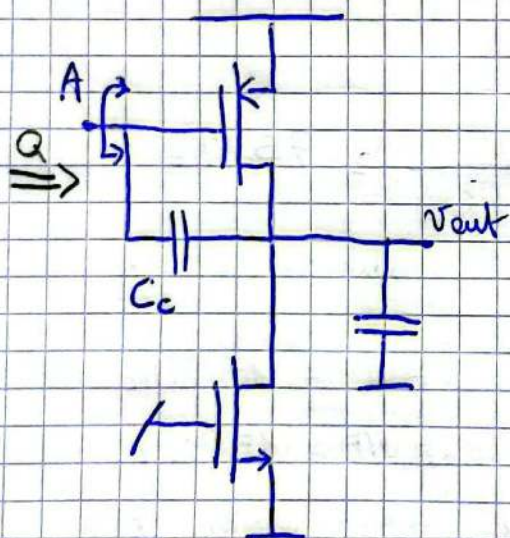
$$p_2 = \frac{1}{2\pi C_L R_2}$$

Sei abbiamo inserito C_c .

Con C_c p_1 si sposta a frequenza:

$$p_1 = \frac{1}{2\pi R_1 (C_c G_2)}$$

con G_2 guadagno del secondo stadio.



Dal nodo A si vede resistenza infinita. Che capacità si vede dal nodo A?

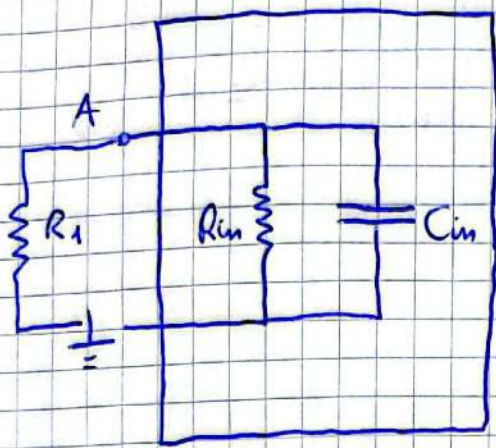
Diamo al nodo A tensione v_s . A fine transitorio la tensione all'uscita v_{out} vale:

$$v_{out} = -g_{m6} R_2 v_s$$

Però la tensione ai capi di C_c a fine transitorio vale: $v_s (1 + g_{m6} R_2)$. Però dal nodo A deve essere fornita della carica per incrementare C_c .

$$\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{C_c v_s (1 + g_{m6} R_2)}{v_s} = C_c (1 + g_{m6} R_2)$$

Però la situazione equivalente è:



dove $R_{in} \rightarrow \infty$ e

$$C_{in} = C_c (1 + g_{m6} R_2)$$

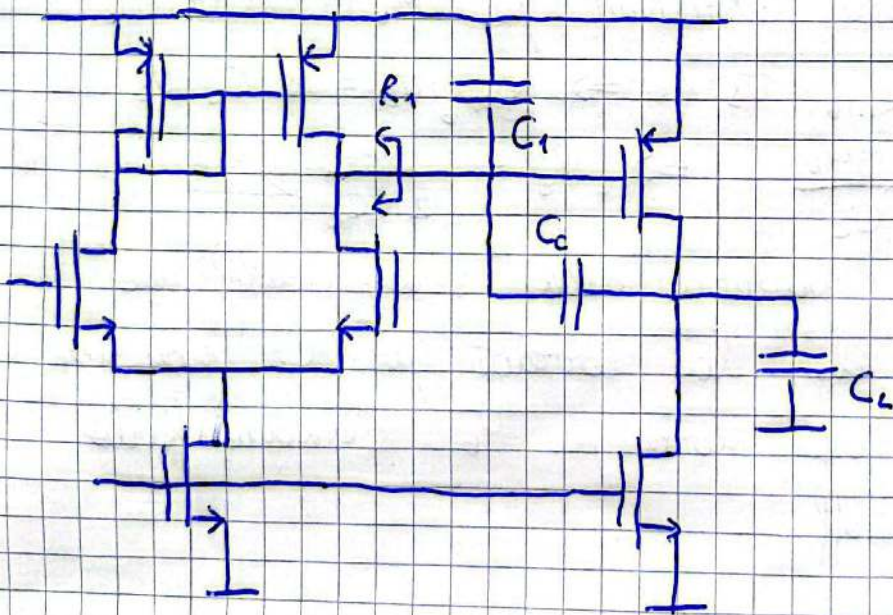
$\Rightarrow C_c$ è amplificata dal guadagno G_2 .

Il polo introdotto da C_{in} è

$$\frac{1}{2\pi C_{in} R_1} = f_1$$

Il vantaggio è che anche usando una C_c dal valore grande ma accettabile, C_{in} risulta molto più grande, avendo così il primo polo a bassa frequenza. Questo permette di avere il GBWP prima del secondo polo. Questa è chiamata compensazione polo dominante. Si sacrifica la banda per migliorare la stabilità.

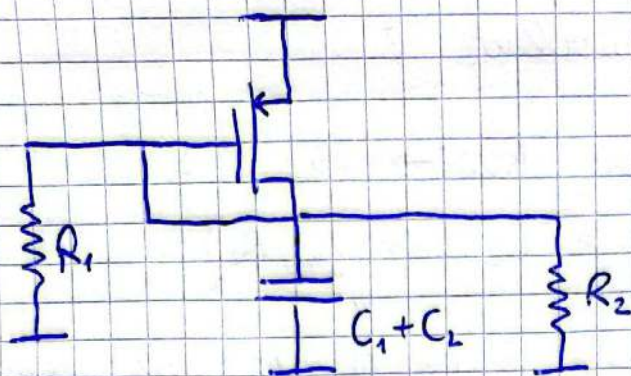
Studiamo ora il secondo polo: $f_2 \rightarrow \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_2)}$



Studiamo il circuito in un range di frequenze molto superiori a f_1 , dove f_1 dipende da C_c .

Quindi possiamo considerare C_c come un corto circuito.

In questo caso C_1 e C_2 sono in parallelo, il circuito equivalente è:



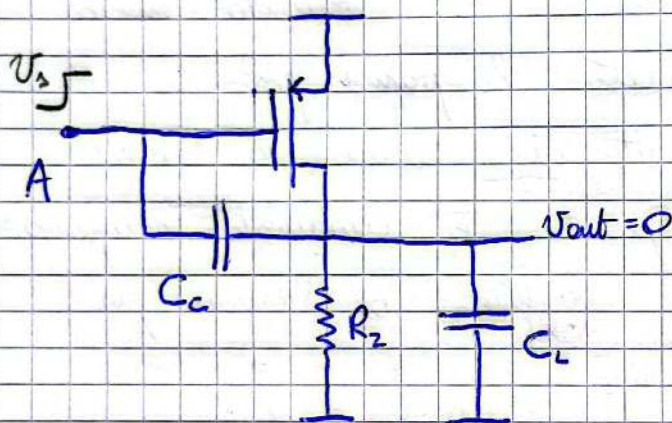
R_{eq} cioè la resistenza vista da $C_1 + C_L$ vale:

$$R_{eq} = \frac{1}{g_{m6}} \parallel R_1 \parallel R_2 \approx \frac{1}{g_{m6}}$$

Però il polo introdotto da $C_1 + C_L$ è:

$$p_2 = \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_L)}$$

Studiamo ora lo zero: consideriamo il circuito:



Ora $V_{out} = 0$.

Siamo al nodo A tensione

V_s . Però ai capi di

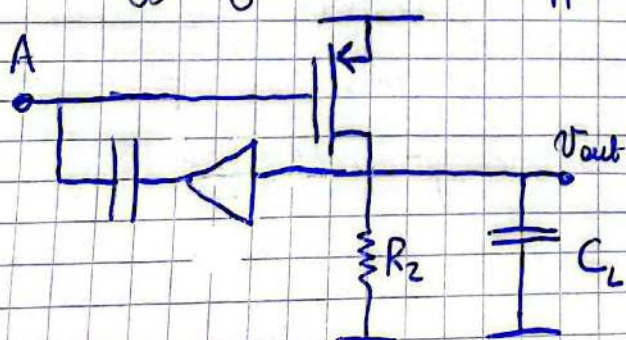
C_c c'è tensione V_s e la corrente che scorre per C_c vale: $s C_c V_s$

Questa corrente scorre interamente per M_6 . Per M_6

scorre corrente $g_{m6} V_s \Rightarrow g_{m6} V_s = s C_c V_s$

da cui $s = \frac{g_{m6}}{C_c} \Rightarrow p_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_c}$

Per annullare la presenza dello zero, dobbiamo fare in modo che la corrente per C_c non sia più la stessa che scorre per M_6 . Possiamo farlo aggiungendo un buffer:

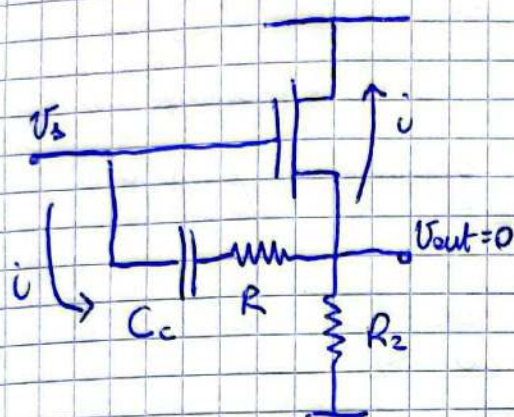


Se $V_{out} = 0$ non può scorrere corrente per M_6 e $V_A = 0$

Non viene introdotto alcuno

zero a frequenza finita.

Consideriamo il seguente caso:



Obazionando una resistenza \$R\$ in serie a \$C_c\$, modifichiamo la corrente che scorre per \$C_c\$.

$$i = \frac{V_s}{R + \frac{1}{sC_c}} = g_{m6} V_s \quad \text{Ora c'è}$$

uno zero, vediamo a che frequenza:

$$\frac{1}{g_{m6}} = R + \frac{1}{sC_c} \Rightarrow s = \frac{1}{C_c \left(\frac{1}{g_{m6}} - R \right)}$$

Se \$R = \frac{1}{g_{m6}}\$, \$p_z \rightarrow \infty\$, mi tolgo lo zero di mezzo.

Se \$R > \frac{1}{g_{m6}}\$, lo zero diventa negativo, il che è ottimo in termini di margine di fase e quindi stabilità. Se \$p_z = p_2\$, c'è cancellazione polo zero che va a migliorare il margine di fase. Una figura di merito di un amplificatore è:

$$F_o M = \frac{GBWP \cdot C_L}{I_{TOT}}, \quad \text{nel nostro caso abbiamo}$$

ottenuto:

$$F_o M = \frac{15 \text{ MHz} \cdot 5 \text{ pF}}{450 \mu\text{A} + 150 \mu\text{A}}$$

4/11/2h

Lezione 16

*Sino ad ora abbiamo assunto che il primo polo non è influenzato dalla presenza di \$R\$, chiamato nulling resistor e indicato anche con \$R_N\$.

Abbiamo verificare se f_1 non risente di R_N .

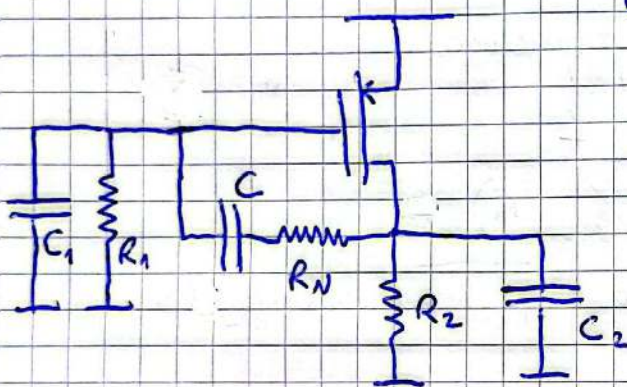
Abbiamo verificare la stessa cosa anche per f_2 .

Con la presenza di R_N i tre condensatori C_1 , C_c e C_2 diventano indipendenti $\Rightarrow$ c'è anche un terzo polo, dobbiamo verificare a quale frequenza si trova.

Verifichiamo se f_1 è influenzato da R_N .

Con il time constant method:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi [R_1 C_1 + R_2 C_2 + (R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2 + R_N) C]}$$



Avremmo calcolato che, in assenza di R_N , la resistenza vista ai capi di C valva:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2 \quad \text{Ora } R_N \text{ è in serie a}$$

R_{eq} , da cui la resistenza vista da C è $R_{eq} + R_N$.

Inciso: f_1 si calcola con il time constant method. Prendendo il polo dominante, si calcola la resistenza vista ai capi di ciascun condensatore quando gli altri sono circuiti aperti. R_1 è dell'ordine di $1/g_m$, è quindi un termine trascurabile rispetto agli altri di R_{eq} .

$\Rightarrow f_1$ non cambia con la presenza di R_N e anche il GBWP rimane lo stesso.

Calcoliamo f_3 :

$$f_3 \approx \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{C_1 R_1 // R_N} + \frac{1}{C_2 R_2 // R_N} + \frac{1}{C R_N} \right]$$

dove $R_1 // R_N$ è la resistenza vista ai capi di C_1

quando le altre capacità sono corte circuiti.

Analogamente si calcolano gli altri termini.

Sato che $R_N \ll R_1$ e $R_N \ll R_2$, allora

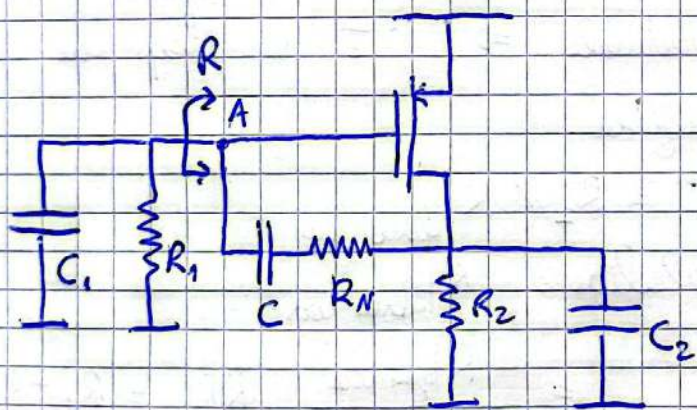
$$f_3 \approx \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{C_1 R_N} + \frac{1}{C_2 R_N} + \frac{1}{C R_N} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_N (C_1 \parallel C_2 \parallel C)}$$

Se facciamo corrispondere lo zero al GBWP per incrementare il più possibile il margine di fase,

allora $R_N = \frac{1}{g_{m1}} + \frac{1}{g_{m6}} = 13 \text{ k}\Omega$ Berio

$f_3 \approx 112 \text{ MHz}$. $\text{GBWP} = 36 \text{ MHz} \Rightarrow$ l'effetto di f_3 sul margine di fase è ridotto.

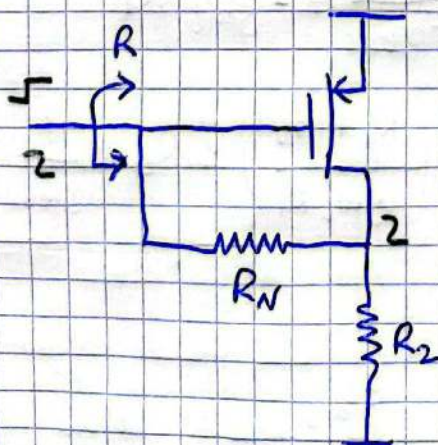
Studiamo ora f_2 :



$f_2 \gg f_1$, quindi possiamo considerare che C è un corto circuito.

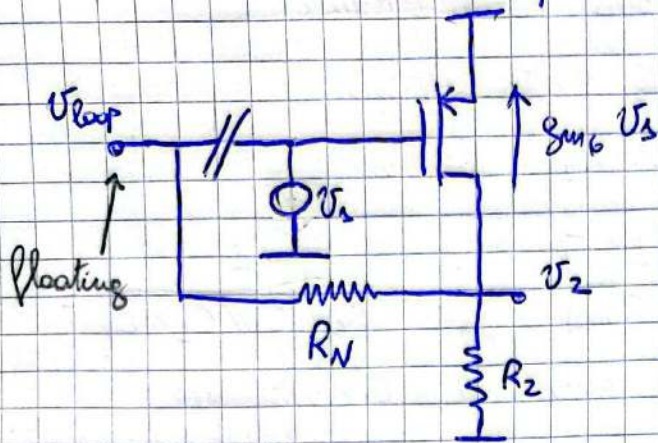
$$f_2 = \frac{1}{2\pi (C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)})}$$

$R_1^{(0)} = R_1 \parallel R$. Per effetto della retroazione il nodo A è a massa virtuale:



$$R \Big|_{\text{open loop}} = R_N + R_2$$

Per calcolare G_{loop} :



la corrente per M_6 scorre anche per R_2 .

$$V_2 = -g_{m6} R_2 V_2$$

$$V_{loop} = V_2 \Rightarrow$$

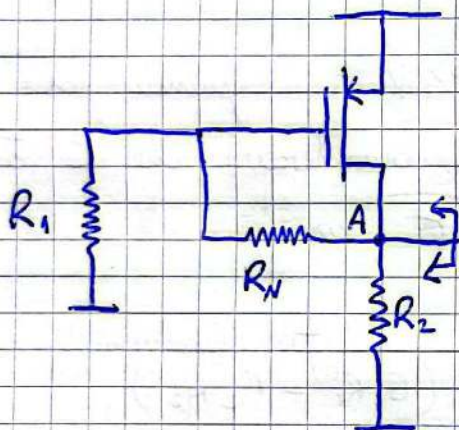
$$G_{loop} = -g_{m6} R_2$$

ovvero $R|_{closed\ loop} = \frac{R_N + R_2}{g_{m6} R_2} \approx \frac{1}{g_{m6}}$ dato che

$$R_2 \gg R_N$$

Calcoliamo ora $R_2^{(o)}$:

3/3/25



il nodo A è a massa virtuale $\Rightarrow$ c'è un loop che agisce.

$$R_2^{(o)} = R_2 \parallel R|_{closed\ loop}$$

Calcoliamo $R|_{closed\ loop}$:

$$R|_{closed\ loop} = \frac{R|_{open\ loop}}{1 - G_{loop}}; R|_{open\ loop} = R_1 + R_N$$

$$V_{loop} = -g_{m6} V_E \cdot R_1;$$

$$G_{loop} = \frac{V_{loop}}{V_E} = -g_{m6} R_1$$

$$\Rightarrow R_2^{(o)} = R_2 \parallel \left(\frac{R_1 + R_N}{g_{m6} R_1} \right) \approx R_2 \parallel \frac{1}{g_{m6}} \approx \frac{1}{g_{m6}}$$

ovvero f_2 vale:

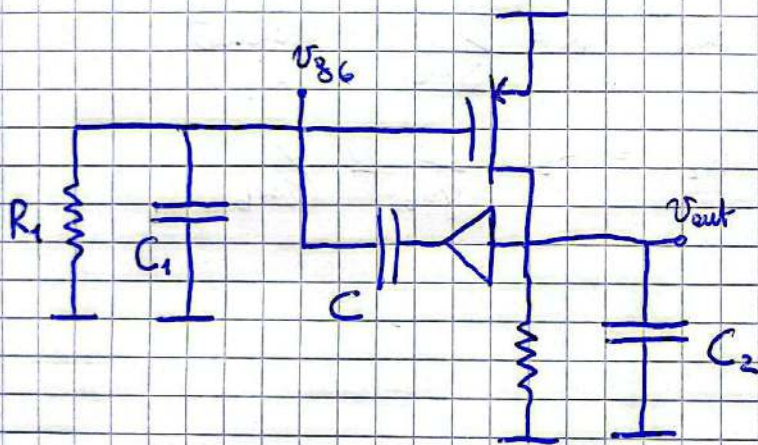
$$f_2 = \frac{1}{2\pi \left(C_1 \frac{R_N + R_2}{g_{m6} R_2} + C_2 \frac{R_1 + R_N}{g_{m6} R_1} \right)} \approx \frac{g_{m6}}{2\pi (C_1 + C_2)} \text{ anche } f_2$$

non è influenzato dalla presenza di R_v .

Studiamo ora la seguente soluzione per rimuovere lo zero: l'aggiunta di un buffer.

Il buffer blocca la corrente, che entra dall'unità del buffer e va a massa. Ma non annulla l'effetto Miller, rimane sempre la differenza di potenziale elevata ai capi di C . La corrente non raggiunge il nodo di uscita e non genera alcuno zero.

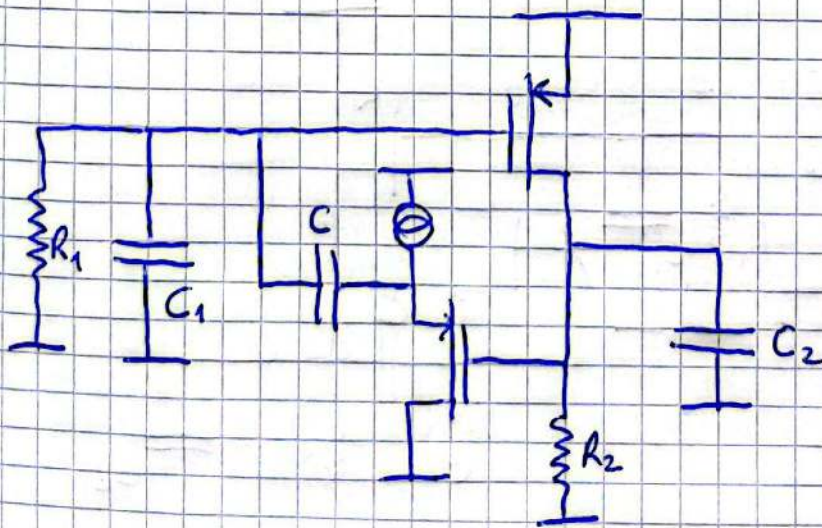
Consideriamo il circuito:



C_1 e C_2 introducono zeri a frequenza infinita. Se C è un corto circuito, V_{g6} è cortocircuitato all'uscita del buffer $\Rightarrow V_{g6} = 0$ da cui $V_{out} = 0$.

$\Rightarrow$ anche C introduce uno zero a frequenza infinita.

Il buffer è implementato con un source follower:



Supponiamo che il buffer sia ideale.

Se la tensione per due capacità è finita, allora è vincolata anche la terra. $\Rightarrow$ ci sono due poli.

C'è ancora l'effetto di Miller, quindi f_1 e GBWP rimangono invariati.

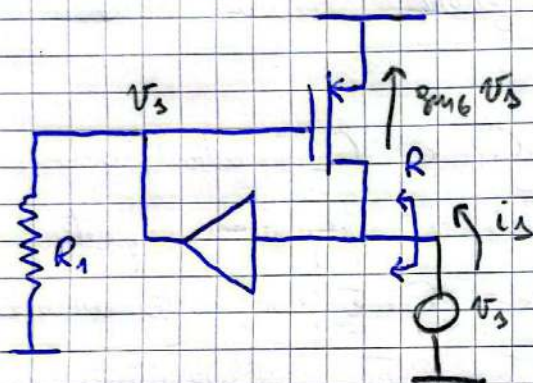
C determina il polo dominante p_1 . Per ciò per calcolare p_2 , C è un corto circuito.

Quindi:

$$p_2 = \frac{1}{2\pi(C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)})} \quad (\text{dove C è cortocircuito sempre})$$

$$R_1^{(0)} = R_1 \parallel 0 \Rightarrow R_1^{(0)} = 0$$

Calcoliamo $R_2^{(0)}$: $R_2^{(0)} = R_2 \parallel R$, dove R si calcola come:



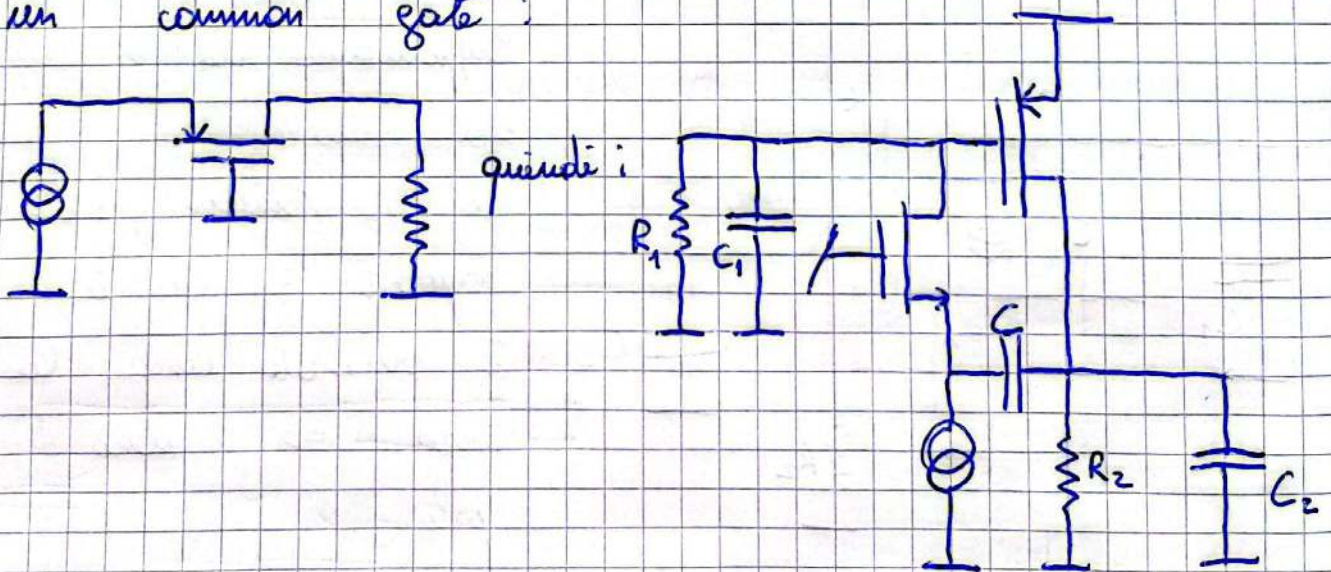
$$R = \frac{V_s}{i_s}, \quad i_s = g_{m6} V_s \text{ da cui}$$

$$R = \frac{1}{g_{m6}} \quad \text{Però}$$

$$R_2^{(0)} = R_2 \parallel \frac{1}{g_{m6}} \approx \frac{1}{g_{m6}}$$

$$\text{Però: } p_2 = \frac{g_{m6}}{2\pi C_2}$$

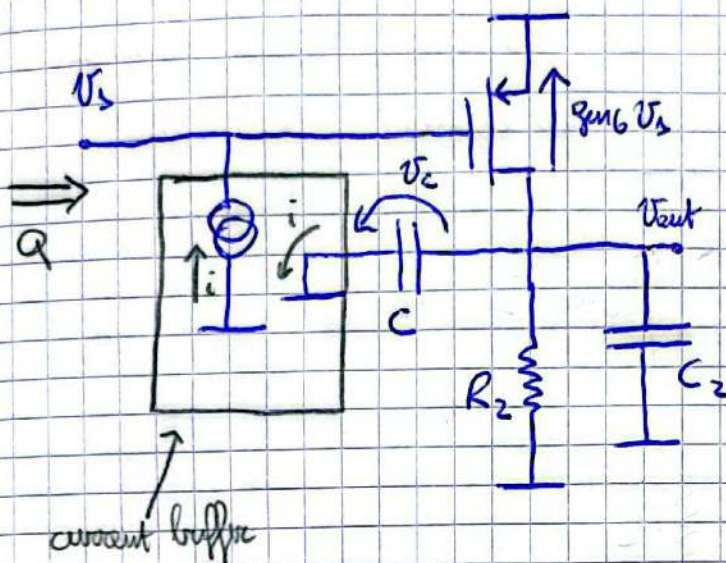
Proviamo ora a sostituire il buffer di tensione con un buffer di corrente. Questo si può implementare con un common gate:



Abbiamo innanzitutto visto se c'è ancora effetto di

Miller.

Consideriamo il circuito:



Chiamo tensione V_s e calcoliamo qual è la carica iniettata.

$$V_{out} = -g_{m6} R_2 V_s = -G_2 \cdot V_s, \text{ dove } G_2 \text{ è il guadagno del secondo stadio.}$$

$V_c = -V_{out} = g_{m6} R_2 V_s$. Chiamo Q la carica immagazzinata in C . Vale che $Q = C \cdot V_c = C g_{m6} R_2 V_s$. C'è ancora effetto Miller, la capacità equivalente è incrementata di un fattore G_2 .

$$G_{eq}(0) = G_1(0) G_2(0) = g_{m1} R_1 \cdot g_{m6} R_2, \text{ come in precedenza.}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi g_{m6} R_2 R_1 C} \text{ come in precedenza. Da cui}$$

$$GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C} \text{ uguale a prima.}$$

Se C è un corto circuito, $V_{out} = 0 \Rightarrow C$ introduce uno zero a frequenza infinita.

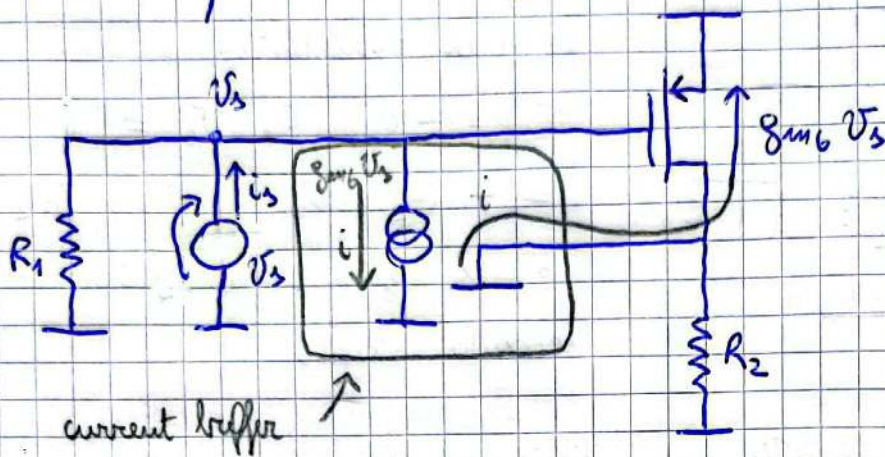
Ora C e C_2 sono in parallelo $\Rightarrow$ il circuito con C_1 , C e C_2 introduce due poli.

Abbiamo quindi calcolare f_2 :

C è responsabile di f_1 , quindi per calcolare f_2 C è cortocircuito.

$$f_2 = \frac{1}{2\pi (C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)})} \quad \text{con } C \text{ corto circuito.}$$

Se C corto circuito, τ_{out} è cortocircuitato a massa e quindi $R_2^{(0)} = 0$. Calcoliamo $R_1^{(0)}$:



$$i_s = \frac{V_s}{R_1} + g_{m6} V_s = V_s \left(\frac{1}{R_1} + g_{m6} \right) \Rightarrow$$

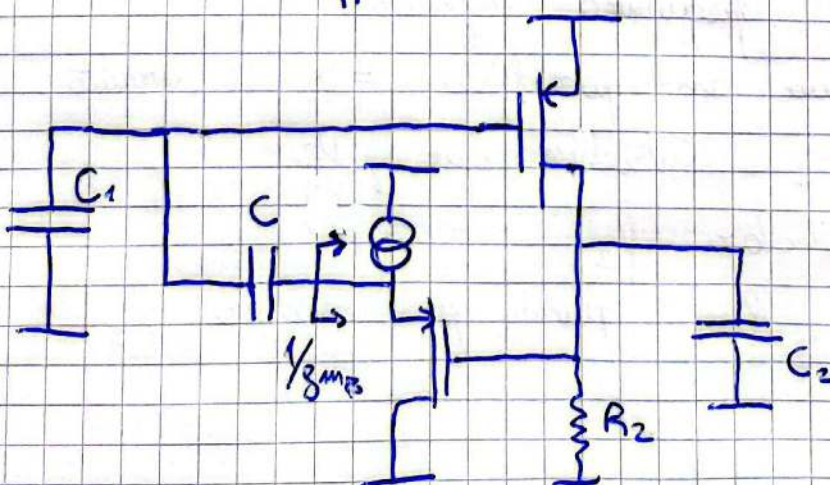
$$\frac{V_s}{i_s} = R_1^{(0)} = R_1 \parallel \frac{1}{g_{m6}} \approx \frac{1}{g_{m6}} \quad \text{Quindi:}$$

$$f_2 = \frac{g_{m6}}{2\pi C_1} \quad \text{In questo caso il secondo polo non}$$

dipende più dal condensatore di carico C_2 (o C_L).

Se C_1 è piccolo, f_2 è ad alta frequenza, il che è positivo.

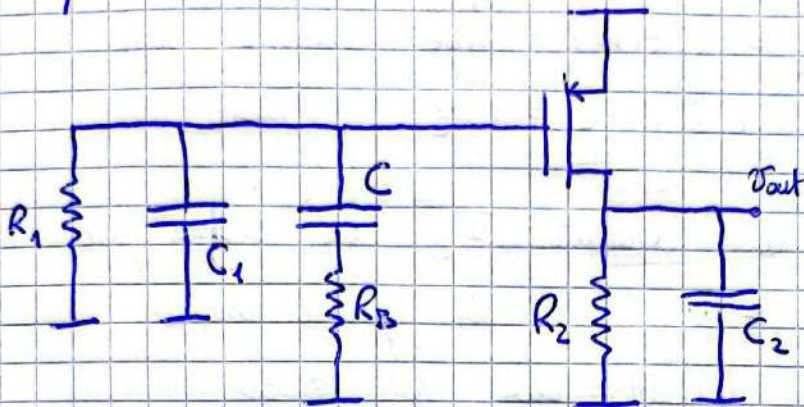
Studiamo ora i circuiti con buffer di tensione e buffer di corrente, tenendo conto delle non idealità. Buffer di tensione:



Considerando la presenza di $1/g_{m6}$, ora i tre condensatori sono indipendenti. Inoltre in questo caso C

aggiunge uno zero a frequenza finita.

Per calcolare lo zero consideriamo il seguente circuito equivalente:



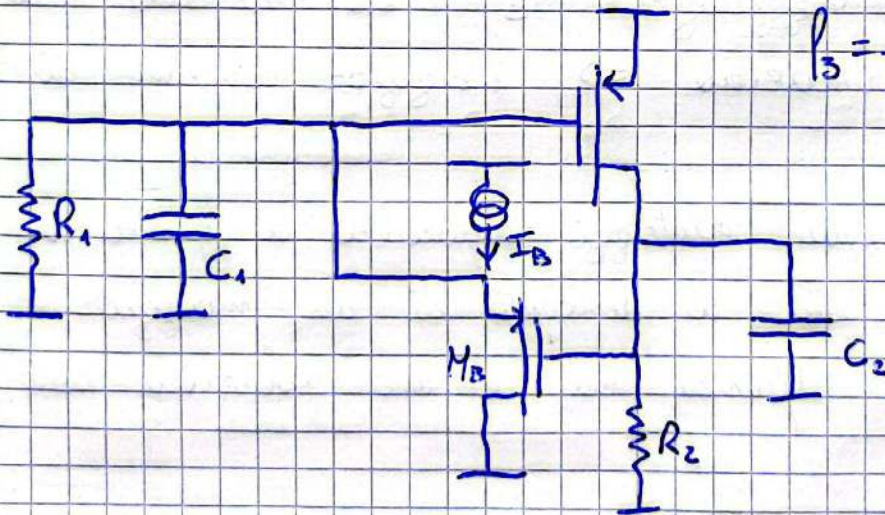
Se $V_{out} = 0$, allora per R_2 non scorre corrente, e non move neppure M_6 . Quindi $v_{gs} = 0$, da cui

$$\frac{1}{sC} + R_B = 0 \quad \text{e} \quad s = -\frac{1}{R_B C}$$

Quindi lo zero

è negativo a frequenza: $\frac{g_{mB}}{2\pi C}$ ($R_B = \frac{1}{g_{mB}}$)

La rete aggiunge anche un terzo polo che dobbiamo calcolare. Per calcolare p_3 , C è un corto circuito. Considero il circuito:



$$p_3 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{C_1 R_1^{(2)}} + \frac{1}{C_2 R_2^{(1)}} \right)$$

$$R_1^{(2)} = \frac{1}{g_{mB}}$$

$$R_2^{(1)} = R_2$$

Quindi
$$p_3 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{g_{mB}}{C_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right)$$

Possiamo posizionare il GBWP, il secondo polo e lo zero tutti alla stessa frequenza. In questo modo

c'è cancellazione polo-zero. Nel nostro caso possiamo dimensionare la corrente di polarizzazione di entrambi gli stadi a $150 \mu A$, in questo modo $g_{m6} = g_{m1}$.
 È quindi affinché $f_z = GBWP$ deve valere che

$$\frac{g_{m6}}{2\pi C_2} = \frac{g_{m1}}{2\pi C_1}$$
 da cui $C = C_2$. Inoltre

debiamo dimensionare la corrente I_B che scorre per M_B tale che $g_{m_B} = g_{m1}$, in questo modo
 $f_z = f_z$ e si ha cancellazione polo zero.

Quindi: $I_1 = 75 \mu A$; $V_{ov1} = 0,1 V$; $I_6 = 150 \mu A$
 e $V_{ov6} = 0,2 V \Rightarrow g_{m1} = g_{m6}$.

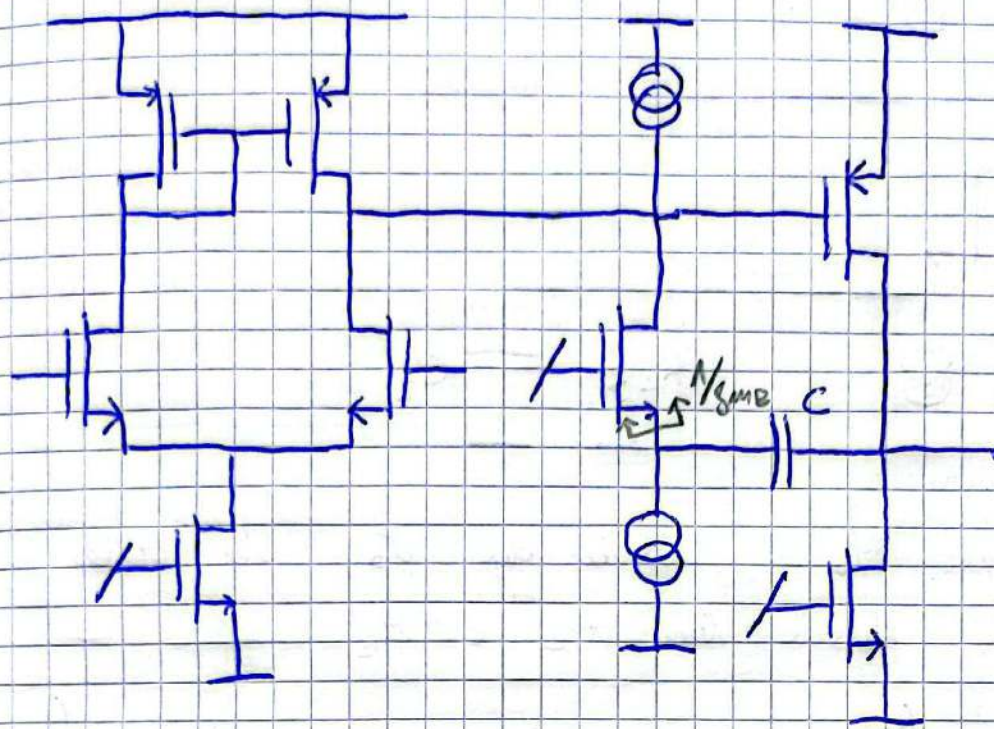
Però invece $V_{ov2} = 0,1 V$ e $I_B = 75 \mu A$.

In questo modo $g_{m_B} = g_{m6} = g_{m1}$.

Il contro di questa soluzione con il buffer è che abbiamo dovuto aggiungere M_B , che ha una sua corrente di polarizzazione $\Rightarrow$ maggior consumo di potenza.

Questa soluzione presenta vantaggi comparabili a quella con il nulling resistor, ma a dispetto di un maggior consumo di potenza. Quindi non è una soluzione così vantaggiosa.

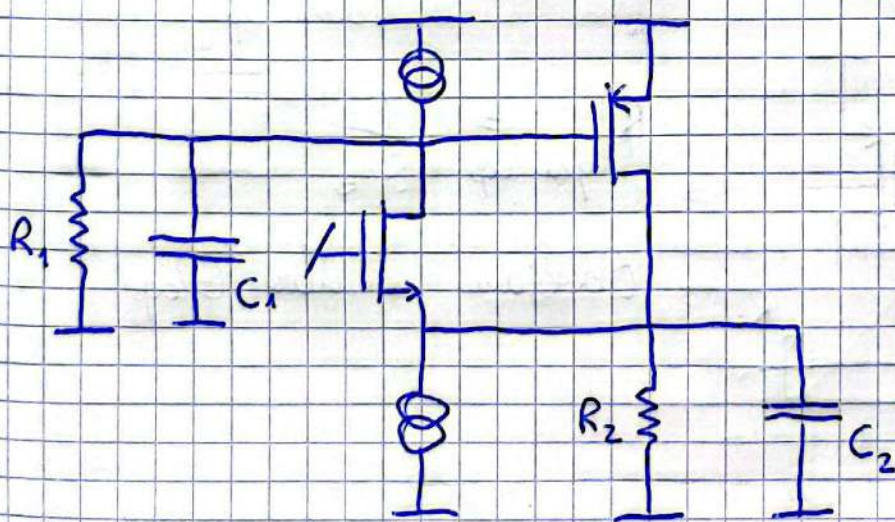
Studiamo invece il caso con il buffer di corrente, che ha il pregio di avere f_z indipendente dal carico capacitivo. Consideriamo quindi il circuito:



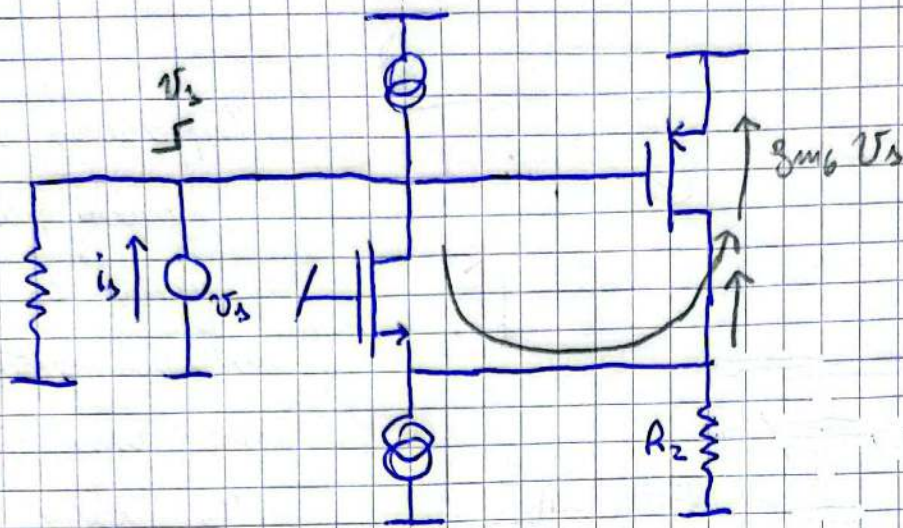
Supponiamo che z_{oB} molto grande e quindi la resistenza vista dal source di M_B sia $\frac{1}{g_{mB}}$

Connesso al nodo di uscita c'è C in serie a $\frac{1}{g_{mB}}$. Questo genera uno zero negativo a frequenza $f_z = \frac{g_{mB}}{2\pi C}$.

Calcoliamo ora f_z e f_p . C è un corto circuito, consideriamo quindi il circuito:



Calcoliamo prima $R_1^{(0)}$:



La corrente per M_6 generata da v_s , che vale $g_{m6} v_s$ si divide tra R_2 e M_B .

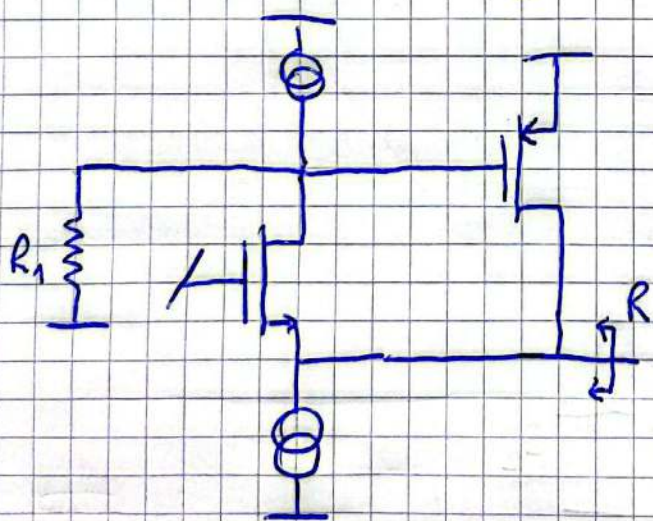
$$i_B = g_{m6} v_s \frac{R_2}{\frac{1}{g_{mB}} + R_2} \approx g_{m6} v_s \text{ dato che } R_2 \gg \frac{1}{g_{mB}}$$

Beninteso quasi tutta la corrente di M_6 scorre per M_B .

$$i_s = \frac{v_s}{R_1} + g_{m6} v_s \approx g_{m6} v_s \Rightarrow \frac{v_s}{i_s} = \frac{1}{g_{m6}}$$

$$\text{da cui } R_1^{(0)} \approx \frac{1}{g_{m6}}$$

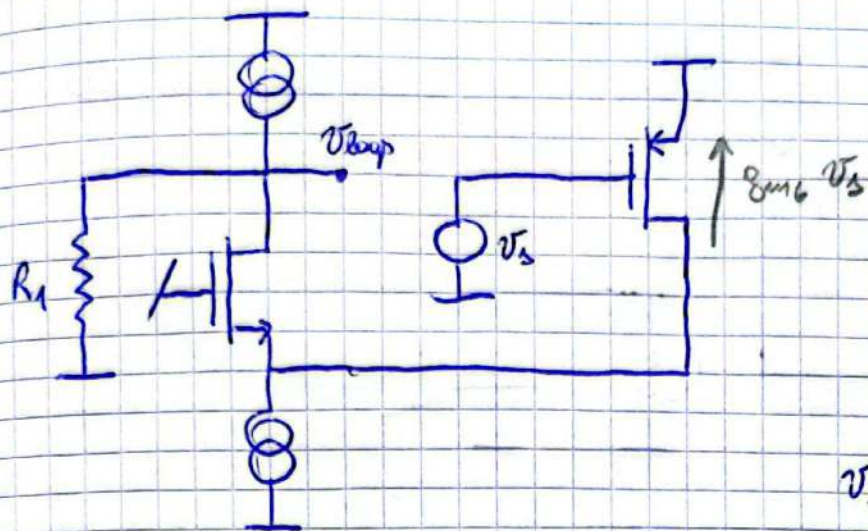
$$\text{Calcoliamo ora } R_2^{(0)} : R_2^{(0)} = R_2 \parallel R \Big|_{\text{closed loop}}$$



$$R \Big|_{\text{open loop}} = \frac{1}{g_{mB}}$$

Abbiamo calcolato G_{loop}

Per calcolare G_{loop} considero il circuito:



Per M_6 si genera corrente $g_{m6} v_s$, questa scorre interamente per R_1 da cui:

$$V_{out} = -g_{m6} R_1 v_s \text{ e}$$

quindi $G_{olap} = -g_{m6} R_1$.

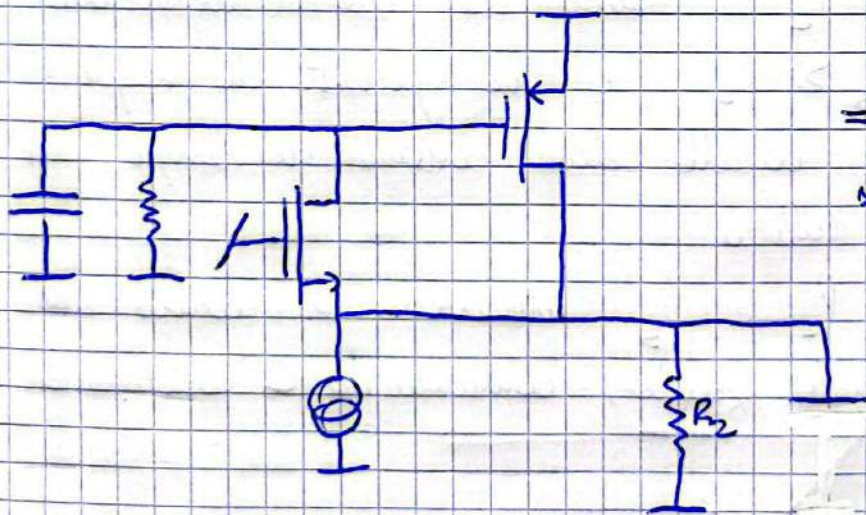
In definitiva: $R_2^{(b)} = R_2 \parallel \frac{1}{g_{mB} g_{m6} R_1} \approx \frac{1}{g_{mB} g_{m6} R_1}$

Per p_2 ha espressione:

$$p_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{C_1 \frac{1}{g_{m6}} + C_2 \frac{1}{g_{mB} g_{m6} R_1}} \right] \approx \frac{g_{m6}}{2\pi C_1}$$

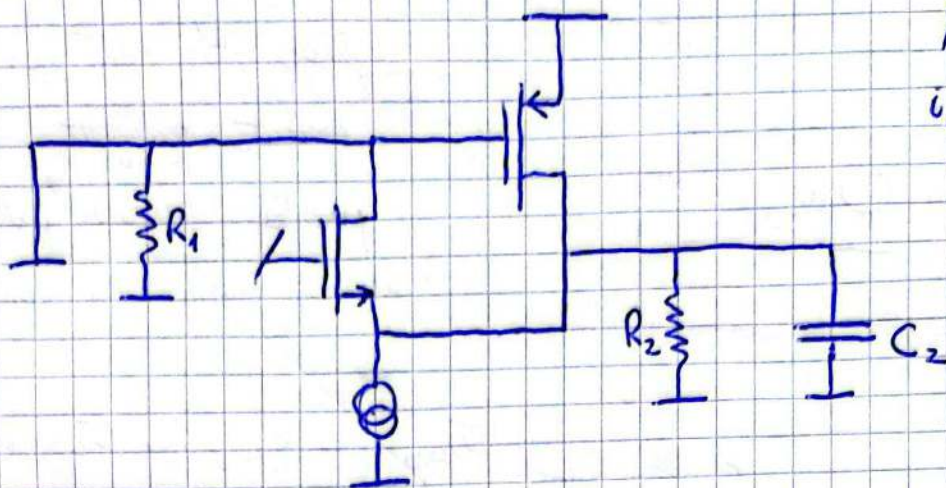
Calcoliamo ora p_3 : C è corto circuito.

Calcolo $R_1^{(2)}$:



$V_{gsB} = 0 \Rightarrow i_B = 0$
 $\Rightarrow C_1$ si può considerare solo su R_1 e
 $R_1^{(2)} = R_1$.

Calcoliamo ora $R_2^{(1)}$:



M_6 è aperto $\Rightarrow$
 $i_b = 0$.

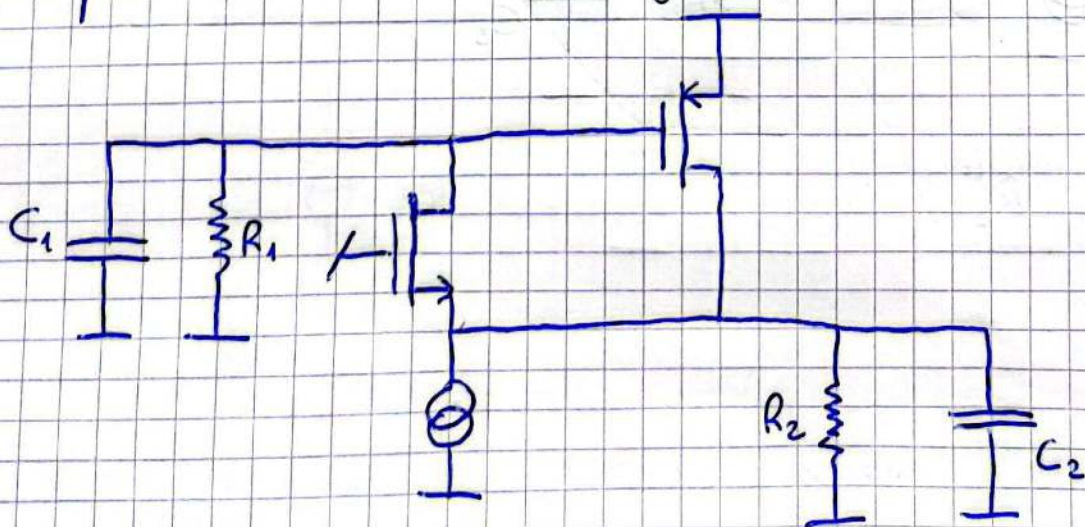
Quindi $R_2^{in} = R_2 \parallel \frac{1}{g_{mB}} \approx \frac{1}{g_{mB}}$. Quindi l'espressione di f_3 è: $f_3 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{g_{mB}}{C_2} \right] \approx \frac{g_{mB}}{2\pi C_2}$

Quindi abbiamo trovato che: $f_2 = \frac{g_{mb}}{2\pi C_1}$ e

$f_3 = \frac{g_{mB}}{2\pi C_2}$. Svolgendo i calcoli numerici risulta

però che $f_3 < f_2$. vuol dire che l'assunzione che dice che $f_3 \gg f_2$ e che permette di semplificare i conti del calcolo delle costanti di tempo, in realtà non è valida.

Però calcoliamo f_2 e f_3 attraverso il calcolo del polinomio di secondo grado, considerando C cortocircuito.



Dobbiamo ricavare il polinomio $s^2 b_2 + s b_1 + 1$.

Calcoliamo b_1 :

$$b_1 = C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} \quad R_1^{(0)} = \frac{1}{g_{m6}};$$

$$R_2^{(0)} = \frac{1}{g_{mB} g_{m6} R_1} \quad \text{Queste si trovano con calcoli analoghi}$$

a quelli già fatti in precedenza.

$$b_2 = C_1 C_2 R_1^{(0)} R_2^{(1)} \quad R_1^{(0)} = \frac{1}{g_{m6}}, \quad R_2^{(1)} = \frac{1}{g_{mB}}$$

$$\Rightarrow b_2 = C_1 C_2 \frac{1}{g_{m6} g_{mB}}$$

Le radici del polinomio appena ricavato potrebbero essere complesse coniugate. E questo è il caso.

Però possiamo riscrivere il polinomio come:

$$s^2 b_2 + s b_1 + 1 = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1 \quad \text{Quindi:}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{b_2}} = \sqrt{\frac{g_{m6} g_{mB}}{C_1 C_2}} \quad \text{e per calcolare } Q:$$

$$\frac{1}{\omega_0 Q} = b_1 \quad b_1 = \frac{C_1}{g_{m6}} + \frac{C_2}{g_{mB} g_{m6} R_1} \approx \frac{C_1}{g_{m6}}$$

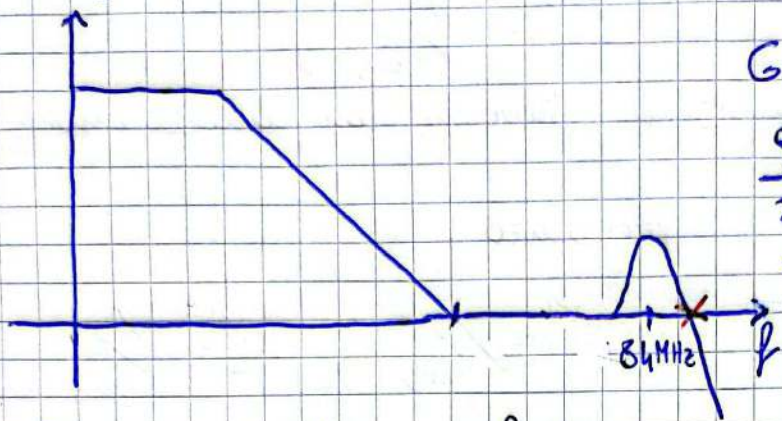
$$\text{Quindi: } \frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{C_1}{g_{m6}} \Rightarrow Q = \frac{g_{m6}}{C_1} \sqrt{\frac{C_1 C_2}{g_{m6} g_{mB}}} =$$
$$= \sqrt{\frac{g_{m6}}{g_{mB}} \frac{C_2}{C_1}}$$

$$\text{Abbiamo che: } I_1 = 75 \mu\text{A}; \quad I_B = 75 \mu\text{A}; \quad I_6 = 150 \mu\text{A};$$
$$V_{ov1} = V_{ovB} = 0,1 \text{ V}; \quad V_{ov6} = 0,2 \text{ V}. \quad \text{Quindi:}$$

$$g_{m1} = g_{m6} = g_{mB} = 1,5 \text{ mA/V}$$

$$\text{Quindi } \omega_0 = 8 \text{ kHz e } Q = 1,76. \quad \text{Dato che}$$

$Q > 0,5$, i due poli sono complessi coniugati.
 Diagramma di Bode:



$GBWP = f_z$, infatti

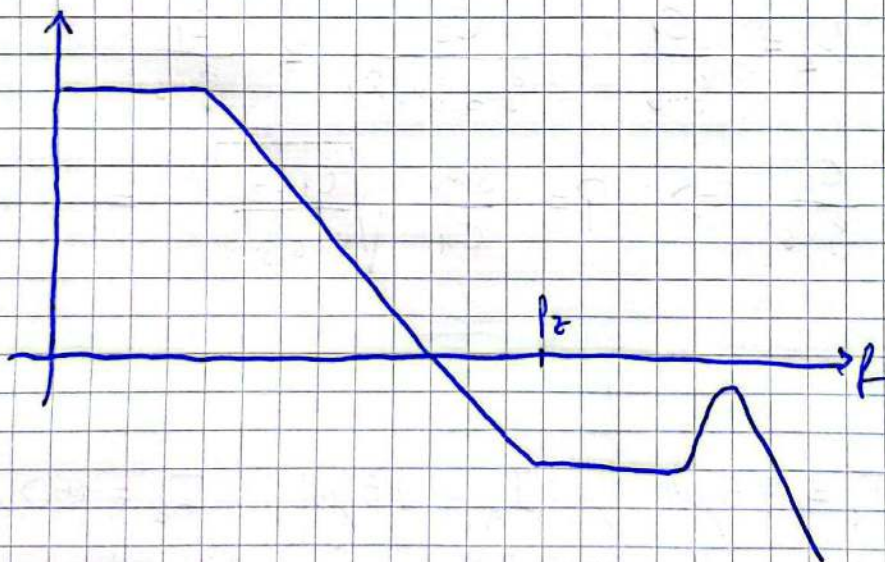
$$\frac{g_{m1}}{2\pi C} = \frac{g_{mB}}{2\pi C} \quad \text{in quanto}$$

$$g_{m1} = g_{mB}$$

Questa risposta in frequenza non è accettabile, perché il margine di fase va calcolato nell'ultima frequenza dove il guadagno è positivo, in questo caso dove c'è la **X rossa**, sopra gli 84 MHz.

Il segno rosso è dopo i due poli c.c. $\Rightarrow$ sicuramente il margine di fase non va bene.

Quello che dobbiamo fare è trascinare lo zero a destra del GBWP, in modo da avere:



E dobbiamo fare in modo che il picco causato dai due poli c.c. non tocchi l'asse 0 dB.

Dobbiamo quindi aumentare la corrente per M_B . Questo fa sì che anche W_0 aumenti, quindi aumenta la frequenza dei poli c.c. Mentre diminuisce Q ,

vuol dire che l'ampiezza del picco diminuisce, con
quindi rischio minore che il picco intersechi l'asse
0 dB.

Faccendo i conti si ottengono i seguenti dimensionamenti
ottimali: $I_B = 120 \mu A$ anziché $75 \mu A$.

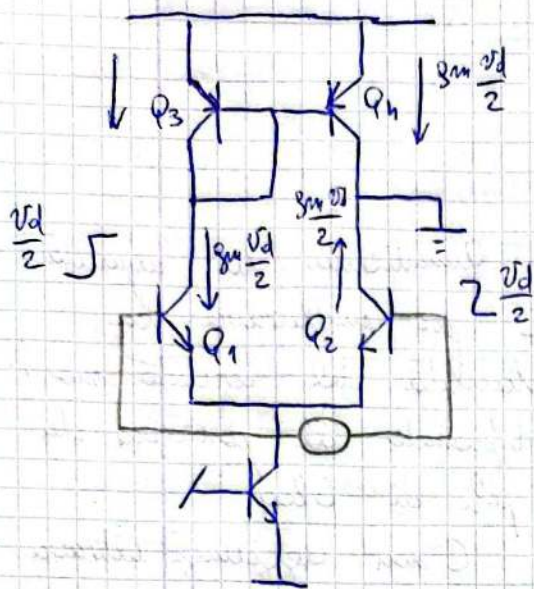
5/11/24

Lezione 17

Studiamo lo stadio differenziale realizzato con i
BJT.

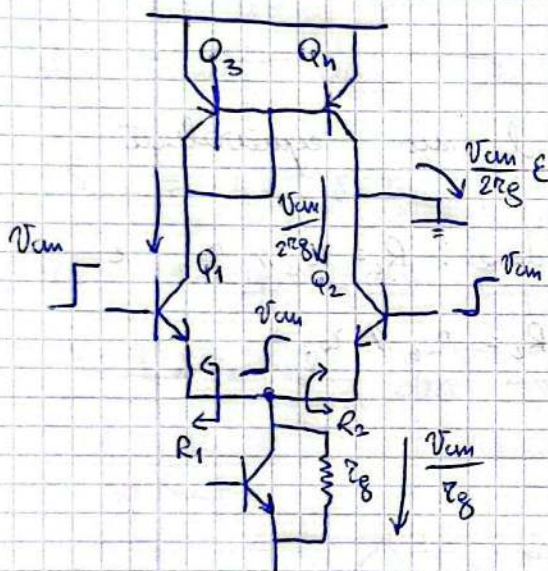
Usiamo il teorema di Norton per studiare il guadagno?

18/11/24



lo stadio è quasi simmetrico, per la tensione V_{DS} dei due transistori supponiamo sia la stessa pari a $\frac{v_d}{2}$. Per effetto dello specchio di corrente anche per Q_1 scorre corrente pari a $g_m v_d/2$.
La corrente totale in uscita $i_{cc} = g_m v_d$.

Per il trasferimento di modo comune:



Al primo ordine di approssimazione non scorre corrente in uscita e $i_{cc} = 0$.

Al secondo ordine scorre una corrente pari a $\frac{v_{cm}}{2r_g}$, la porzione che in realtà scorre per il corto circuito in uscita vale:

$$\frac{v_{cm}}{2r_g} \cdot \epsilon \quad \text{porzione dovuta alla asimmetria dei due rami.}$$

$$\epsilon = \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} + \frac{1}{g_{m3} r_{o1}} \quad \text{Al primo ordine =}$$

buio è causato dal fatto che parte della corrente per Q_3 non viene speculari per Q_1 perché non scorre nel canale di Q_3 ma scorre per r_{o3} . Il secondo contributo è dovuto alla differenza tra R_1 e R_2 .

Nel caso dei BJT, questo termine ϵ è trascurabile perché:

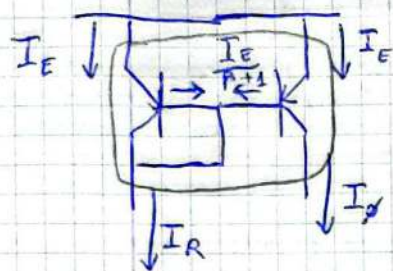
- nei npn transistor r_o è più alta rispetto a quella dei MOSFET, questo perché nei BJT $V_A \approx 100$.
- Mentre nei pnp transistor $V_A \approx 10V$.

Al primo ordine di approssimazione $\mu = g_m r_o = \frac{I_c}{V_{th}}$ $\frac{V_A}{I_c} = \frac{V_A}{V_{th}} = \frac{100V}{25mV} = 4000$ che è un valore molto alto.

Anche il valore μ nei pnp è alto e rende il termine

$\frac{1}{g_{m3} r_{o3}}$ trascurabile.

Quindi i due termini scritti sono rilevanti per ϵ .
 Il contributo più rilevante per ϵ è dovuto al valore di β dello specchio. Gli mpm hanno un valore di β di 200, ma i pmp ce l'hanno di 40.



Nel caso dei BST è necessaria una corrente di base.

I_R non è uguale a I_E , infatti $I_R > I_E$ mentre $I_D < I_E$. Quindi a causa della corrente di base $I_R \neq I_D$.

Calcoliamo i bilanci di corrente: la corrente entrante nella superficie chiusa a matita vale $2I_E$. La corrente uscente è $I_D + I_R$. Deve valere che:

$$2I_E = I_D + I_R$$

$$I_D = I_E \left(1 - \frac{1}{\beta+1}\right) = I_E \frac{\beta}{\beta+1} \Rightarrow I_E = \frac{\beta+1}{\beta} I_D \quad \text{Però:}$$

$$2I_D \frac{\beta+1}{\beta} = I_D + I_R \Rightarrow I_R = I_D \left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) \quad \text{da cui}$$

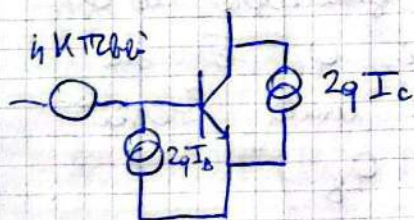
$$I_D = I_R \frac{1}{1 + 2/\beta} \quad \text{Se } 2/\beta \text{ è piccolo, si può approssi-}$$

mare dicendo che: $I_D \approx I_R \left(1 - \frac{2}{\beta}\right)$. Però in definitiva possiamo scrivere che:

$$\epsilon = \frac{1}{g_{m3} r_{o3}} + \frac{1}{g_{m3} r_{o1}} + \frac{2}{\beta} \quad \text{dove il termine dominante è } \frac{2}{\beta}, \text{ e } \beta \text{ è riferito al transistor pmp.}$$

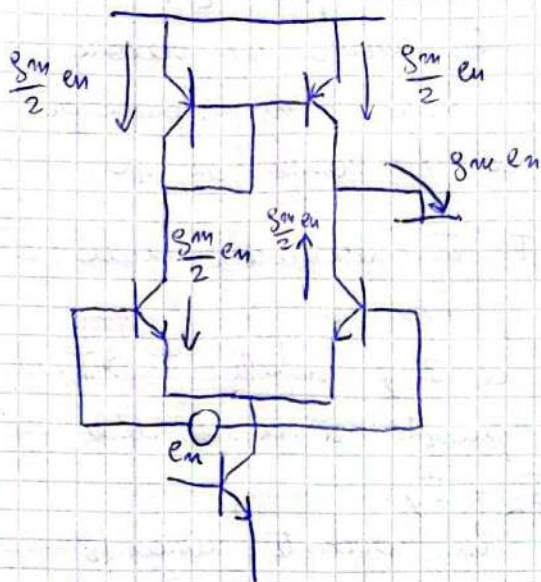
$$\text{Si ricava che: } CHRR = \frac{2g_m r_g}{\epsilon} \quad \text{dove } \epsilon \approx \frac{2}{\beta_{pmp}}$$

Studiamo il rumore. Modello del rumore di un BST:



Per gli mpm il termine r_{be} vale circa 250 Ω , per i pmp vale circa 10 Ω . Questo per la resistenza nel percorso tra base ed emettitore.

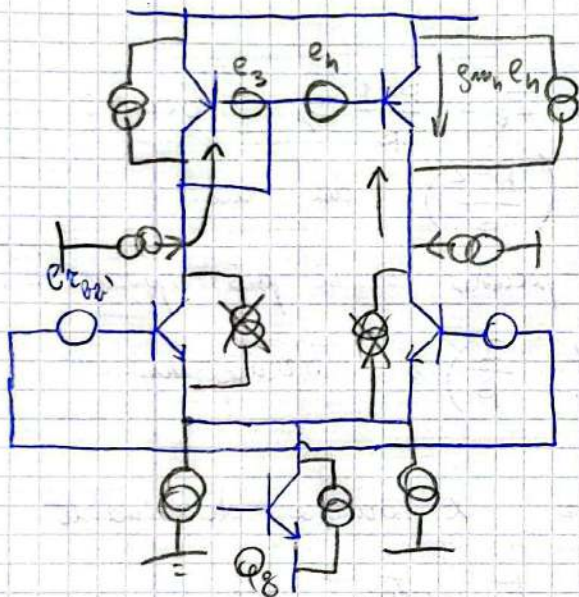
Consideriamo prima lo stadio differenziale privo di rumore, con un input referred voltage noise e_n e l'uscita cortocircuitata a massa.



Con un generatore differenziale e_n , $i_{cc} = g_m e_n$.

In termini di rumore questa vale $S_v g_m^2$.

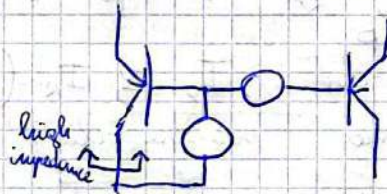
Consideriamo ora il circuito reale:



Primo contributo: $e_{n,cc} \cdot g_{m1}$

Contributo di $e_{n,cc}$: $e_{n,cc}^h g_{m1}$

Per calcolare il contributo di e_3 possiamo usare lo splitting theorem facendo in questo modo:



Il nodo di collettore è ad alta impedenza, quindi il generatore tra base e collettore è flottante e non ha alcun effetto.

L'altro generatore ha lo stesso effetto di e_n di corrente. Usiamo lo splitting anche per il generatore di Q_1 .

Il generatore connesso all'emettitore di Q_1 è di modo comune quindi non ha effetti sull'uscita. Stessa cosa per il generatore di rumore di Q_8 .

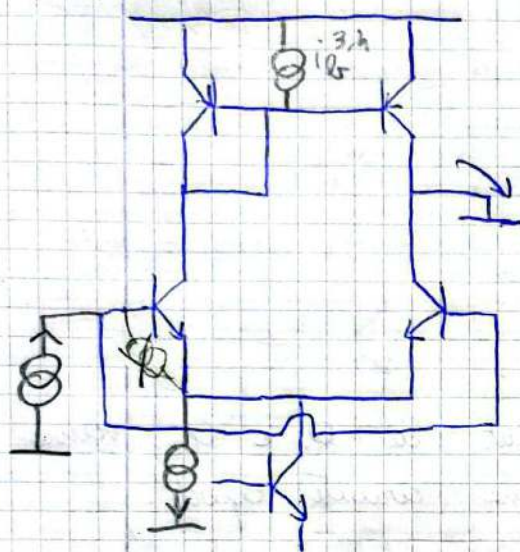
La corrente di collettore di Q_1 va per Q_3 e viene replicata in uscita. Stesso discorso per Q_2 .

La corrente del generatore di collettore di Q_3 passa per Q_4 , viene replicata su Q_1 e va in uscita.

La corrente del generatore di collettore di Q_4 va

direttamente in uscita.

Studiamo ora gli effetti delle correnti di base:
 dobbiamo calcolare il contributo al rumore di tensione
 $\Rightarrow$ cortocircuitiamo tra loro gli ingressi.



Proviamo a splittare il generatore
 base-emettitore di Q_1 .
 Entrambi i generatori sono di modo
 comune e non hanno effetti nell'uscita. Stessa cosa per Q_2 .

Il trasferimento di $i_b^{3,4}$ vale:

$$i_{cc} = i_b^{3,4} \cdot \frac{g_{m1}}{g_{m3}}, \text{ ma } g_{m3} = g_{m1}$$

$$\Rightarrow i_{cc} = i_b^{3,4}$$

Quindi in definitiva:

$$i_{cc} = e_{r_{bb'}}^{1,2} g_{m1} + e_{r_{bb'}}^{4,3} g_{m1} + i_c^{1,2,3,4} + i_b^{3,4}$$

ora al rumore:

$$4KT r_{bb'}^{(n)} \cdot 2 g_{m1}^2 + 8KT r_{bb'}^{(r)} g_{m1}^2 + 4(2qI_c) + \frac{2(2q \frac{I_c}{\beta_F})}{2(2qI_B)}$$

Vale che:

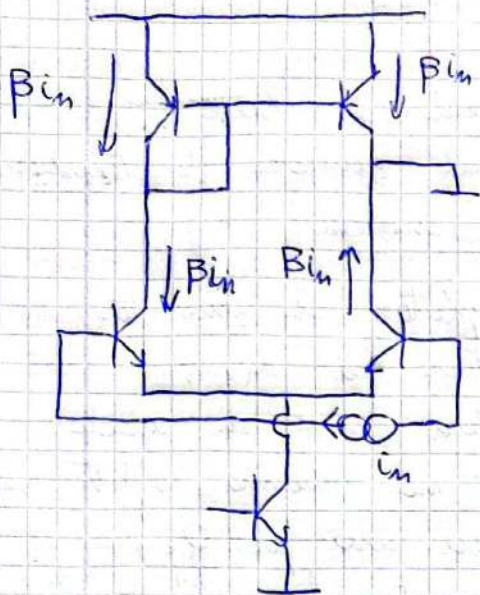
$$\underbrace{S_v g_{m1}^2}_{\text{calcolato con il circuito ideale}} = \underbrace{8KT r_{bb'}^{(n)} g_{m1}^2 + 8KT r_{bb'}^{(r)} g_{m1}^2 + 8qI_c + 4q \frac{I_c}{\beta_F}}_{\text{calcolato con il circuito reale}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_v = 8KT r_{bb'}^{(n)} + \underbrace{8KT r_{bb'}^{(r)}}_{\text{trascurabile}} + \frac{8qI_c}{g_{m1}^2} + \underbrace{\frac{8qI_c}{g_{m1}^2 \beta_F^2}}_{\text{trascurabile}} \quad \text{Borio:}$$

$$S_v = 8KT \left(r_{bb'}^{(n)} + \frac{8qI_c}{8KT \frac{I_c}{KT/q} g_{m1}} \right) = 8KT \left(r_{bb'}^{(n)} + \frac{1}{g_{m1}} \right)$$

Calcoliamo ora il rumore di corrente S_I .

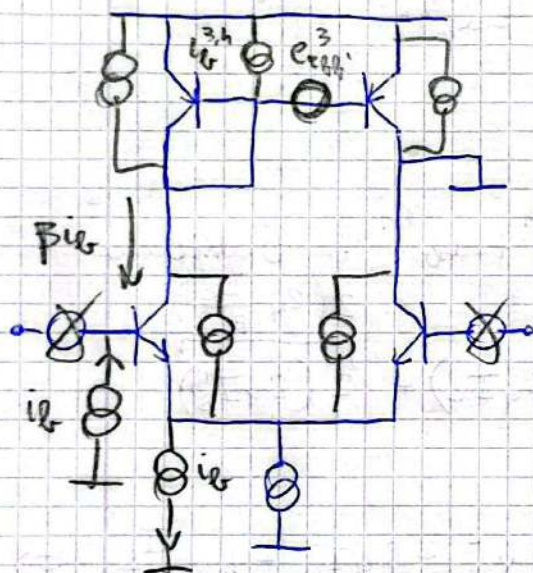
Sul circuito ideale:



Circuito reale:

In unità si ha una corrente pari a $2\beta i_n$.

Quindi si ha $S_I \propto \beta^2$



Ora gli input di Q_1 e Q_2 vanno lasciati come circuiti aperti.

I generatori di tensione connessi alla base non hanno effetto perché le basi sono lasciate fluttuanti.

Come prima i generatori di Q_3 e Q_n danno contributo:

$$e_{bb}^{3,4} g_{mh}$$

Come prima i generatori di corrente di collettore mandano corrente in uscita

con trasferimento unitario.

Corrente di base: il generatore i_b connesso alla base di Q_1 genera una corrente in uscita pari a $2\beta i_b$.

Stesso calcolo per Q_2 .

Per quanto riguarda il generatore $i_b^{3,4}$ genera una corrente in uscita pari a: $i_b^{3,4} \frac{g_{mh}}{g_{m3}}$ ma $g_{mh} = g_{m3}$.

$$\text{Quindi } i_{cc} = e_{bb}^{3,4} \cdot g_{mh} + i_c^{1,2,3,4} + 2\beta i_b^{1,2} + i_b^{3,4} \frac{g_{mh}}{g_{m3}}$$

Il termine di rumore diventa: (di power spectral density)

$$S_{out} = 4kT e_{bb}^{(P)} g_m^2 + 4(2qI_c) + 8\beta^2 (2qI_b) + 2(2qI_b)$$

Confrontando caso reale e ideale si ottiene:

$$S_I = 2(2q I_B) + \underbrace{\frac{2}{h\beta_m^2} (2q I_B)}_{\propto I_B/\beta^2} + \underbrace{\frac{4(2q I_C)}{h\beta_m^2}}_{\propto I_D/\beta} + \underbrace{\frac{4KT r_{bb'} \delta m^2}{h\beta^2}}_{\text{trascurabile}}$$

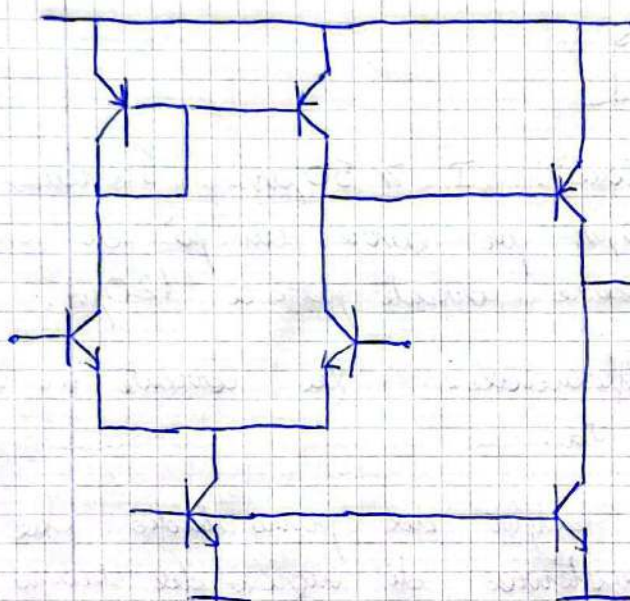
Perciò in definitiva si ottiene che:

13/11/24

$$S_I = 4q I_B$$

Facciamo ora un esempio numerico:

$$S_I = (2 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}); \quad S_V = (5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}})$$



$$S_V^0 \gg 8KT(r_{bb'} + 1/g_{m1}) \quad \text{da cui}$$

$$\frac{1}{g_{m1}} \leq S_V^0 - 8KT r_{bb'} \quad \text{perciò}$$

$$g_{m1} \gg \frac{1}{S_V^0 - 8KT r_{bb'}} \quad \text{dove } S_V^0 = (5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}})^2$$

$$\text{mentre } r_{bb'} = 250 \Omega$$

$$\text{Quindi: } g_{m1} \gg \frac{1}{(5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}})^2 - 8KT \cdot 250 \Omega}$$

Svolgendo i conti

$$\text{si ottiene che } g_{m1} \gg 2 \text{ mA/V}$$

$$\text{Da cui } \frac{I_C}{V_{th}} \gg 2 \text{ mA/V}$$

$$\Rightarrow I_C \gg 50 \mu\text{A}$$

Quindi la prima specifica $S_V = (5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}})$ comporta la condizione $I_C \gg 50 \mu\text{A}$

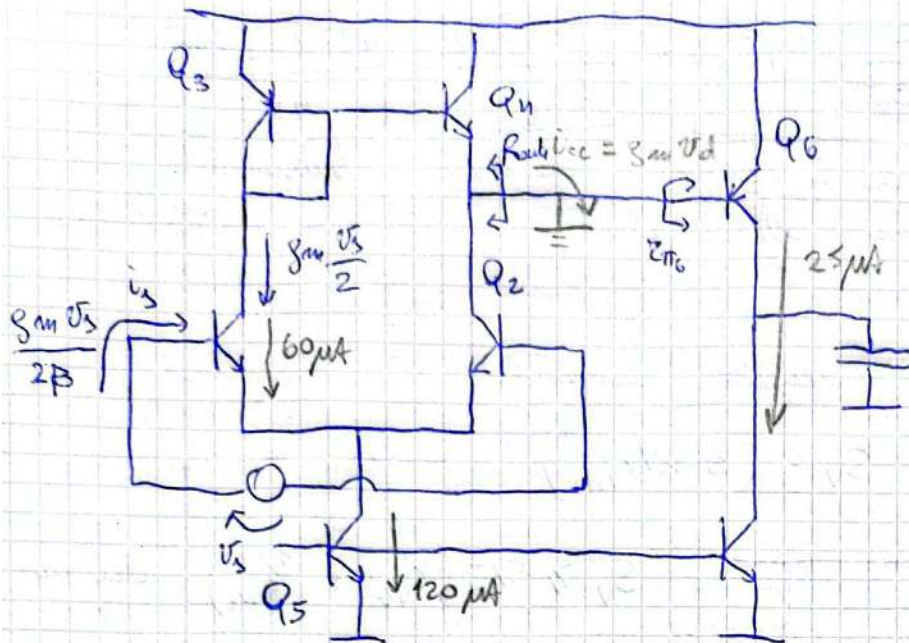
Studiamo ora il rumore di corrente:

$$S_I^0 \gg 4q I_B \Rightarrow I_B \leq \frac{(2 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}})^2}{4q} = 6 \mu\text{A}, \quad \text{da cui}$$

$$\text{possiamo ricavare la condizione su } I_C: I_C \leq \beta I_B = 1,2 \text{ mA}$$

Nel caso dei MOSFET, gli input sono collegati al gate e la resistenza di input è infinita.

Calcoliamo ora invece la resistenza di input:



$$R_{in} = \frac{V_s}{i_s} = \frac{2\beta}{g_m} = 2r_{\pi}$$

che è un valore fisso.

Vale che $R_{in} = 200 \text{ k}\Omega$

con $g_m = 2 \text{ mA/V}$ e $\beta = 200$

Abbiamo ricavato la condizione: $I_c \geq 50 \mu\text{A}$. Proviamo a lavorare con $I_c = 60 \mu\text{A}$ per avere un po' di margine. Quindi per Q_5 serve corrente pari a $120 \mu\text{A}$.

Calcoliamo il guadagno differenziale: la corrente i_c in uscita vale $i_c = g_m v_d$.

R_{out1} è la resistenza di output del primo stadio che però è limitata dalla resistenza di ingresso del secondo stadio $r_{\pi6}$. Ovvero:

$$G_d = g_{m1} \frac{\beta_P}{g_{m6}} \cdot g_{m6} (r_{o6} \parallel r_{o7}) \quad \text{Vogliamo che } G_d = 90 \text{ dB.}$$

$$g_{m6} (r_{o6} \parallel r_{o7}) = \frac{I_c}{V_{th}} \cdot \frac{V_A^6 \parallel V_A^7}{I_c} = \frac{10 \parallel 100}{KT/q} = 352$$

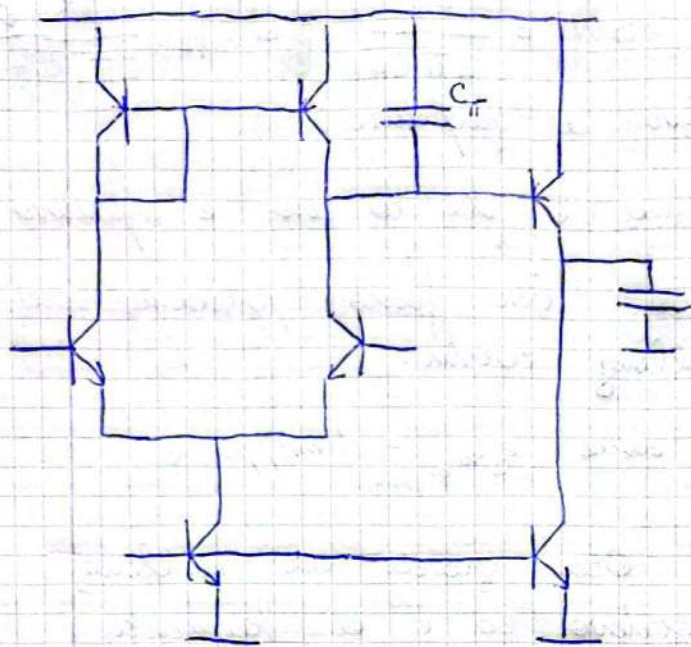
$$90 \text{ dB} = 10^{\frac{9}{20}} = 31600 \Rightarrow G_d = 31600 \text{ da cui}$$

$$g_{m1} \frac{\beta_P}{g_{m6}} = 90 \quad \text{Dato che } I_c = 60 \mu\text{A} \quad g_{m1} = 2,33 \text{ mA/V}$$

$$\text{e } g_{m6} = \frac{g_{m1} \beta_P}{90} = 1 \text{ mA/V} \quad \text{da cui } I_{c6} = 25 \mu\text{A}.$$

Studiamo ora la compensazione:

Consideriamo la capacità C_{π} del transistor Q_6 pnp, studiamo quindi il seguente circuito.



Per un transistor
bipolare:

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_{\pi} + C_{\mu})} = \frac{1}{2\pi\left(\frac{C_{\pi}}{g_m} + \frac{C_{\mu}}{g_m}\right)}$$

Il termine $\frac{C_{\pi}}{g_m}$ dipende da

τ_F che è il forward transit time che vale circa 20 ps.

Questo tempo è il tempo necessario affinché una carica attraversi la base del transistor dalla giunzione emettitore-base

alla giunzione base-collettore.

Vale che $\frac{C_{\pi}}{g_m} = \tau_F$, sapendo che per Q_6 $g_m = 1 \text{ mS}$

e che $\tau_F = 20 \text{ ps}$, allora $C_{\pi} = 20 \text{ pF}$.

6/11/24

Lezione 18

Abbiamo detto che $\tau_F = \frac{C_{\pi}}{g_m}$, da cui $C_{\pi} = g_{m6} \cdot \tau_F = 20 \text{ pF}$

$\frac{R_6}{g_{m6}} = 40 \text{ k}\Omega$, questa resistenza è in parallelo con

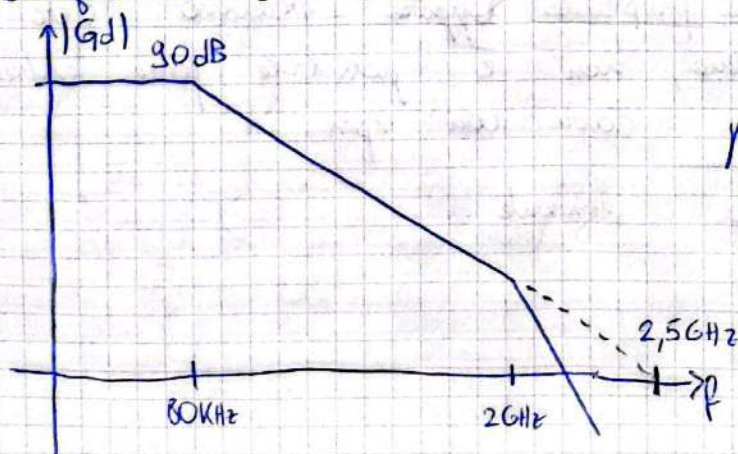
$r_{o6} \parallel r_{o7}$, che sono molto più grandi di $40 \text{ k}\Omega$.

Però, detto τ_1 la costante di tempo di C_{π} , vale che: $\tau_1 = C_{\pi} \cdot \frac{R_6}{g_{m6}} = 0,8 \text{ ns}$ da cui $f_1 = 2 \text{ GHz}$.

Mentre diciamo τ_2 la costante di tempo di C_2 , vale che: $\tau_2 = C_2 \cdot r_{o6} \parallel r_{o7} \approx C_2 \cdot r_{o6} = 2 \mu\text{s}$ da cui

$f_2 = 80 \text{ kHz}$

Diagramma di Bode:



Per la compensazione, possiamo inserire la capacità di Miller tra base e collettore di Q_6 , che chiamiamo C_{μ} .

Con C_H vale che: $GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C_H}$ e $f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_2)}$

C_1 è anche uno zero positivo a frequenza:

$f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_H}$ Il problema è che lo zero è positivo, dobbiamo renderlo negativo. Per farlo possiamo ad esempio inserire il nulling resistor.

$$f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi(C_1 + C_2)} = 32 \text{ MHz} \quad \text{dove } g_{m6} = 1 \text{ mA/V} \text{ e}$$

$C_1 + C_2 \approx C_2 = 5 \text{ pF}$. Ora grazie al nulling resistor lo zero è negativo ed è a frequenza:

$$f_z = \frac{1}{2\pi(R_N - 1/g_{m6})C_H}$$

dove R_N è il nulling resistor e si trova in serie a C_H , sempre nel tratto tra base ed emettitore di Q_6 .

Possiamo fare in modo che $GBWP = f_z$, derivando così il valore di C_H . Una volta definito C_H , possiamo anche lo zero sovrapposto a f_z ricavando il valore di R_N . Sviluppando i conti si ottiene:

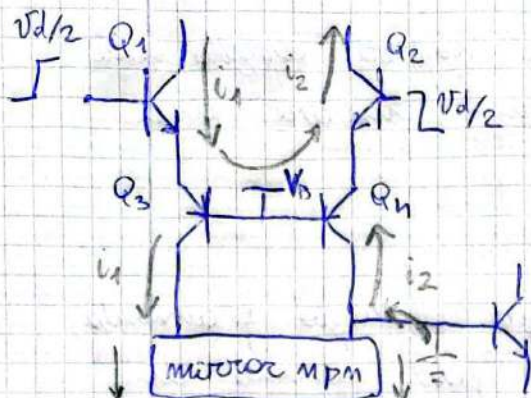
$$C_H = 12 \text{ pF} \text{ e } R_N = 1,46 \text{ K}\Omega. \quad C_{\pi} \text{ introduce un altro polo a frequenza: } f_3 = \frac{1}{2\pi R_N C_1} = 5,7 \text{ GHz}$$

Fediamo ora soluzioni per risolvere i problemi e migliorare le cose.

Solitamente si scelgono gli npn come transistori di input perché hanno elevata resistenza di ingresso.

Però se l'ingresso del primo stadio è fatto con gli npn, allora l'ingresso del secondo deve essere fatto con i pnp. Oppure viceversa. Per limiti di polarizzazione, non è possibile fare entrambi gli ingressi dei due stadi con npn.

Una soluzione è la seguente:



la corrente i_1 per Q_1 viene letta da Q_3 e replicata per Q_4 .

ha stessa cosa per $Q_2 - Q_4$.

Ora alla base si fa lo specchio di corrente con i transistori npn e così si può fare il secondo stadio con gli npn.

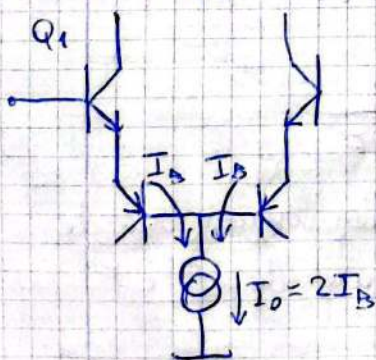
Q_3 e Q_4 fungono da current reader.

Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 hanno tutti la stessa tensione base-emettitore pari a $V_d/4 \Rightarrow$ portano tutti la stessa corrente pari a $g_m V_d/4$. Quindi $i_1 = g_m V_d/4$ e anche $i_2 = g_m V_d/4$. i_1 viene specchiata e la corrente

$i_{cc} = g_m V_d/2$. Otteniamo un fattore 2 nel guadagno ma così tutti e due gli stadi hanno in ingresso transistori npn.

Il problema sta nell'imporre la tensione di base di Q_3 e Q_4 . Infatti la tensione V_b impone anche una tensione di modo comune agli ingressi di Q_1 e Q_2 che infatti val $V_b + 1,4V$. La corrente per Q_1 e Q_2 ha andamento esponenziale al variare della tensione alla base, perciò una piccola variazione anche accidentale di V_b causa una forte variazione delle correnti per Q_1 e Q_2 , il che non va bene.

Possiamo sostituire l'alimentatore V_b con un generatore di corrente I_0 che impone le correnti di base di Q_3 e Q_4 in questo modo:



la corrente I_0 si divide equamente tra le due basi di Q_3 e Q_4 .

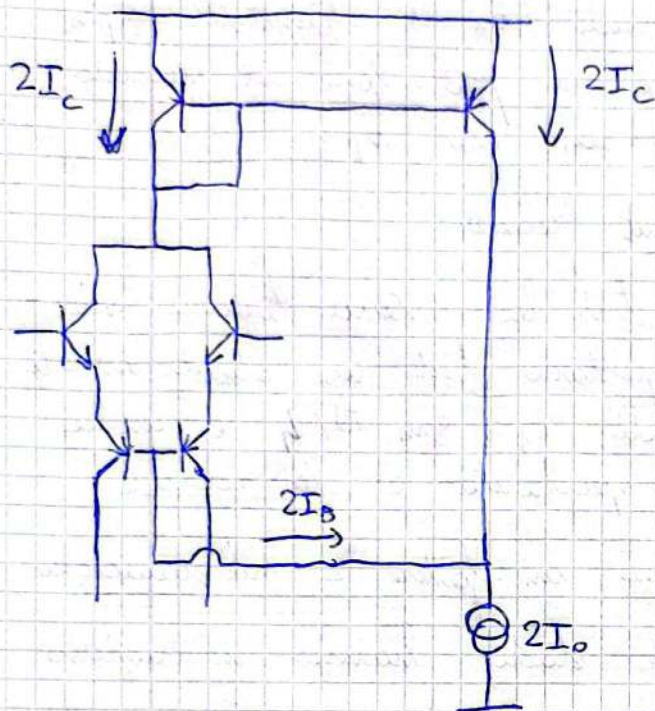
$$I_c = I_b (\beta_F + 1) \frac{\beta_n}{\beta_F + 1}$$

Il problema

ora è che la d_n variazione di β influisce sulla corrente di polarizzazione.

Per ridurre questa variazione e imporre correttamente la corrente di collettore, dobbiamo inserire una retroazione.

La soluzione è la seguente:



Se per esempio β aumenta, scorre più corrente di collettore per i BJT.

$\Rightarrow$ scorre più corrente per il ramo di sinistra dello specchio che aumenta anche la corrente del ramo di destra. Ma I_o è fissata, quindi la corrente in eccesso nel ramo di destra scorre verso le basi dei BJT pnp e riduce I_c nel ramo di sinistra dello specchio avendo così

un effetto di retroazione negativa.

$2I_c = 2I_B (\beta_p + 1) d_n$ la corrente specchiata, tenendo in considerazione un errore ϵ nello specchio vale:

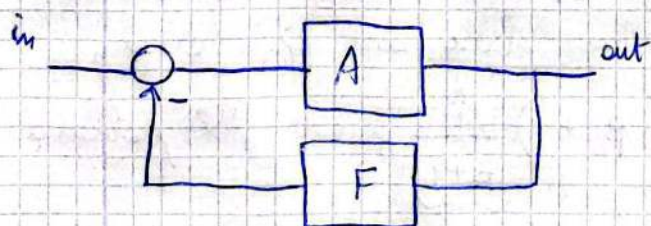
$2I_B (\beta_p + 1) d_n (1 - \epsilon)$ dove $\epsilon \approx \frac{2}{\beta_p}$ Vale che, per

legge di Kirchhoff: $2I_B (\beta_p + 1) d_n (1 - \epsilon) + 2I_B = 2I_o$.

$$\Rightarrow I_B = \frac{2I_o}{1 + (\beta_p + 1) d_n (1 - \epsilon)}, \text{ dato che } I_c = (\beta_p + 1) d_n I_B$$

vale che $I_c = \frac{(\beta_p + 1) d_n}{1 + (\beta_p + 1) d_n (1 - \epsilon)} I_o$. Supponiamo che

$\frac{\Delta \beta_p}{\beta_p} \approx 20-30\%$, di quanto varia I_c ?



$$G = \frac{A}{1 + AF}$$

Calcoliamo le variazioni di G al variare di A e F :

$$dG = dA \frac{(1+AF) - AF}{(1+AF)^2}; \quad dG = -dF \frac{A^2}{(1+AF)^2} \quad \text{perciò}$$

$$dG = \frac{dA}{(1+AF)^2} - dF \frac{A^2}{(1+AF)^2}, \quad \text{ma a noi interessa}$$

calcolare $\frac{dG}{G}$, quindi dobbiamo dividere tutto per

$$\frac{1+AF}{A} = \frac{1}{G} \quad \text{perciò:}$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{A} \frac{1}{(1+AF)} - dF \frac{A}{(1+AF)}, \quad \text{se } A \text{ è molto grande}$$

l'espressione diventa:

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{A} \frac{1}{(1+AF)} - \frac{dF}{F} \Rightarrow \text{il secondo termine esprime}$$

il fatto che una variazione di F influisce direttamente sul guadagno.

Trasferiamo questa teoria al nostro problema:

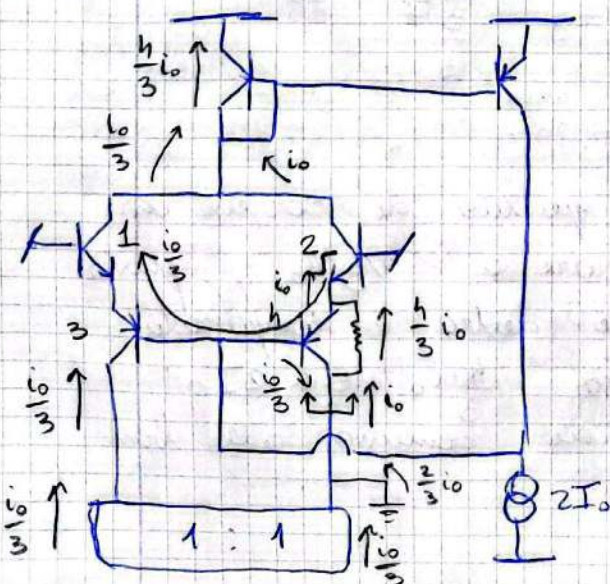
$$\frac{dI_c}{I_c} = \frac{d\beta_p}{\beta_p} \frac{1}{\beta_p} - \frac{d(1-\varepsilon)}{d\beta_p(1-\varepsilon)} = \frac{d\beta_p}{\beta_p^2} + \frac{2}{\beta_p^2} d\beta_p$$

$$\frac{d\beta_p}{\beta_p} \text{ corrisponde a } \frac{dA}{A} \quad \frac{1}{\beta_p} \text{ corrisponde a } \frac{1}{1+AF}$$

$$- \frac{d(1-\varepsilon)}{d\beta_p(1-\varepsilon)} \text{ corrisponde a } - \frac{dF}{F}, \text{ che diventa } + \frac{2}{\beta_p^2} d\beta_p$$

$$\text{perché } \varepsilon = \frac{2}{\beta_p}$$

la seguente struttura prende il nome di $\mu A 741$



Abbiamo già calcolato in precedenza che $i_{cc} = \frac{g_m}{2} v_{ol}$.

Abbiamo ora calcolato R_{out} . Calcoliamo la resistenza che si vede dall'uscita verso l'alto.

Se dal nodo d'uscita verso l'alto scorre i_o , allora anche per Q_2 scorre i_o trascurando

la piccola porzione di i_o che scorre per la base di Q_1 .

Se per Q_2 scorre i_o , l'emittore di Q_2 cresce di una tensione pari a: $V_A = i_o \cdot \frac{1}{g_{m2}}$.

Questa tensione genera una corrente che scorre per le basi di Q_3 e Q_4 e scorre per Q_1 (guarda disegno). Questa corrente vede le seguenti resistenze:

$$\frac{\beta_F}{g_{m1}} \cdot \frac{1}{(\beta_F + 1)} \cdot \frac{1}{\frac{r_{\pi 3}}{\beta_F + 1} + \frac{r_{\pi 4}}{\beta_F + 1}}$$

La corrente per questo percorso

vale: $\frac{V_A}{3} g_{m1} = \frac{i_o}{g_{m1}} \cdot \frac{g_{m1}}{3} = \frac{i_o}{3}$

Ma in realtà $\frac{i_o}{3}$ è la corrente per il percorso ma al di fuori del tratto che connette le basi di Q_3 e Q_4 , qui la corrente è divisa per β .

$\Rightarrow$ la corrente che entra nello specchio in base è $\frac{i_o}{3}$ e perciò la corrente di cortocircuito $i_{cc} = \frac{2}{3} i_o$.

Dalla base al collettore di Q_4 scorre $\frac{i_o}{3}$, dal base verso il collettore di Q_4 scorre i_o , le due correnti si sommano e scorrono per $r_{o4} \Rightarrow$ per r_{o4} scorre una corrente pari a $\frac{4}{3} i_o$.

La tensione ai capi di r_{o4} vale $\frac{4}{3} i_o \cdot r_{o4}$.

Perciò $V_s = \frac{4}{3} i_o r_{o4} + V_A$, ma $\frac{1}{g_{m1}} \ll r_{o4}$ perciò

$V_s \approx \frac{4}{3} i_o r_{o4}$; $i_s = \frac{2}{3} i_o$, perciò $\frac{V_s}{\frac{2}{3} i_o} = \frac{V_s}{i_s}$ e quindi

$$\frac{V_s}{\frac{2}{3} i_o} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r_{o4}}{\frac{2}{3}} = 2 r_{o4}$$

Nel ramo di sinistra dello specchio di corrente in alto scorre una corrente pari a $\frac{4}{3} i_o$, questa viene specchiata nel ramo di destra e comparata con $2I_o$. La differenza tra $\frac{4}{3} i_o$ e $2I_o$ proviene dal ramo di retroazione comune alle basi di Q_3 e Q_4 .

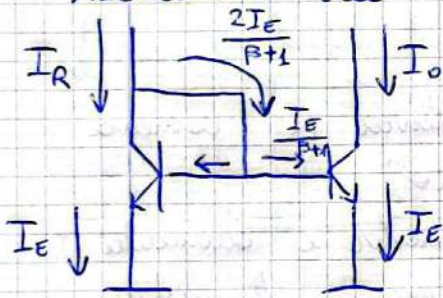
Questa corrente è di modo comune e si oppone a $\frac{4}{3} I_0$ che scorreva nello specchio in alto prima dell'effetto del loop.

Quindi mentre inizialmente scorreva una corrente verso l'alto di $\frac{4}{3} I_0$, per lo specchio in alto, si può considerare che ora scorre anche una corrente $\frac{4}{3} I_0$ verso il basso per effetto del loop.

Questa si divide egualmente nei 2 rami, $\frac{2}{3} I_0$ da una parte e $\frac{2}{3} I_0$ dall'altra. La corrente $\frac{2}{3} I_0$ nel ramo di sinistra verso il basso viene specchiata dallo specchio inferiore e in uscita vale che nessuna porzione di questa corrente scorre per i.c.c.

Quindi i.c.c. rimane pari a $\frac{2}{3} I_0$ come originariamente.

Studiamo ora lo specchio di corrente inferiore:



Per effetto della corrente di base e del valore non infinito di β , $I_0 \neq I_E$, quindi lo specchio non specchia proprio esattamente.

Questa differenza non influenza solamente la corrente di polarizzazione, ma

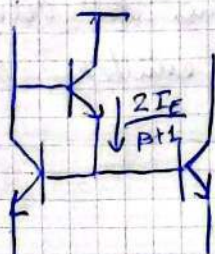
anche la corrente di segnale.

20/11/21

La connessione tra il collettore e la base del transistor di sinistra è importante perché il segnale di tensione deve essere trasferito tra collettore e base, così da modificare la tensione di base $\Rightarrow$ modificare la tensione di comando e il transistor può trasportare la corrente che gli arriva dal collettore.

Il obiettivo è trasferire tensione tra collettore e base, ma ridurre il trasferimento di corrente.

Per farlo si può inserire un buffer. Come buffer possiamo inserire un emitter follower. Il circuito diventa:

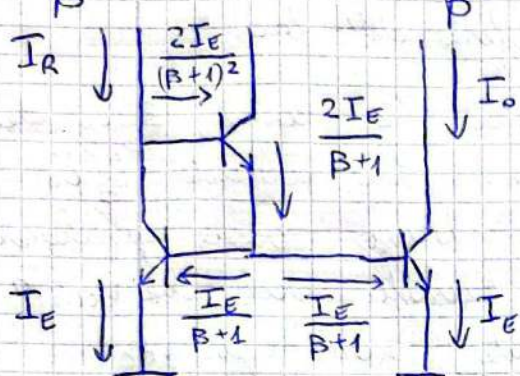


Ora la corrente di collettore dell'emitter follower è $\frac{2I_E}{\beta+1}$, però la sua corrente di base, che è quella

che viene sottratta allo specchio di corrente, vale:

$\frac{2I_E}{(\beta+1)^2}$ che è una porzione molto piccola di I_E e perciò lo specchio ha un errore molto piccolo.

Quindi ora l'errore non è più dell'ordine di $\frac{2}{\beta}$ ma di $\frac{2}{\beta^2}$. Racciamo i conti:



$$I_O = I_E \frac{\beta}{\beta+1}$$

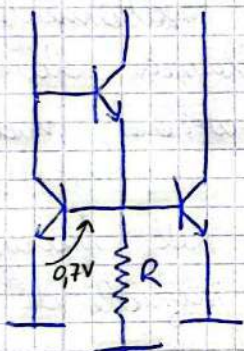
$$I_R = \frac{I_E \beta}{\beta+1} + \frac{2I_E}{(\beta+1)^2}, \text{ perciò}$$

$$\frac{I_R}{I_O} = 1 + \frac{2(\beta+1)}{(\beta+1)^2 \beta} = 1 + \frac{2}{\beta(\beta+1)} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{2}{\beta^2}, \text{ perciò:}$$

$$I_O \approx \frac{I_R}{1 + 2/\beta^2} \approx I_R \left(1 - \frac{2}{\beta^2}\right)$$

Solitamente si aggiunge anche una resistenza R connessa alle basi dei due BJT dello specchio.



R è chiamata bleeding resistor e aumenta la corrente che scorre per i transistori.

Il problema sta nel fatto che per correnti molto piccole che scorrono nel BJT, il valore di β inizia a calare. La corrente che scorre nell'emitter follower è così piccola (nell'ordine di 100 nA se

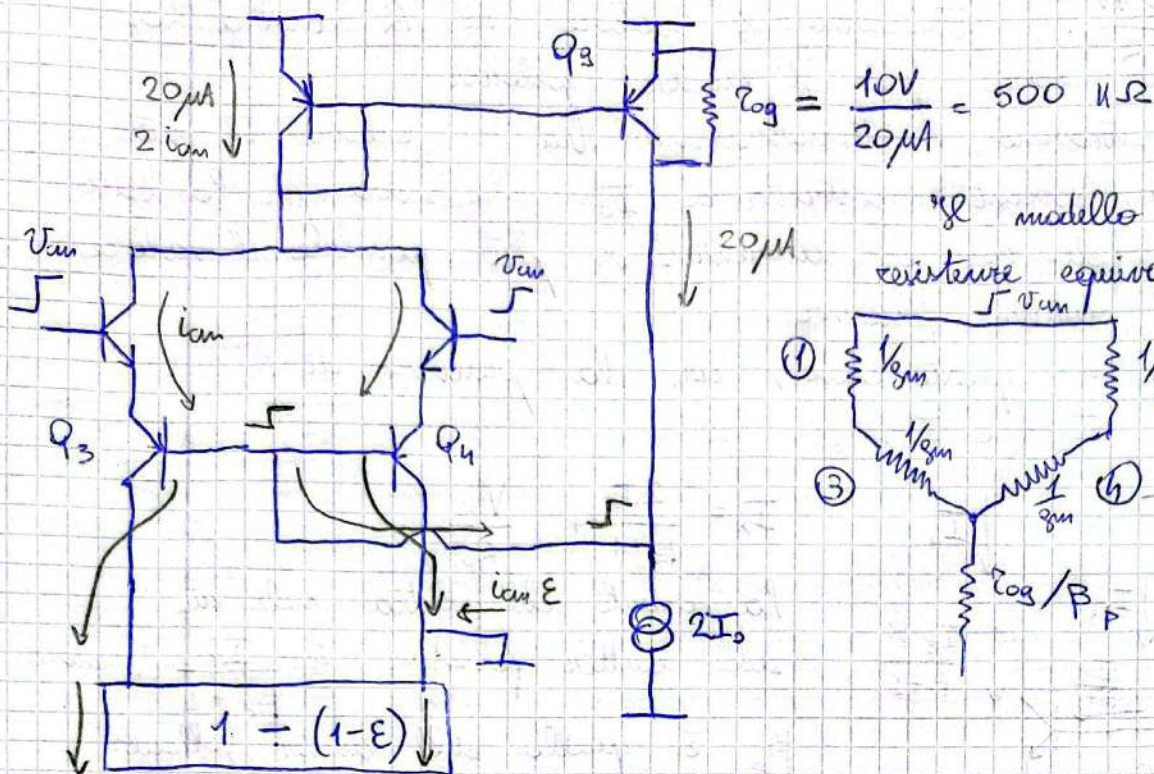
$I_R = 10 \mu A$) che β ha un valore molto basso.

In questo caso l'errore varrebbe $\frac{2}{\beta_F \beta}$, dove β_F è il β del follower e vale poco. Quindi l'errore non è più così piccolo. Quindi R serve per aumentare la corrente per l'emitter. Questo ha lo vantaggio di aumentare la corrente sottratta a I_R che va nella base dell'emitter follower, ma il vantaggio di aumentare il valore di β_F dell'emitter follower.

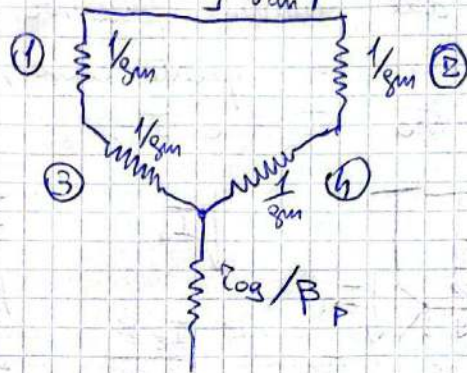
8/11/24

hexiane 19

Studiamo ora il comportamento con segnale di modo comune.



Il modello con le resistenze equivalenti è:



Se il modo in comune si muove di V_{cm} , la corrente complessiva vale:

$$\frac{V_{cm}}{(1/g_m + 1/g_m) // (1/g_m + 1/g_m) + \frac{r_{Og}}{B_P}} = \frac{V_{cm}}{1/g_m + \frac{r_{Og}}{B_P}} \approx \frac{V_{cm} B_P}{r_{Og}}$$

Però: $2i_{cm} = \frac{V_{cm}}{1/g_m + \frac{r_{Og}}{B_P}}$ da cui:

$$i_{out} = \epsilon i_{cm} = \epsilon \frac{V_{cm}}{2 \left[1/g_m + \frac{r_{Og}}{B_P} \right]}$$

La retroazione agisce per evitare che venga generata corrente di modo comune. Infatti nello specchio di corrente superiore, la corrente viene specchiata in Q_3 e la corrente in eccesso va nel ramo che porta alle basi dei transistori Q_3 e Q_4 , generando così una corrente verso l'alto per Q_1 e Q_2 che si oppone a quella generata dal segnale V_{cm} .

Se il loop fosse ideale, il segnale di modo comune verrebbe totalmente annullato. In questo caso il loop vale B . Infatti la corrente che entra nelle basi di Q_3 e

Q_n viene amplificata di β per poi opporsi a i_{cm} .

Corrente i_{out} è in realtà i_{out} , quella calcolata senza retroazione, diviso l'effetto del loop che vale β . Corrente in realtà:

$$i_{out} = \frac{v_{cm}}{2 \left[\frac{1}{g_m} + \frac{r_{os}}{\beta_F} \right] \beta_F} = \varepsilon \frac{v_{cm}}{2 (r_{os} + \frac{\beta_F}{g_m})} \quad \text{dove } \varepsilon = \frac{2}{\beta_0^2} \quad \text{con } \beta_0 \text{ valore nominale del ppm}$$

v_{cm} viene ridotta e il suo valore $r_{\pi F}$ è:

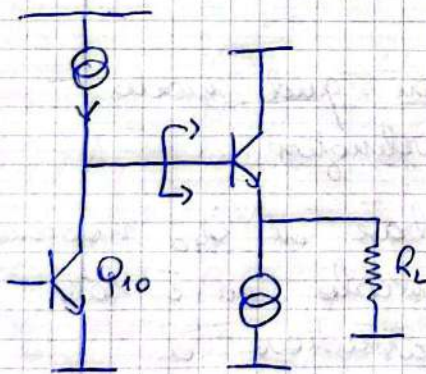
$$2 i_{cm} = \frac{v_{cm} \beta_F}{r_{os} \beta_F} = \frac{v_{cm}}{r_{os}}$$

Calcoliamo ora il CMRR:

$$CMRR = \frac{\frac{g_m}{2} R_{out}}{\frac{\varepsilon}{2} \left(r_{os} + \frac{\beta_F}{g_m} \right)^{-1} R_{out}} = \frac{\frac{g_m}{2}}{\frac{\varepsilon}{2} \left(r_{os} + \frac{\beta_F}{g_m} \right)^{-1}} = \frac{g_m}{\varepsilon} \left(r_{os} + \frac{\beta_F}{g_m} \right)$$

$$\approx \frac{10^4}{2,5k\Omega} \cdot 500k\Omega = 2 \cdot 10^6 = 126 \text{ dB}$$

Studiamo ora il secondo stadio: l'obiettivo è complessivamente raggiungere $G_d = 2 \cdot 10^5 = 106 \text{ dB}$. Se il primo stadio ha un guadagno differenziale di 400, vuol dire che il secondo stadio deve avere un guadagno pari a 500.



L'emitter follower fa da buffer, in questo modo il guadagno non è influenzato dal valore di R_L .

In questo modo la resistenza vista dalla base dell'emitter follower è $\beta R_L + r_{\pi} \approx \beta R_L$. Se $R_L = 1k\Omega$ e $\beta = 200$ allora si vedono $200k\Omega$.

$G_2 = g_{m10} \beta R_L$, vogliamo che $G_2 \geq 500$ da cui

$$g_{m10} = \frac{500}{200 \cdot 1k\Omega} = \frac{1}{400\Omega} = 2,5 \text{ mA/V}$$

Quindi: in un circuito di BJT si mette di solito un carico resistivo che simula la base di un altro

BST. In un circuito con MOSFET si mette un capacitoro che simula il gate di un MOSFET in cascata.

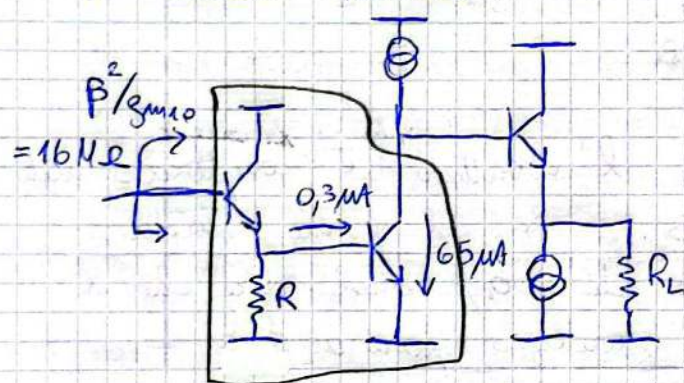
Calcolata g_{m10} , è quindi richiesto un valore minimo di corrente I_{10} . $I_{10} = V_{th} g_{m10} = 65 \mu A$.

Quindi è richiesta una corrente di polarizzazione elevata, e maggiore è la corrente di polarizzazione, minore è la resistenza vista in ingresso al secondo stadio ovvero vista dalla base di Q_{10} , infatti una vale:

$\beta / g_{m10} = 200 \cdot 100 = 80 k\Omega$. Questa resistenza con picola riduce il guadagno del primo stadio.

Quindi dobbiamo aggiungere un emitter follower che funge da buffer tra i due stadi.

Il circuito diventa:



Darlington

In ingresso al primo stadio avevamo una resistenza pari a $R_{in1} = \beta \frac{1}{g_m} = 200 \cdot 1 \cdot 2,5 k\Omega = 2 M\Omega$.

Ora in ingresso al secondo stage abbiamo $R_{in2} = 16 M\Omega$ che va bene.

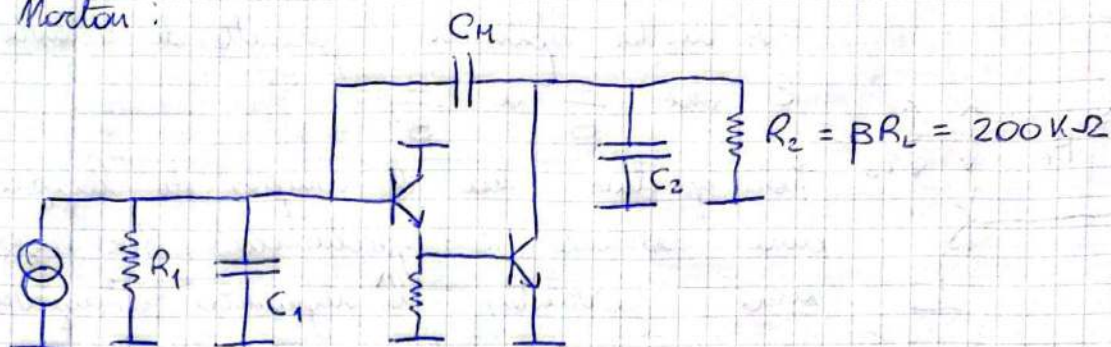
Se due transistori collegati in quel modo formano la topologia nominata Darlington.

Se per Q_{10} servono $65 \mu A$, nella base di Q_{10} servono $0.3 \mu A$ che è un valore troppo piccolo ed è tale da ridurre il valore di β . Per rimediare a questo si connette la resistenza alla base di Q_{10} .

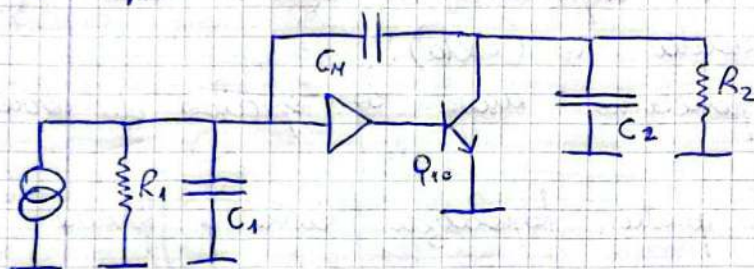
Supponendo $R = 70 k\Omega$, dato che $V_{BE10} = 0.7 V$ allora per R servono $10 \mu A$. la presenza di R riduce la resistenza di ingresso del secondo stadio, che rimane comunque parecchio e sufficientemente elevata.

Studiamo ora la compensazione attraverso la capacità di Miller.

Rappresento l'ingresso e l'uscita con gli equivalenti Norton:



che può essere visto come:



Polo ad alta frequenza, con C_H cortocircuito:

$$p_2 = \frac{g_{m10}}{2\pi(C_1 + C_2)} ; f_z = \frac{g_{m10}}{2\pi C_H} ; GBWP = \frac{g_{m1}}{2} \cdot \frac{1}{2\pi C_H}$$

Proviamo verosimilmente supporre che $C_1 = 2 \text{ pF}$ e $C_2 = 4 \text{ pF}$ (misurato 66 per propagazione).
Con questi valori si ottiene:

$$p_2 = \frac{2,5 \text{ mA/V}}{2\pi (6 \text{ pF})} = 65 \text{ MHz}$$

$$\frac{f_z}{GBWP} = \frac{g_{m10}}{g_{m1}/2} = 13, \text{ infatti nel secondo stadio servono}$$

$65 \mu\text{A}$, mentre nel primo ne servono $10 \Rightarrow g_{m10} = 6,5 g_{m1}$

$\Rightarrow$ lo zero è posizionato dopo il GBWP e anche il secondo polo possiamo posizionarlo dopo il GBWP

Il margine di fase in corrispondenza del GBWP vale:

$$\phi_H = 180^\circ - 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{p_2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{GBWP}{p_2}\right) \text{ ricordando}$$

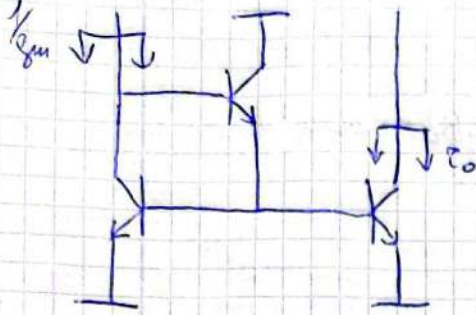
che lo zero è positivo e quindi si comporta come un polo in termini di fase.

$$\frac{GBWP}{f} = \frac{1}{13} \text{ e } \arctan\left(\frac{1}{13}\right) = 4,4^\circ. \text{ Per avere } \phi_H = 60^\circ$$

vuol dire che $\arctan\left(\frac{GBWP}{p_2}\right) = 25,6^\circ$, questo vuol

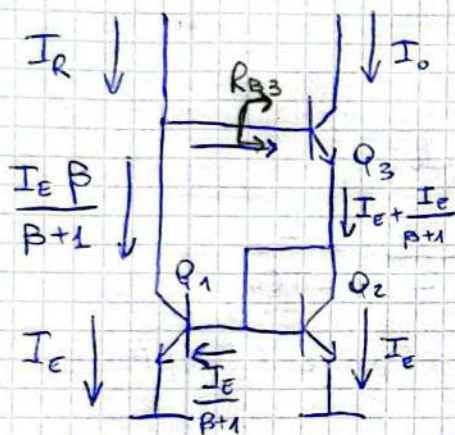
dire che $GBWP = 0,48 p_2 = 0,48 \cdot 65 \text{ MHz} = 31 \text{ MHz}$.

Cominciamo a studiare lo specchio di corrente.
 L'emitter follower permette di ridurre
 ϵ da $\frac{2}{\beta}$ a $\frac{2}{\beta^2}$.



Lo specchio ha il compito di leggere una corrente e specchiarla. Per leggere una corrente, l'impedenza d'ingresso dovrebbe essere bassa e quella di uscita alta. E infatti l'impedenza d'ingresso vale $1/g_m$ (bassa) e quella d'uscita r_o (alta).

Usando 3 transistor, possiamo usare lo specchio di corrente di Wilson:



Questa topologia riesce a fornire un errore pari a $2/\beta^2$.

Questo perché la corrente di base di Q_1 scorre in un verso, ma la corrente di base di Q_3 scorre nel verso opposto.

Questo riduce la corrente complessiva sottratta a I_R e quindi l'errore

21/11/21

Facciamo i conti: $I_O = I_E \left(1 + \frac{1}{\beta + 1}\right) \frac{\beta}{\beta + 1}$ e

$$I_R = I_E \frac{\beta}{\beta + 1} + \frac{I_E}{\beta + 1} + \frac{I_E}{(\beta + 1)^2} \quad \text{Perché:}$$

$$I_O = \frac{I_E}{(\beta + 1)^2} (\beta + 2)\beta, \quad I_R = I_E \frac{\beta(\beta + 1) + \beta + 1 + 1}{(\beta + 1)^2} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{I_R}{I_O} = \frac{\beta^2 + 2\beta + 2}{\beta^2 + 2\beta} = 1 + \frac{2}{\beta^2 + 2\beta} \approx 1 + \frac{2}{\beta^2}$$

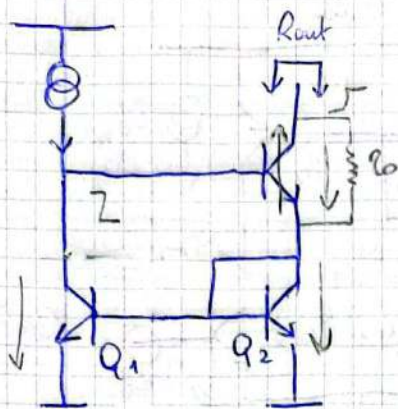
Calcoliamo il valore di R_{B3} , la resistenza vista dalla base di Q_3 . Se R_{B3} agisce il loop che fa sì che la base di Q_3 sia a massa virtuale.

R_{B3}^o calcolata in caso di open loop vale:

$$R_{B3}^o = \frac{2\beta}{g_m} \quad G_{loop} = \beta + 1 \quad \text{da cui} \quad R_{B3} = \frac{2}{g_m}$$

G_{loop} infatti agisce per ridurre R_{B3}^o .

Calcoliamo la resistenza di uscita:

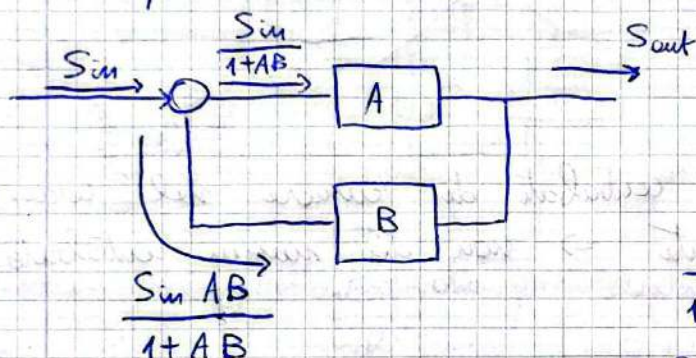


Il loop agisce per incrementare R_{out} .

Per effetto del loop l'emittore di Q_2 è a massa virtuale.

Quindi se mettiamo un segnale di prova V_s al collettore di Q_2 , per r_o scorre una corrente pari a $\frac{V_s}{r_o}$. Una porzione va verso il

basso per Q_2 , l'altra sale per Q_3 .



Però seguendo questo ragionamento, la corrente per Q_2 è quella

$$\frac{S_{in}}{1+AB} = \frac{V_s}{r_o(\beta+2)} \quad \text{dove}$$

$$S_{in} = \frac{V_s}{r_o} \quad \text{e} \quad AB = \beta + 1$$

Mentre quella per Q_3 è la rimanente e corrisponde a:

$$\frac{S_{in} AB}{1+AB} \quad \text{però} \quad \frac{V_s}{r_o} \frac{\beta+1}{\beta+2} \quad \text{di questa corrente, quella}$$

che raggiunge il collettore e non scorre per la base è:

$$\frac{V_s}{r_o} \frac{\beta+1}{\beta+2} \cdot \frac{\beta}{\beta+1} = \frac{V_s}{r_o} \frac{\beta}{\beta+2} \quad \text{Però } i_s:$$

$$i_s = \frac{V_s}{r_o} \left(1 - \frac{\beta}{\beta+2} \right) = \frac{V_s}{r_o} \frac{2}{\beta+2} \quad \text{da cui} \quad R_{out} = \beta \frac{r_o}{2}$$

Però R_{out} non è r_o come un qualsiasi specchio, ma $\beta \frac{r_o}{2}$ che è una quantità parecchio maggiore di r_o .

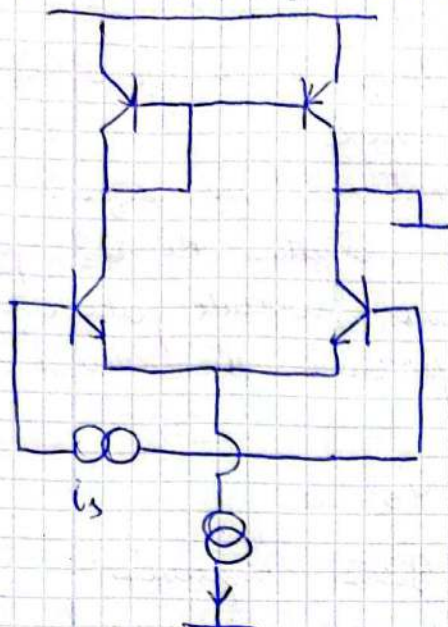
23/11/24

Lezione 20

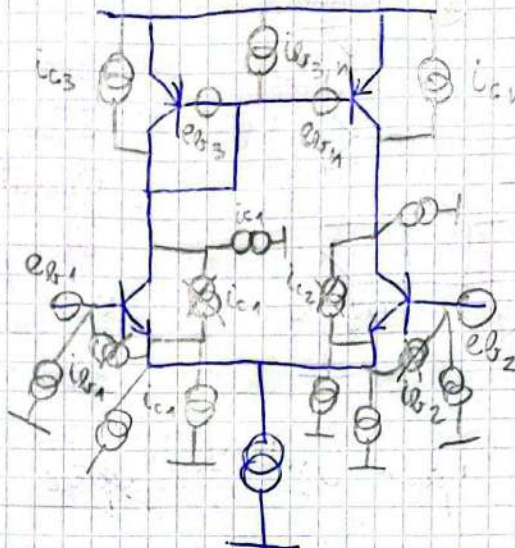
Calcoliamo l'input referred current noise dello stadio differenziale con BJT.

Per farlo consideriamo il seguente circuito:

rete ideale con generatore i_s :



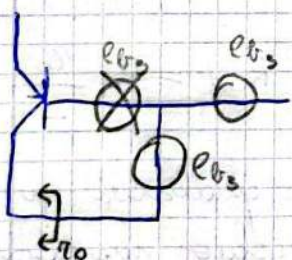
rete reale:



Calcoliamo tutti i vari contributi di rumore nel circuito reale. e_{b1} è fluttuante $\Rightarrow$ non dà nessun contributo. Stessa cosa per e_{b2} .

Per i_{c1} usiamo lo splitting theorem, stessa cosa per i_{c2} , anche per i_{b1} e i_{b2} usiamo lo splitting theorem. Tutti i generatori di modo comune $\Rightarrow$ quelli connessi al tratto tra gli emittori di Q_1 e Q_2 non hanno alcun effetto sull'uscita.

Per quanto riguarda lo specchio: portiamo il generatore e_{b3} in questo modo:



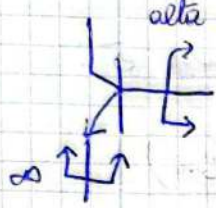
Il generatore sul ramo verticale vede r_o che è un'impedenza alta, perciò è come se fosse fluttuante e non ha alcun effetto. Solo e_{b3} sul ramo orizzontale

ha effetto, la tensione di questo generatore si somma a quella di e_{b1} . Perciò la corrente di uscita dovuta alle i_c e e_{b3} , e_{b1} vale:

$$i_{out} = i_{c1} + i_{c2} + i_{c3} + i_{c4} + (e_{b3} + e_{b1}) g_{m1}$$

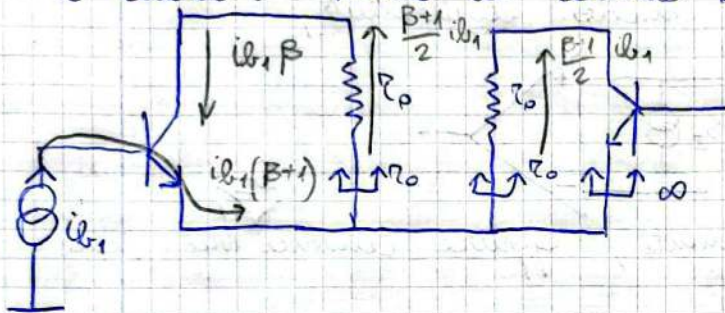
Le correnti di collettore $i_{c1,2,3,4}$ vanno direttamente in uscita o speculari e poi dirette in uscita

Calcoliamo ora gli effetti di i_{b1} e i_{b2} : dato che c'è alta impedenza connesa alle basi di 1 e 2: la resistenza vista dagli emittori è infinita.



i_{b1} viene iniettata dalla base, e una quantità pari a $i_{b1}(\beta+1)$ raggiunge l'emittore.

Mentre la corrente di collettore è βi_{b1} , la corrente si divide equamente e per ciascuna r_o scorre una corrente pari a:

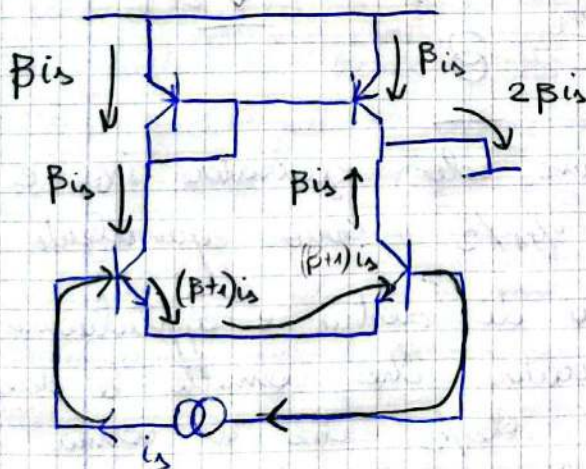


$$\frac{\beta+1}{2} i_{b1}$$

Però la corrente che proviene dall'alto, dallo specchio di corrente, vale: $\frac{\beta-1}{2} i_{b1}$. Questa corrente viene speculari dall'altra parte. Le correnti della parte di destra $\frac{\beta-1}{2} i_{b1}$ e $\frac{\beta+1}{2} i_{b1}$ si sommano e vanno in uscita, perciò verso l'uscita scorre una corrente pari a: βi_{b1} .
Però in definitiva:

$$i_{out} = \beta (i_{b1} + i_{b2}) + (i_{c1} + i_{c2} + i_{c3} + i_{cn}) + (e_{b3} + e_{bn}) g_{mn}$$

Vediamo cosa succede nel circuito ideale:



i_s si comporta come un generatore differenziale, e in uscita scorre $2\beta i_s$.
Però in termini di rumore:

$$h \beta^2 S_I$$

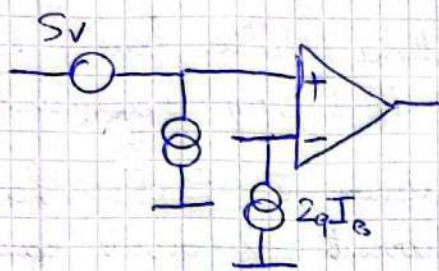
Nel caso della rete reale, rinveriamo i_{out} come S_{out} , quindi in termini di densità spettrale di rumore:

$$S_{out} = \beta^2 2 \cdot 2 q I_B + h \cdot 2 q I_c + 2 \cdot h K T r_{ob1} g_{mn}^2 \approx \beta^2 h q I_B$$

Eguagliamo i risultati delle due reti:

$$4\beta^2 S_I = 4\beta^2 q I_B \Rightarrow S_I = q I_B$$

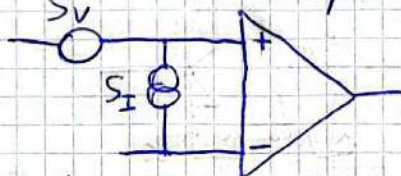
Però il modello equivalente in termini di rumore è:



dove $S_V = 8KT(z_{ob_m} + 1/g_m)$

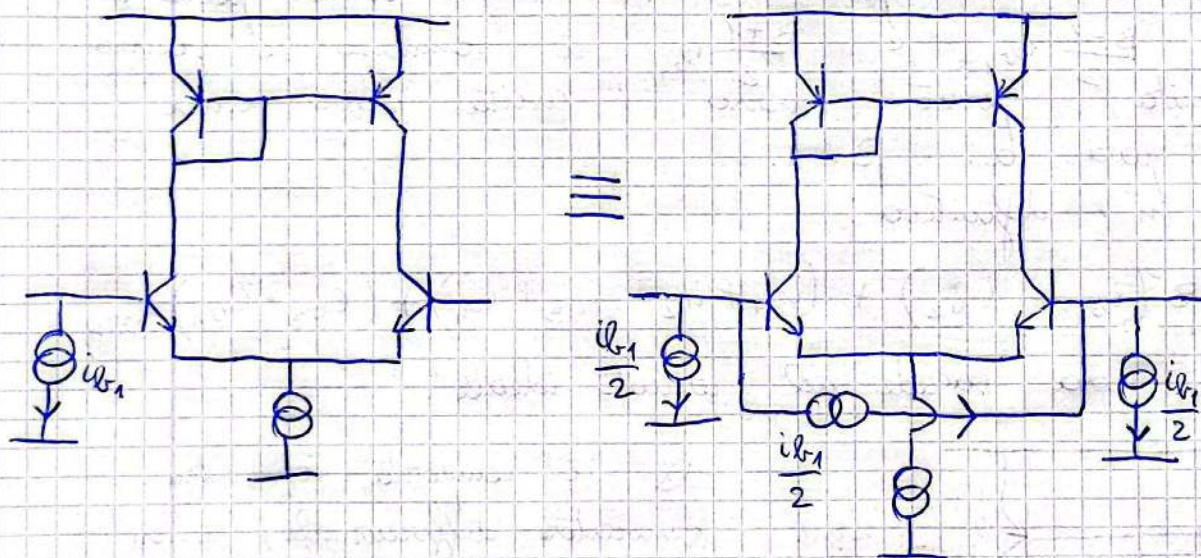
e $S_I = q I_B$

Il modello si può anche disegnare in modo equivalente:



Però $2S_I$ può o essere commessa a entrambi gli ingressi dell'amplificatore separatamente, oppure commessa tra i due terminali.

Ultimo passaggio, dobbiamo dimostrare che i due modelli (rete reale e rete ideale) sono equivalenti.

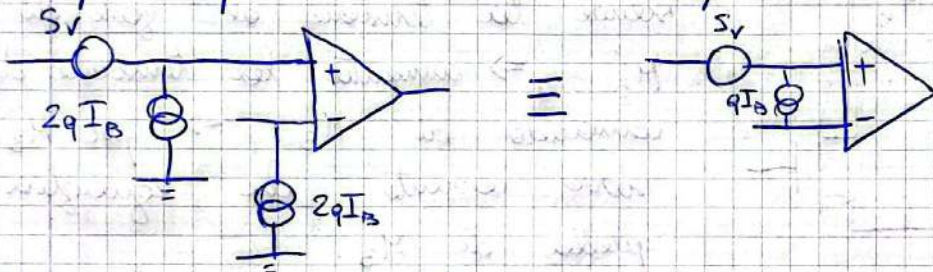


Questi due circuiti, uno con un solo generatore i_{b1} e l'altro con tre generatori $i_{b1}/2$, sono equivalenti.

Infatti se consideriamo il circuito di destra e applichiamo lo splitting theorem al generatore che connette le due basi, otteniamo un generatore $i_{b1}/2$ che si somma a quello commesso alla base di Q_1 , formando così un generatore i_{b1} . Mentre otteniamo anche un generatore $i_{b1}/2$ che si sottrae a quello commesso alla base di Q_2 .

Inoltre, dato che lo stadio è differenziale, i 2 generatori comuni alle basi generano un segnale di modo comune che non ha effetti in uscita. Perciò in definitiva un generatore di corrente comune alla base di Q_1 pari a i_{b1} è pari a un generatore che connette le due basi di Q_1 e Q_2 con valore di corrente pari a $i_{b1}/2$.

In termini di rumore: i_b diventa $2qI_B$, quindi $i_{b1}/2$ diventa $\frac{1}{4} \cdot 2qI_B = \frac{qI_B}{2}$. Sommato poi al termine generato da i_{b2} , per il quale si fa lo stesso ragionamento, si ottiene: $\frac{qI_B}{2} + \frac{qI_B}{2} = qI_B$. È per questo che vale l'equivalenza:



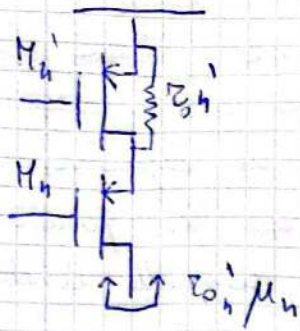
Single stage amplifier

Have due stadi in cascata comporta degli aspetti negativi, come avere due capacità e quindi due poli che vanno a influire negativamente nel margine di fase. Se riusciamo a raggiungere un guadagno elevato solamente con uno stadio, non dovremo poi ricorrere a tutte le tecniche di compensazione.

Il guadagno differenziale di un circuito a due stadi vale circa: $G_d = \underbrace{g_{m1} R_1}_{\text{stadio 1}} \cdot \underbrace{g_{m2} R_2}_{\text{stadio 2}} \approx g_{m1} \frac{r_o}{2} \cdot g_{m2} \frac{r_o}{2} = \frac{\mu^2}{4}$

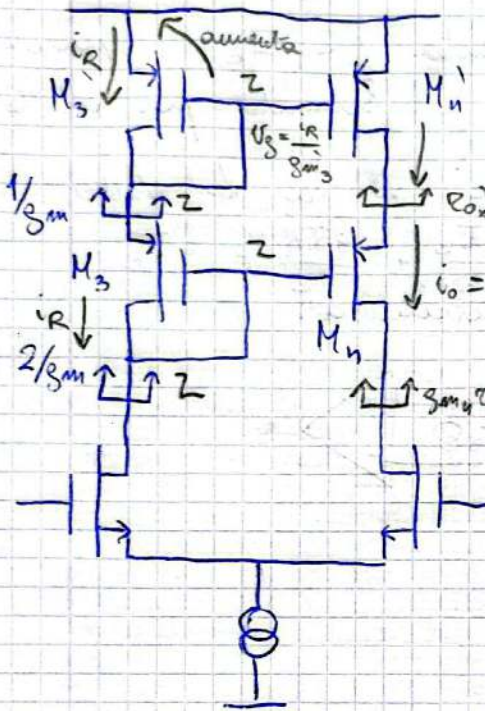
Riusciamo con un solo stadio a raggiungere un guadagno dell'ordine di μ^2 ? 24/11/24

In uno stadio a MOSFET, il guadagno differenziale è pari a: $G_d = g_m (r_{o2} \parallel r_{o1})$. Per aumentare il guadagno, dovremmo riuscire ad aumentare le resistenze viste dal drain dei transistori.



M_1 è il transistor di destra dello specchio di corrente. Abbiamo tenuto intatto lo specchio di corrente.

Il circuito diventa:



se vende corrente per M_3 , allora vende la tensione al drain di $M_3 \Rightarrow$ vende la tensione al gate di $M_3 \Rightarrow$ per una sorta di source follower vende anche la tensione al source di $M_3 \Rightarrow$ vende la tensione al gate di $M_3 \Rightarrow$ aumenta la tensione di comando di $M_3 \Rightarrow$ per M_3 nasce corrente che eguaglia quella di M_3 .

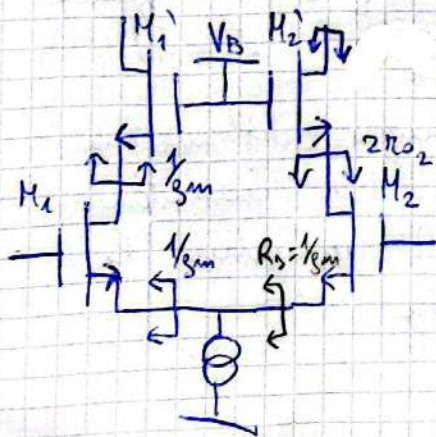
la tensione al gate di M_3 è la stessa di $M_1 \Rightarrow M_1$ porta la stessa corrente di M_3 .

la corrente per M_1 nasce anche per $M_1 \Rightarrow$ alla fine $i_o = i_R$.

la resistenza vista dal drain di M_1 ora è pari a $g_{m1} r_{o1} r_{o1}$ quindi dell'ordine di $g_m r_o^2$.

Il guadagno differenziale diventa: $g_{m1} V_d (r_{o2} \parallel g_{m1} r_{o1}^2)$ la corrente di corto circuito i_{cc} rimane la stessa e pari a $g_{m1} V_{ol}$, quella che cambia è la resistenza vista dall'uscita che ora vale $r_{o2} \parallel g_{m1} r_{o1}^2$.

Proviamo mettere in circuiti anche la parte inferiore:



Dato che $2/g_{m3} \ll r_{o1}$, dal source di M_1 si vede $1/g_{m1}$.

Dal drain di M_2 si vede:

$$r_{o2} (1 + g_m R_s) = r_{o2} (1 + g_m 1/g_m) = 2r_{o2}.$$

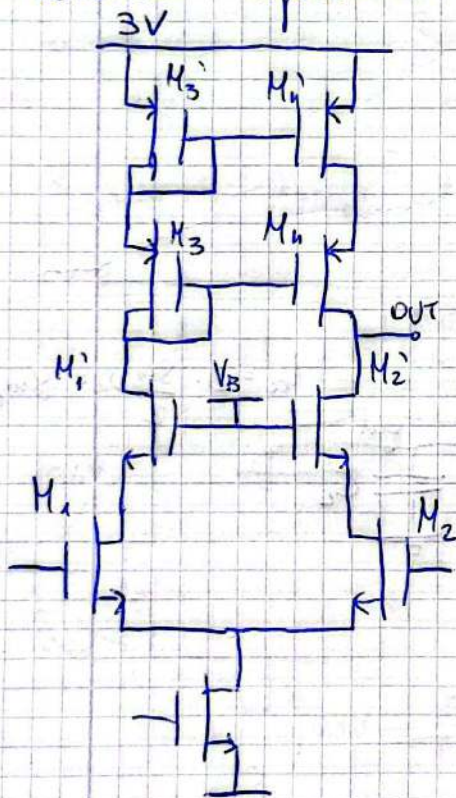
Dal drain di M_2' si vede la resistenza vista dal source verso il bias di M_2' moltiplicata per μ .
 Quindi dal drain di M_2' si vede una resistenza pari a: $\mu \cdot 2 \cdot R_{o2}$.

Dobbiamo però considerare l'effetto della retroazione:
 $G_{loop} = -1 \Rightarrow$ la resistenza vista dal drain di M_2' considerando il loop vale: $\frac{\mu \cdot 2 \cdot R_{o2}}{1 - G_{loop}} = \frac{\mu \cdot 2 \cdot R_{o2}}{2} = \mu R_{o2}$

Quindi in definitiva: $R_{out} = g_{m1} R_{o2}^2 \parallel g_{m1} R_{on}^2$ e
 $G_d = g_{m1} (g_{m1} R_{o2}^2 \parallel g_{m1} R_{on}^2)$

$\Rightarrow$ il guadagno vale $\frac{g_{m1}^2 R_{o2}^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}$; siamo riusciti a ottenere un guadagno proporzionale a μ^2 utilizzando un solo stadio.

Circuito definitivo:



il problema di questo circuito è nel numero di transistori in cascata che richiede un ampio voltage range.

Calcoliamo qual è il voltage range necessario, supponendo un valore di

V_{ov} pari a: $0,1V$ e $V_T = 0,6V$

Calcoliamo dapprima l'input common mode range:

se V_{in} sale, la tensione V_{GS} dei transistori di input sale $0,7V$ mentre la tensione V_{DS} del transistor di coda sale $0,1V$. Perciò

$$V_{CM, min} = 0,8V.$$

Se V_{CM} sale, i transistori M_1 e M_2

devono rimanere in saturazione, perciò $V_{GS1} = 0,7$ e $V_{DS1} = 0,6$; da cui $V_{CM, max} = V_B - 0,7V + 0,6V = V_B - 0,1V$

Calcoliamo ora il range dell'output:

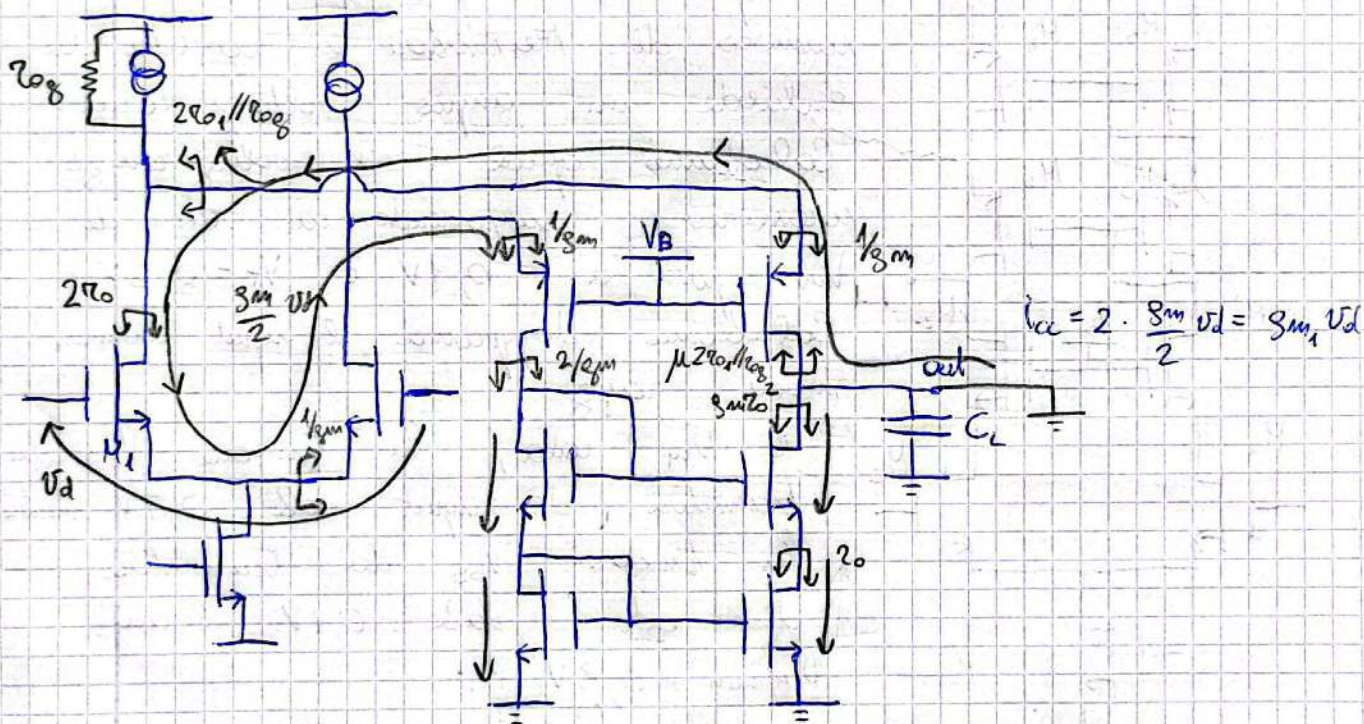
se out scende, M_2 deve rimanere in saturazione, perciò $V_{out, min} = V_B - 0,6V$.

Calcoliamo ora $V_{out, max}$: M_3 ha una tensione di comando

di $0,7V \Rightarrow$ lo stesso per M_n visto che portano la stessa corrente. Anche M_3 ha una tensione di comando di $0,7V$ e lo stesso per M_n .
Però il gate di M_3 ha tensione pari a $2,3V \Rightarrow$ anche il drain di M_3 è a $2,3V$ e lo è anche il drain di M_n . Ora $V_{SD_n} = 0,1V \Rightarrow V_{out, max} = 2,2V$

γ_L valore di V_b va a modificare il range di ingresso e unità. γ_R valore va scelto a seconda delle applicazioni. γ_{in} particolare V_b è tale che aumentare il range in input, riduce quello in output.

l'alternativa per migliorare il problema del range è la seguente:



Se in ingresso c'è segnale differenziale, $i_{cc} = g_{m1} v_d$.
 Abbiamo ora calcolare R_{out} per poter poi calcolare G_d .

Anche in questo caso c'è un loop. Però in questo caso $G_{\text{loop}} \neq -1$ perché c'è una partizione di corrente: una parte va in M_1 , l'altra va

la partizione ha espressione: $\frac{r_{0g}}{r_{0g} + 2r_0}$, per θ .

$G_{loop} = - \frac{r_{o3}}{r_{o3} + 2r_{o1}}$, Brevi questo loop va a influire sul valore di $R_{out,up}$ che quindi vale:

$$R_{out,up} = \frac{\mu r_{o3} \parallel 2r_{o1}}{1 + \frac{r_{o3}}{r_{o3} + 2r_{o1}}} = \frac{\mu r_{o3} \parallel 2r_{o1}}{2(r_{o3} + r_{o1})} = \mu (r_{o3} \parallel r_{o1})$$

dove $R_{out,up}$ è la resistenza d'uscita vista verso l'alto, tenendo conto anche dell'effetto di G_{loop} .

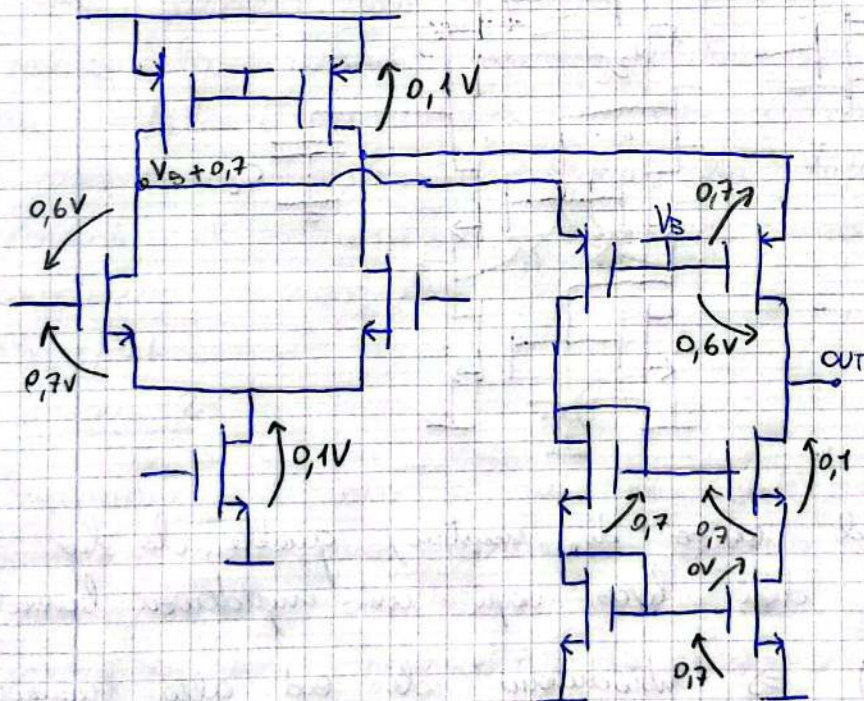
$R_{out,up}$ è dell'ordine di $\mu \frac{r_{o3}}{2} \Rightarrow g_m \frac{r_{o3}^2}{2}$.

Mentre $R_{out,down} = g_m r_{o3}^2 \Rightarrow R_{out} = R_{out,up} \parallel R_{out,down} = g_m \frac{r_{o3}^2}{3}$. Da cui: $G_d = \frac{g_m^2 r_{o3}^2}{3} = \frac{\mu^2}{3}$ che è un

guadagno dell'ordine di μ^2 come desiderato.

Calcoliamo ora i range di input e output nel caso di segnale di modo comune, con $V_{ov} = 0,1V$

$$V_{CH,min} = V_{DS,soda} + V_{DS,1} = 0,1V + 0,7V = 0,8V$$



seguendo le tensioni nel diagramma:

$$V_{CH,max} = 0,6V + V_B + 0,7V =$$

$$= V_B + 1,3V$$

$$V_{out,min} = 0,7V + 0V + 0,7V + 0,1V = 0,8V$$

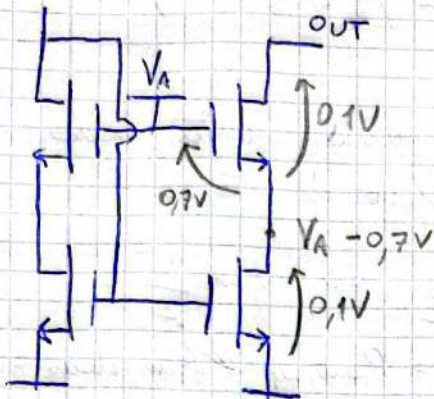
$$V_{out,max} = V_B + 0,6V$$

Ora, al contrario di prima, aumentando V_B aumentiamo sia il range in input che il range in output.

$$V_{B,max} = 3V - 0,1V - 0,7V = 2,2V \quad \text{e} \quad V_B = 2,2V$$

$$V_{out, max} = 2,8V \quad e \quad V_{in, max} = 3V.$$

possiamo aumentare ulteriormente il range di V_{out} , riducendo $V_{out, min}$ modificando la struttura dello specchio di corrente.

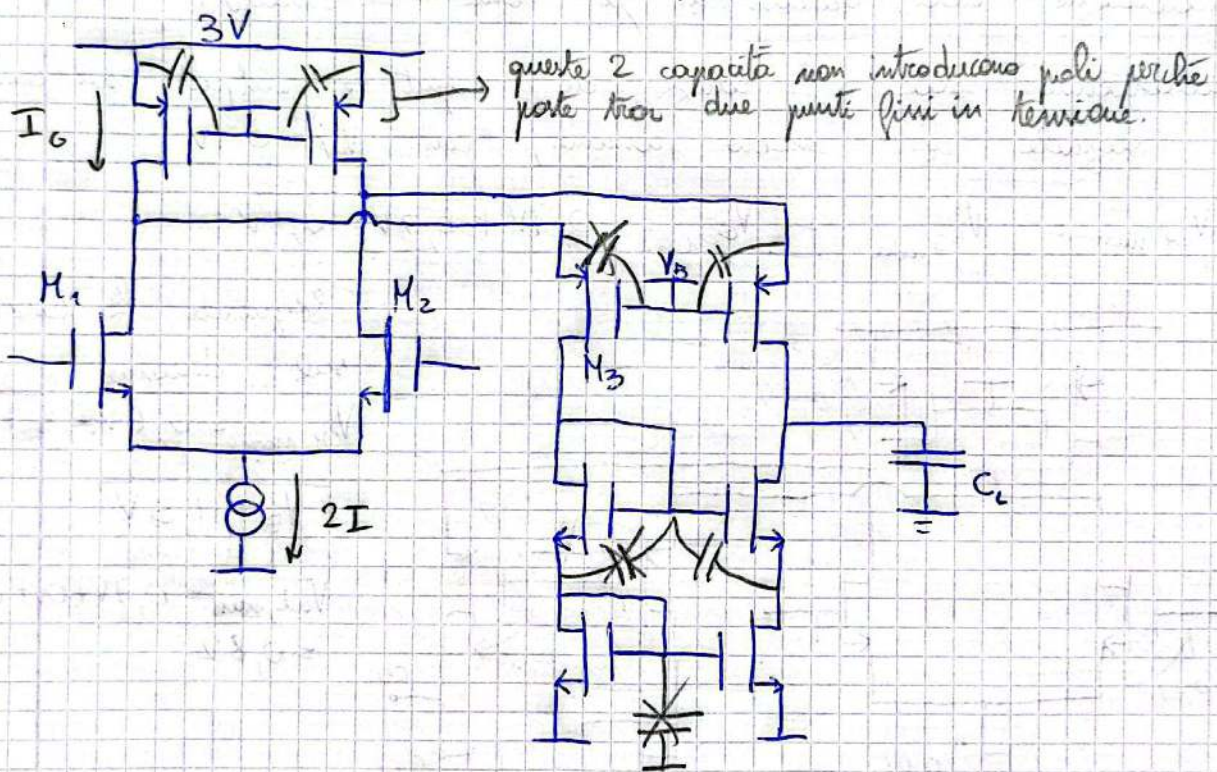


In questo caso $V_{A, min} = 0,8V$ e

$$V_{out, min} = 0,2V.$$

Funziona ancora come specchio di corrente

Studiamo ora la risposta in frequenza del circuito:



Le capacità C_{gs} del ramo di sinistra, quelle che ho eliminato, vedono dai loro capi un'impedenza bassa (dell'ordine di $1/g_m$) $\Rightarrow$ introducono poli ad alta frequenza e possiamo non considerarle.

Dobbiamo quindi calcolare i poli delle 2 capacità C_{gs} rimaste e della capacità C_L . Usiamo il time constant method.

Partiamo calcolando f_L : C_L attiva e le due C_{gs} .

circuiti aperti, C_{gs} attiva e le altre due circuiti aperti, l'altra C_{gs} attiva e le altre due circuiti aperti.
Brevi:

$$f_L = \frac{1}{2\pi \left[C_L \underbrace{\frac{g_{m1} r_o^2}{3}}_{R_{out}} + C_{gs} \underbrace{r_o}_{\substack{\uparrow \\ \text{quella} \\ \text{in alto}}} + C_{gs} \underbrace{\frac{r_o}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{quella} \\ \text{in basso}}} \right]}$$

trascurabile

Per calcolare il polo ad alta frequenza, C_L è un cortocircuito e ora le C_{gs} vedono un'impedenza bassa dai loro capi. Quindi in definitiva il circuito ha un solo polo a frequenza $\frac{1}{2\pi C_L R_{out}}$

$$G(0) = g_{m1} R_{out} ; \quad f_p = \frac{1}{2\pi C_L R_{out}} \Rightarrow GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C_L}$$

$\Rightarrow$ non ci sono problemi di compensazione, si è raggiunto un buon guadagno. Cosa negativa: la gestione delle diverse alimentazioni.

Inoltre la corrente dei generatori non è condivisa da tutti i transistori. Per i due transistori di input serve una corrente differente da tutti gli altri, e quindi il circuito consuma una quantità di corrente complessiva maggiore.

19/11/24

Lezione 21

Supponiamo il caso in cui il gate di M_1 salga in tensione di una quantità elevata, maggiore della tensione di overdrive. M_2 si spegne e tutta la corrente del generatore di coda serve per M_1 .

Per M_1 serve $2I$. Se I_0 (corrente per il transistor in alto a M_1) è minore di $2I$, la corrente mancante dovrebbe provenire dal circuito di destra. Ma M_3 è un pMOS, non può fornire corrente in quella direzione, poiché il drain di M_1

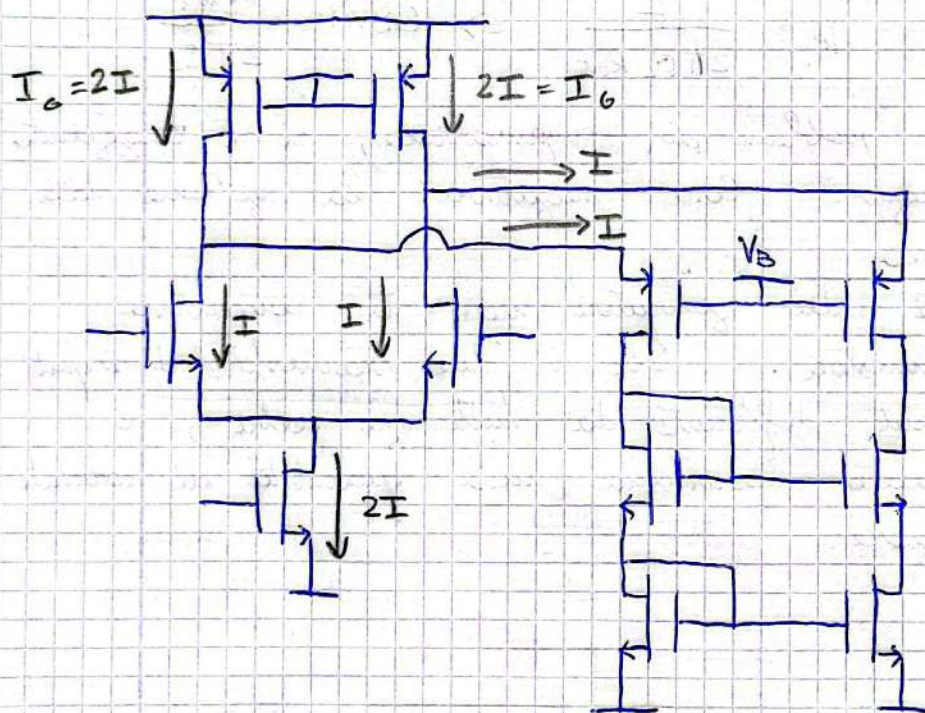
rende inevitabilmente in tensione causando lo spegnimento di M_3 .

Se non può provenire corrente dalla parte di circuito di destra, succede che M_1 e il transistor del generatore di coda vanno a operare in zona ohmica.

25/11/24

Supponendo poi di ripristinare una tensione in ingresso ragionevole, che a regime consenta ai transistori di operare in saturazione, serve un po' di tempo affinché questi tornino effettivamente a operare in saturazione.

Quindi la soluzione è che $I_0 = 2I$ e ogni transistorore ha corrente di polarizzazione pari a I .



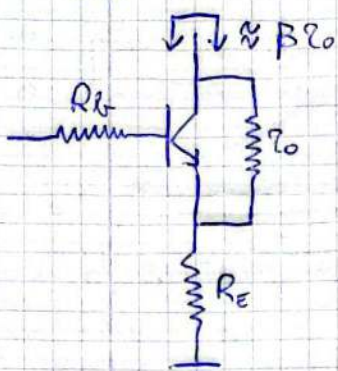
Però complessivamente serve una corrente pari a $4I$
 Confrontiamo tra le tre strutture:

Teleopic cascode: $G = \mu^2/2$; $P = 2IV^+$; limited range
 Folded cascode: $G = \mu^2/3$; $P = 2 \cdot 2IV^+$; extended range
 Two stages: $G = \mu^2/4$; $P = 2I_1V^+ + I_2V^+$; optimal range

Studiamo ora il caso con i BST:

inciso e promemoria prima di cominciare:

dato un BJT



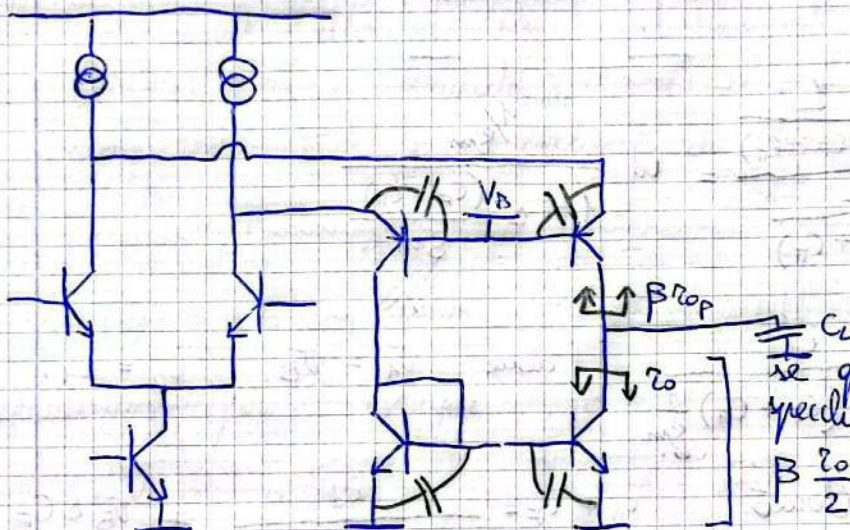
la resistenza vista dal collettore vale:

$$r_o \left(1 + \beta \frac{R_E}{R_E + R_B^*} \right)$$

dove $R_B^* = R_B + r_{\pi}$

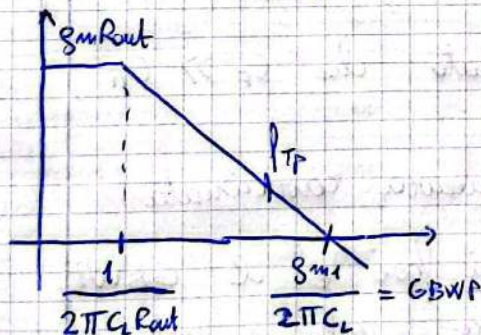
se $R_E \gg R_B^*$ allora la resistenza diventa βr_o

se circuito con i BJT diventa:

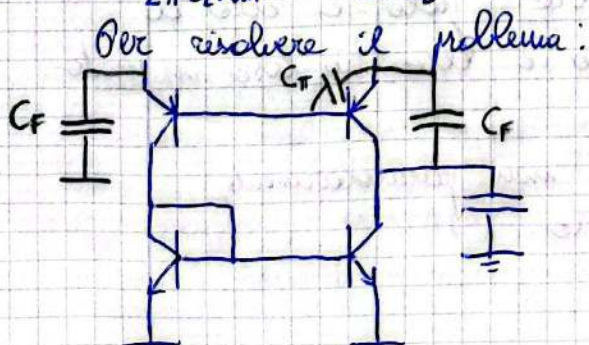


se qua massimo uno specchio di Wilson, vedremo $\beta \frac{r_o}{2}$

ha capacità C_L introduce il polo dominante a bassa frequenza, $f_L = \frac{1}{2\pi C_L R_{out}}$ le varie capacità poste tra base ed emettitore introducono poli a frequenza una pari a $f_r = \frac{g_m}{2\pi C_{\pi}}$ Bisogna ricordare che $f_{T_{out}} < f_{T_{in}}$

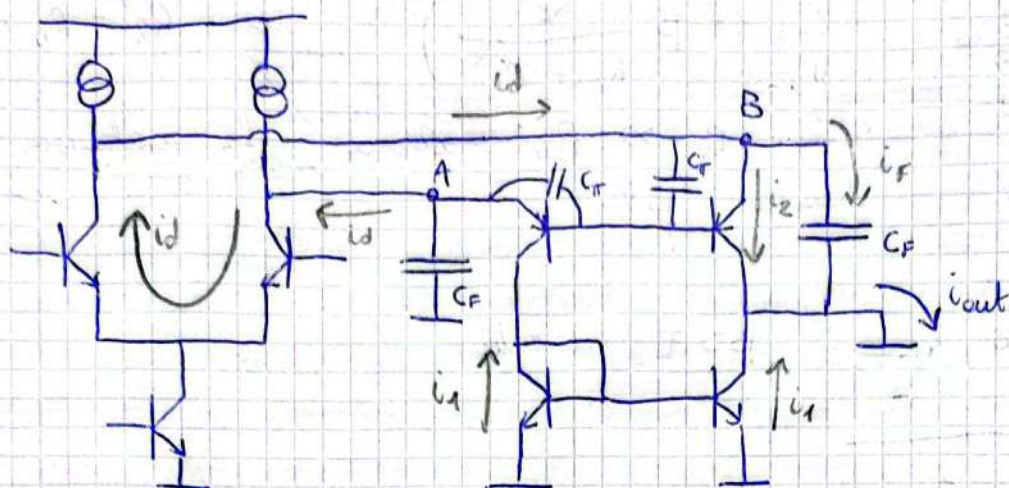


Sotrebbe quindi succedere che f_{TA} è minore di GBWP.



dobbiamo fare in modo che ad alta frequenza il segnale non passi per C_{π} , per farlo introduciamo un condensatore tra l'emitter e il ramo d'uscita, chiamo C_F questa capacità. ha stessa C_F

si perveniva anche tra l'emitter del ramo di sinistra e massa. Il circuito è:



$$v_B = i_d \frac{\frac{1}{g_m} \cdot \frac{1}{s(C_F + C_\pi)}}{\frac{1}{g_m} + \frac{1}{s(C_F + C_\pi)}} = i_d \frac{\frac{1}{g_m}}{1 + s \frac{(C_F + C_\pi)}{g_m}}$$

$$i_1 = \frac{v_A}{1/g_m} = \frac{i_d}{1 + s(C_F + C_\pi) \frac{1}{g_m}} \quad \text{dove } v_A = v_B, \quad i_2 = i_1.$$

$$i_F = v_B s C_F \quad \text{però} \quad i_2 + i_F = \frac{i_d}{1 + s(C_F + C_\pi) \frac{1}{g_m}} + v_B s C_F =$$

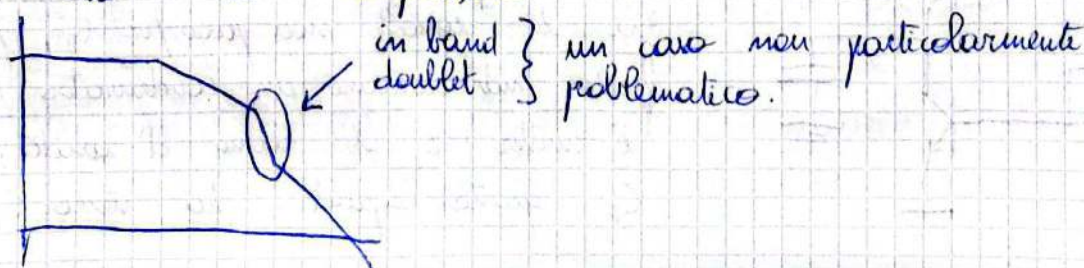
$$= i_d \frac{1 + s C_F \frac{1}{g_m}}{1 + s(C_F + C_\pi) \frac{1}{g_m}} \quad i_{out} = i_1 + i_2 + i_F, \quad \text{però}$$

$$i_{out} = 2 i_d \frac{1 + s C_F \frac{1}{2g_m}}{1 + s(C_F + C_\pi) \frac{1}{g_m}}; \quad i_d = v_d \frac{g_m}{2} \Rightarrow 2i_d = g_m v_d$$

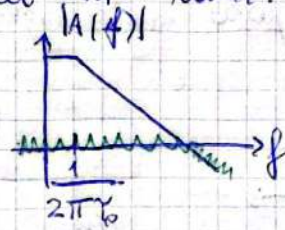
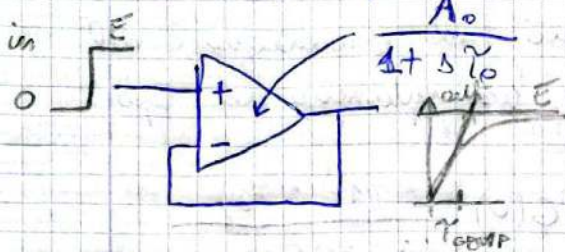
$$\Rightarrow i_{out} = g_m v_d \frac{1 + s C_F \frac{1}{2g_m}}{1 + s(C_F + C_\pi) \frac{1}{g_m}} \quad \text{dato che } C_F \gg C_\pi,$$

polo e zero si trovano a frequenza ravvicinata.

Per non degradare il margine di fase e il GBWP, dobbiamo aumentare C_F per muovere polo e zero a bassa frequenza e avvicinare polo e zero tra loro in modo tale che si compensino.



Verifichiamo gli effetti del doublet in band:



non $G_{buffer} = A(f)$

L'effetto della configurazione a buffer è ridurre il guadagno in DC a 1 e portare il polo al GBWP.

$$G_{buffer}(s) = \frac{1}{1 + s\gamma_{GBWP}}$$

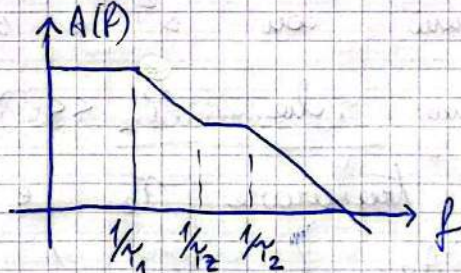
Se in input diamo un gradino di ampiezza per esempio pari a 1V, in uscita c'è un'esponenziale crescente di ampiezza E con costante di tempo pari a γ_{GBWP} , dove $\gamma_{GBWP} = \frac{\gamma_0}{A_0}$

$$E - v_{out}(t) = E e^{-t/\gamma_{GBWP}} ; E - v_{out}(t) = \Delta \text{ per } t = \gamma_{GBWP} \log \frac{E}{\Delta}$$

Supponiamo per esempio: $E = 1V$, $GBWP = 100 \text{ MHz}$ e $\Delta = 1 \text{ mV}$ allora $\gamma_{GBWP} = 1,6 \text{ ns}$ e $t = 7 \gamma_{GBWP} = 11 \text{ ns}$

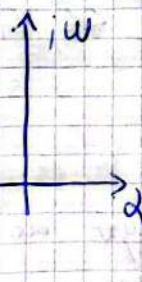
Supponiamo ora il caso in cui l'amplificatore ha un polo dominante e poi un doublet polo-zero, perciò $A(s)$ ha espressione:

$$A(s) = \frac{A_0 (1 + s\gamma_z)}{(1 + s\gamma_1)(1 + s\gamma_2)}$$

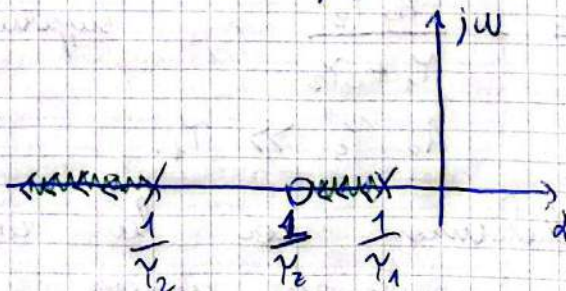


Root locus:

nel caso di singolo polo:



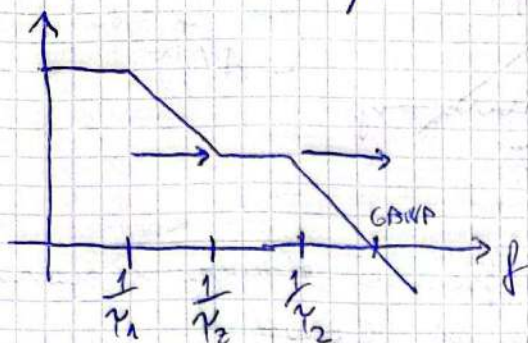
nel caso di 2 poli e 1 zero



⇒ Nel buffer, con $A(s)$

del secondo caso, il 1° polo si muove verso lo zero

e il secondo polo si muove verso il GBWP.



Ovvero il guadagno del buffer ha espressione del tipo:

$$G(s) = G(0) \frac{(1 + s\tau_2)}{(1 + s\tau_L)(1 + s\tau_H)}$$

Per calcolare dove sono i poli τ_L e τ_H , dobbiamo risolvere l'equazione $G_{\text{loop}}(s) = -1$

Ovvero in questo caso dobbiamo risolvere l'equazione:

$$-\frac{A_0(1 + s\tau_2)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} = 1 \Rightarrow -A_0(1 + s\tau_2) = -(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)$$

ottenendo così un'equazione di secondo grado:

$$s^2 \tau_1 \tau_2 + s(\tau_1 + \tau_2 + A_0 \tau_2) + A_0 + 1 = 0$$

Per frequenze basse il termine s^2 è trascurabile, quindi possiamo approssimare il primo polo con:

$$p_1 \approx -\frac{A_0 + 1}{A_0 \tau_2 + \tau_1 + \tau_2} \quad p_2 \approx -\frac{A_0 \tau_2 + \tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} \quad ; \quad p_2 \text{ si}$$

calcola tenendo conto che ad alte frequenze sopravvivono solo i termini con s^2 e s .

Ci aspettiamo che $\tau_2 \ll \tau_1$ dato che $\frac{1}{\tau_2} \gg \frac{1}{\tau_1}$.

$\Rightarrow$ possiamo trascurare τ_2 e $+1 \Rightarrow p_1$ diventa:

$$p_1 \approx -\frac{A_0}{A_0 \tau_2 + \tau_1} = -\frac{1}{\tau_2 + \frac{\tau_1}{A_0}} \quad \text{Mentre } p_2 \text{ diventa:}$$

$$p_2 \approx -\frac{A_0 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \quad , \quad \text{supponendo che } \tau_2 \ll \tau_1 \text{ e anche}$$

che $A_0 \tau_2 \gg \tau_1$.

Calcoliamo ora la risposta nel tempo di un gra =
dino dato in ingresso.

Se in ingresso diamo un gradino di ampiezza E ,
l'espressione di V_{out} nel dominio di Laplace sarà:

$$V_{out}(s) = \frac{E}{s} \frac{(1 + s\tau_z)}{(1 + s\tau_L)(1 + s\tau_H)} = \frac{E}{s} \left[\frac{A}{1 + s\tau_L} + \frac{B}{1 + s\tau_H} \right]$$

Il termine $\frac{E}{s} \frac{A}{1 + s\tau_L}$ corrisponde a un esponenziale
nel dominio del tempo: $E[A(1 - e^{-t/\tau_L})]$



Mentre tutto V_{out} avrà espressione nel dominio del
tempo pari a:

$E[A(1 - e^{-t/\tau_L}) + B(1 - e^{-t/\tau_H})]$ dobbiamo quindi calcolare
i coefficienti A e B : partendo dall'equazione

$$\frac{(1 + s\tau_z)}{(1 + s\tau_L)(1 + s\tau_H)} = \frac{A}{1 + s\tau_L} + \frac{B}{1 + s\tau_H}, \text{ moltiplichiamo tutto}$$

per $(1 + s\tau_L)$ e poi calcoliamo $\lim_{s \rightarrow -1/\tau_L}$ che corrisponde a $\lim_{1 + s\tau_L \rightarrow 0}$:

$$\lim_{s \rightarrow -1/\tau_L} \frac{(1 + s\tau_z)(1 + s\tau_H)}{(1 + s\tau_L)(1 + s\tau_H)} = \lim_{s \rightarrow -1/\tau_L} \left[\frac{A(1 + s\tau_H)}{(1 + s\tau_L)} + \frac{B(1 + s\tau_H)}{(1 + s\tau_H)} \right] \Rightarrow$$

$\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{\tau_L - \tau_z}{\tau_L - \tau_H} = A \quad \text{Per calcolare } B \text{ si fa lo stesso}$$

ragionamento, ma:

$$\lim_{s \rightarrow -1/\tau_H} \frac{(1 + s\tau_z)(1 + s\tau_H)}{(1 + s\tau_L)(1 + s\tau_H)} = \lim_{s \rightarrow -1/\tau_H} \left[\frac{A(1 + s\tau_H)}{1 + s\tau_L} + \frac{B(1 + s\tau_H)}{1 + s\tau_H} \right] \Rightarrow$$

$\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \frac{\tau_H - \tau_z}{\tau_H - \tau_L} = B \quad \text{Per cui in definitiva:}$$

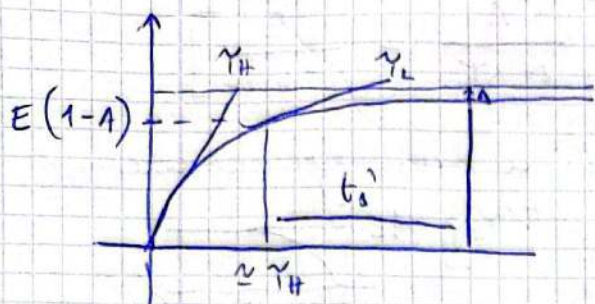
$$A = \frac{\tau_L - \tau_z}{\tau_L - \tau_H} \quad \text{e} \quad B = \frac{\tau_z - \tau_H}{\tau_L - \tau_H} \quad \text{Considerazioni:}$$

$A + B = 1$. Per cui $V_{out}(t)$ può essere scritto

$$\text{come: } V_{out}(t) = E \left[1 - A e^{-t/\tau_L} - B e^{-t/\tau_H} \right]$$

$$V_{out}(0) = E[1 - A - B] = E(1 - 1) = 0$$

Per $t = \infty$: $V_{out}(\infty) = E$



Ci sono due costanti di tempo e il transitorio è diviso in due parti:

il primo con costante di tempo τ_H fino all'istante $\approx \tau_H$,
il secondo con costante di tempo τ_L .

Possiamo stimare il sampling time t_s :

$$t_s = \tau_H + \underbrace{\tau_L \log \frac{EA}{\Delta}}_{t_s'} ; \quad t_s' \text{ soddisfa l'equazione:}$$

$$EA e^{-t_s'/\tau_L} = \Delta$$

Abbiamo capito qual è la posizione più conveniente per lo zero.

$$p_1 \approx -\frac{1}{\tau_z - \frac{\tau_1}{A_0}} = -\frac{1}{\tau_L} \quad \text{Perché } \tau_L - \tau_z = \frac{\tau_1}{A_0}$$

Mentre $\tau_L - \tau_H \approx \tau_L$ dato che $\tau_L \gg \tau_H$, inoltre τ_L è vicino allo zero. Perché:

$$A = \frac{\tau_L - \tau_z}{\tau_L - \tau_H} \approx \frac{\tau_1/A_0}{\tau_z} = \frac{f_z}{GBWP} \quad \text{infatti } GBWP = \frac{A_0}{\tau_1}$$

Se lo zero è vicino al GBWP, $A \approx 1$ e quindi tutto il transitorio si sviluppa con costante di tempo pari a τ_L .

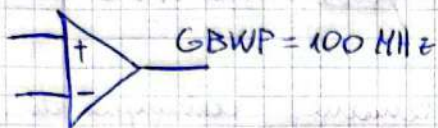
Se non è così, una parte si sviluppa con τ_H e la rimanente con τ_L .

Nei primi casi, f_z si muove verso lo zero, se lo zero è vicino al GBWP, allora anche f_z è vicino al GBWP $\Rightarrow \tau_L \approx \tau_{GBWP} \Rightarrow$ il circuito è veloce.

Se invece allontaniamo τ_z da GBWP, anche τ_L si allontana.

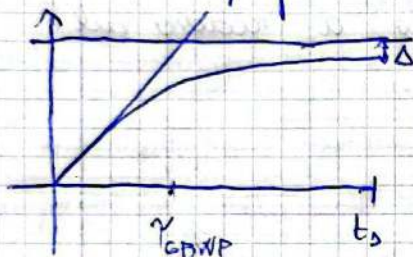
Quindi nel secondo caso è vero che faccio una prima parte rapida con γ_H , ma la seconda parte con γ_L la faccio lenta.

La situazione migliore è posizionare lo zero vicino al GBWP. È vero che praticamente tutto il transitorio si sviluppa con γ_L , ma γ_L è veloce. Facciamo qualche esempio numerico.



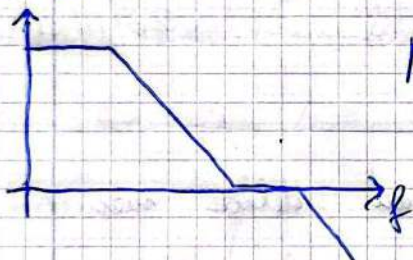
Consideriamo un amplificatore con $GBWP = 100 \text{ MHz}$

Se l'amplificatore è usato come buffer $\gamma_{GBWP} = 1,6 \text{ ns}$.

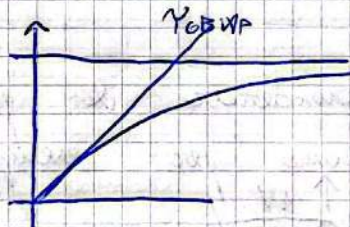


per raggiungere $\Delta = 1 \text{ mV}$, sono necessarie circa $7 \gamma_{GBWP} \approx 11 \text{ ns}$.

Supponiamo ora un amplificatore con uno zero vicino al GBWP:

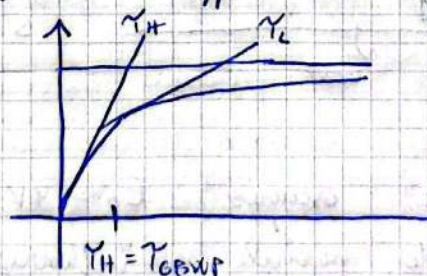
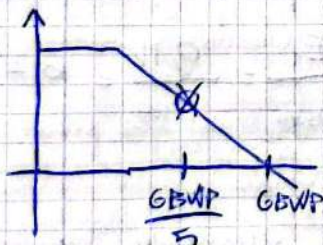


$$\text{perciò } A = \frac{f_z}{GBWP} \approx 1$$



quasi tutto il transitorio è svolto con $\gamma_L = \gamma_{GBWP}$ che non è quindi lento.

Se invece poniamo lo zero a un quinto del GBWP: (con sovrapposizione di polo e zero)



Prima parte con $\gamma_H = \gamma_{GBWP}$ $\Rightarrow$ parte veloce

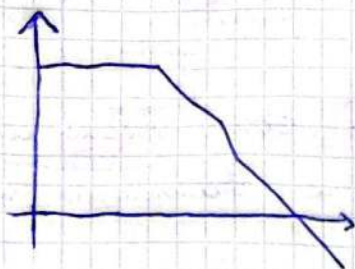
Mentre l'ultima parte ha una costante di

tempo 5 volte maggiore di $\gamma_{GBWP} \Rightarrow$ più lenta.

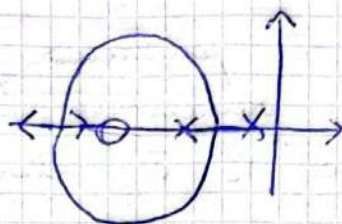
$$t_s = \gamma_{GBWP} + 5 \gamma_{GBWP} \log \frac{E/5}{\Delta} \quad \left. \begin{array}{l} \text{parte coperta dalla seconda parte} \\ \Delta \end{array} \right\} 1 \text{ mV}$$

si ottiene $t_s = 43 \text{ ns}$ che è maggiore del caso precedente

Supponiamo ora il caso in cui il polo sia prima dello zero:

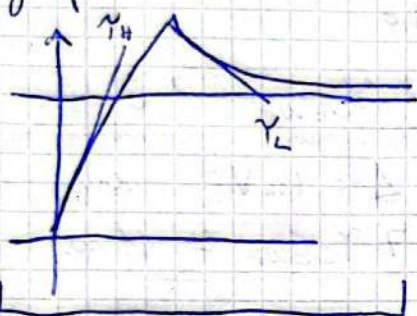


ha root locus $\bar{s}$:



Il transitorio $\bar{s}$ è sempre diviso in 2 parti, ma $A > 1$.

Graficamente è:



Il concetto rimane comunque di evitare il doppietto in banda, ma posizionarlo a ridosso del GBWP.

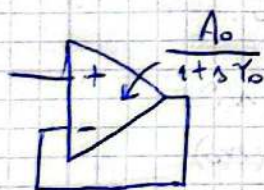
anche questo caso con il transitorio diviso in due parti è più lento

20/11/24

26/11/24

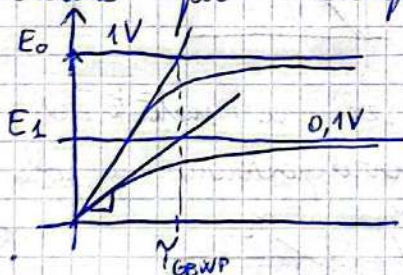
Lezione 22

A Abbiamo anche considerare il problema della non linearità. Consideriamo per esempio:



$$GBWP = 100 \text{ MHz}$$

$$\gamma_{GBWP} = 16 \text{ ns}$$



La pendenza s nella fase iniziale vale:

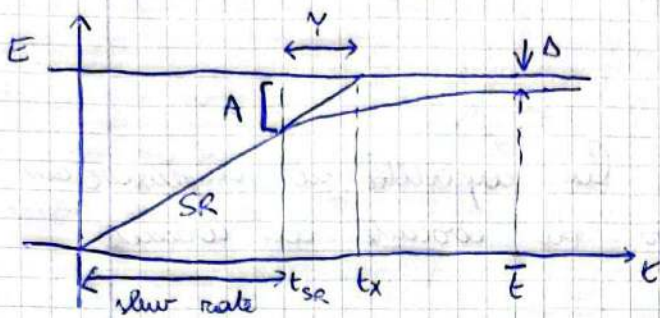
$$s = \frac{E_1}{\gamma_{GBWP}} = \frac{0,1V}{16 \text{ ns}} = 6,2 \text{ V}/\mu\text{s}$$

Se E aumenta, per esempio $E_0 = 1V$, aumenta anche la pendenza del tratto iniziale. Tuttavia c'è un limite alla pendenza massima della tensione che l'amplificatore può fornire in uscita, questo è chiamato SR e va a influire sulla risposta lineare dell'amplificatore.

$\Rightarrow$ se la risposta supera in pendenza lo SR,

$V_{out}(s)$ avrà pendenza limitata dallo SR finché la risposta lineare ha pendenza $\leq$ a SR.

Supponiamo il caso di un'unità limitata dallo SR:



$$t_x = \frac{E}{SR}$$

$$t_{SR} = \frac{E}{SR} - Y$$

Quanto A è l'ampiezza rimanente per raggiungere E al tempo $t = t_{sr}$. h è invece rimanente tra E e $v_{out}(s)$ nel tratto successivo a t_{sr} , ha espressione:

E - $v_{out}(t > t_{sr}) = A e^{-\frac{t - t_{sr}}{\tau}}$ chiamo $\bar{t}$ l'istante di tempo in cui l'errore raggiunge il valore Δ .

$$A e^{-\frac{\bar{E} - t_{SR}}{\gamma}} = \Delta \Rightarrow \bar{E} - t_{SR} = \gamma \ln \frac{A}{\Delta} \quad \text{Abbiamo calcolato}$$

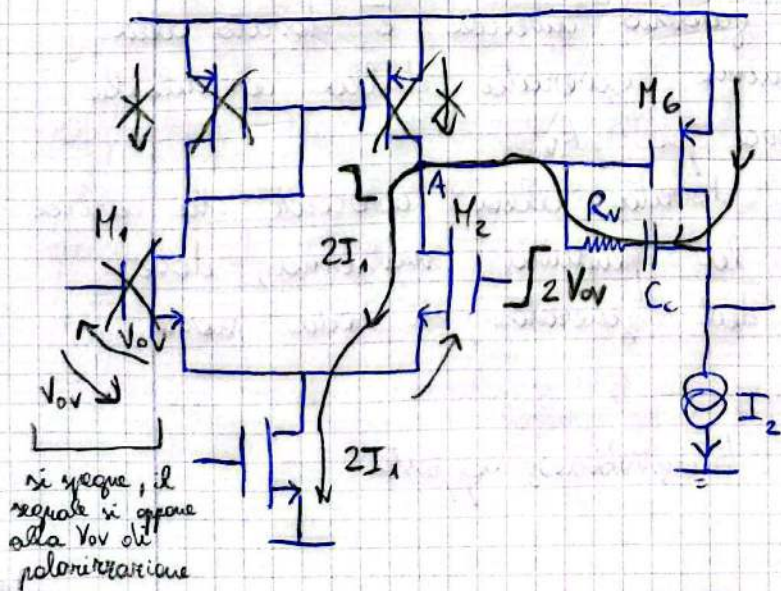
quante volte A : A corrisponde al punto in cui la
risposta lineare ha pendenza pari allo SR; perciò

$$\frac{A}{\gamma} = SR \Rightarrow A = \gamma \cdot SR$$

possiamo quindi calcolare il sampling time come:

$$t_{\text{soH}} = \underbrace{\left(\frac{E}{SR} - \gamma \right)}_{t_{\text{SR}}} + \underbrace{\gamma \ln \frac{SR \cdot \gamma}{\Delta}}_{\bar{E} - t_{\text{SR}}}$$

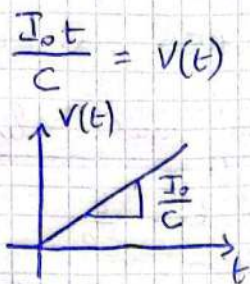
Stesiamo da ora e dov'è la limitazione dello SRint:



studiamo il caso di un
circolo a due stadi.

ha risposta ϵ limitata
dallo SR ogni volta
che un generatore di corrente
finita carica un condensatore.

Infatti:



Nel caso del circuito in esame, la capacità di compensazione è caricata da un generatore di corrente con corrente limitata.

Supponiamo di dare in ingresso al gate di M_2 un segnale elevato, dell'ordine della tensione di overdrive. In tal caso M_1 si spegne e tutta la corrente del generatore di coda scorre per M_2 .

Se M_1 è spento, allora è spento anche lo specchio di corrente e tutta la corrente per M_2 scorre verso il secondo stadio. Nel transitorio, C_c è un corto circuito $\Rightarrow$ la corrente scorre attraverso R_N .

Il nodo A scende in tensione. La corrente I_2 è fissata $\Rightarrow$ la corrente in eccesso scorre per M_6 .

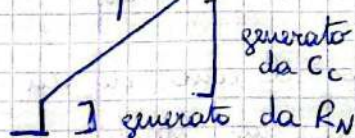
Però la corrente di segnale per M_6 vale $2I_1$.

La tensione al nodo A scende di un valore pari a:

$$V_A = - \frac{2I_1}{g_{m6}}$$

e ha un valore finito, perciò la tensione viene

con pendenza: $\frac{2I_1}{C}$ $V_{out}(t)$ avrà andamento:



Il gradino iniziale è dovuto alla tensione generata dalla corrente che scorre in R_N .

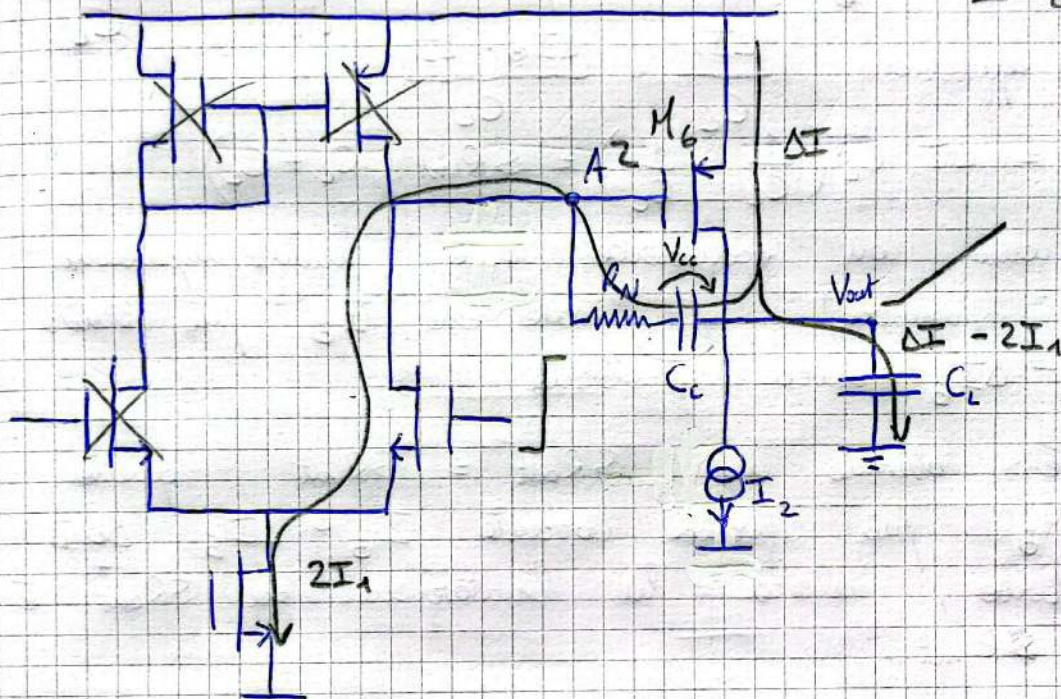
La rampa successiva è dovuta alla corrente che carica la capacità. Questa è la pendenza massima, dove tutta la corrente disponibile dal generatore di coda scorre per C_c .

Vediamo cosa succede nella transizione opposta.

B Consideriamo ora la presenza di un carico capacitivo C_L connesso al nodo d'uscita. In questo modo possiamo calcolare lo slew rate esterno SR_{ext} .

Proviamo a calcolare SR_{ext}^+ . Supponiamo di dare in ingresso a M_2 un gradino ampio, dell'ordine di $2V_{ov}$. M_1 si spegne, si spegne anche lo specchio di corrente. Il nodo A è in tensione.

— corrente di segnale



Se il nodo A è in tensione, alla corrente di polarizzazione di I_6 si aggiunge una componente di segnale pari a ΔI_6 . Per C_L e R_v nuove corrente del generatore di coda pari a $2I_1$.

I_2 non cambia $\Rightarrow$ per C_L nuova corrente $\Delta I_6 - 2I_1$.

Assumiamo che V_A raggiunga una condizione stazionaria, allora la variazione di V_{out} deve essere pari alla variazione della tensione V_{C_L} ai capi di C_L . Se V_{out} ha andamento a rampa crescente dovuto alla corrente $\Delta I_6 - 2I_1$ che carica C_L , allora anche V_{C_L} dovrà avere lo stesso andamento a rampa.

La tensione V_{C_L} è dovuta a $2I_1$ che carica

C_c , perciò $\frac{dV_{Cc}}{dt} = \frac{2I_1}{C_c} = SR_{int}$.

Dato che $\frac{dV_{Cc}}{dt}$ deve essere uguale a $\frac{dV_{out}}{dt}$ per avere V_A costante, allora:

$$\frac{dV_{Cc}}{dt} = \frac{dV_{out}}{dt} \Rightarrow \frac{2I_1}{C_c} = \frac{\Delta I_6 - 2I_1}{C_L}, \text{ ricordando che}$$

per C_L serve $\Delta I_6 - 2I_1$ e quindi $\frac{dV_{out}}{dt} = \frac{\Delta I_6 - 2I_1}{C_L}$

Risolvendo l'equazione $\frac{2I_1}{C_c} = \frac{\Delta I_6 - 2I_1}{C_L}$ si

$$\text{ottiene: } \Delta I_6 = 2I_1 C_L \left(\frac{1}{C_L} + \frac{1}{C_c} \right) = SR_{int} (C_c + C_L)$$

Svolgendo i conti con grandezze solite (inutile impararsi a memoria i numeri) si vede che M_6 può fornire corrente $I_6 + \Delta I_6$ senza problemi.

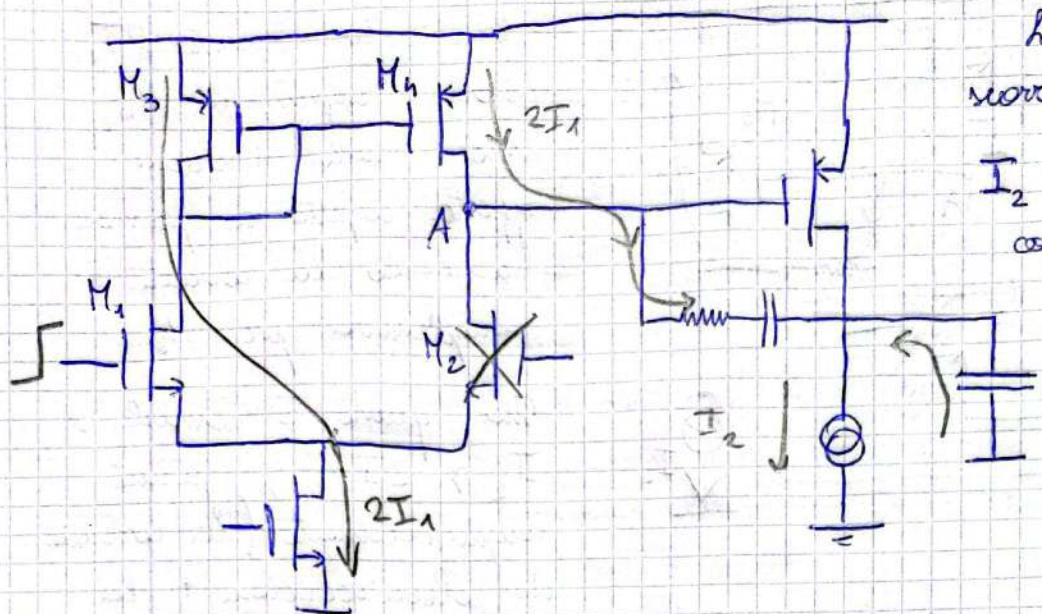
Perciò si è ottenuto che: $SR_{out}^+ = SR_{int}$, questo vale se M_6 può fornire corrente $I_6 + \Delta I_6$. Dato che può farlo, allora la limitazione su SR_{out}^+ è dovuta a SR_{int} .

C Consideriamo ora lo slew rate esterno negativo SR_{ext}^- : V_{out} in questo caso è decrescente quindi la corrente per C_L scorre verso l'alto, verso il circuito.

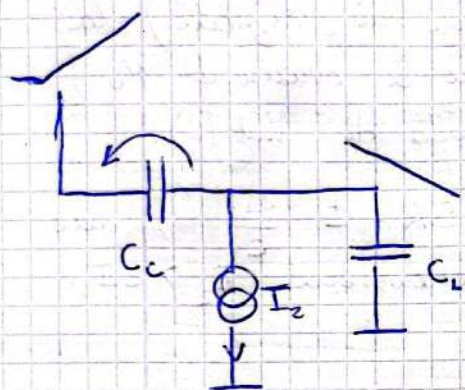
$$\Delta I_C$$

affinché M_6 rimanga acceso: $\left[2I_1 + \frac{2I_1}{C_L} \right] C_L < I_2$
che è una condizione più stringente per $\frac{C_L}{I_2}$, necessitiamo
quindi di una corrente di bias superiore.

Supponiamo che C_L è troppo grande, la condizione per I_2 non è verificata e quindi M_6 è spento.



la corrente che
scorre per C_L vale:
 $I_2 - 2I_1$. La
corrente per C_L è
piccola e quindi
l'andamento
temporale della
tensione ai
capi di C_L ha
una pendenza
minore.



Ai capi di C_C anche la tensione
ha andamento a rampa. Perciò
se M_6 è spento, il nodo A ha
andamento a rampa nel tempo.
Il problema è che se $-V_A$ cresce,
il transistor posto sopra il nodo A
va in zona ohmica.

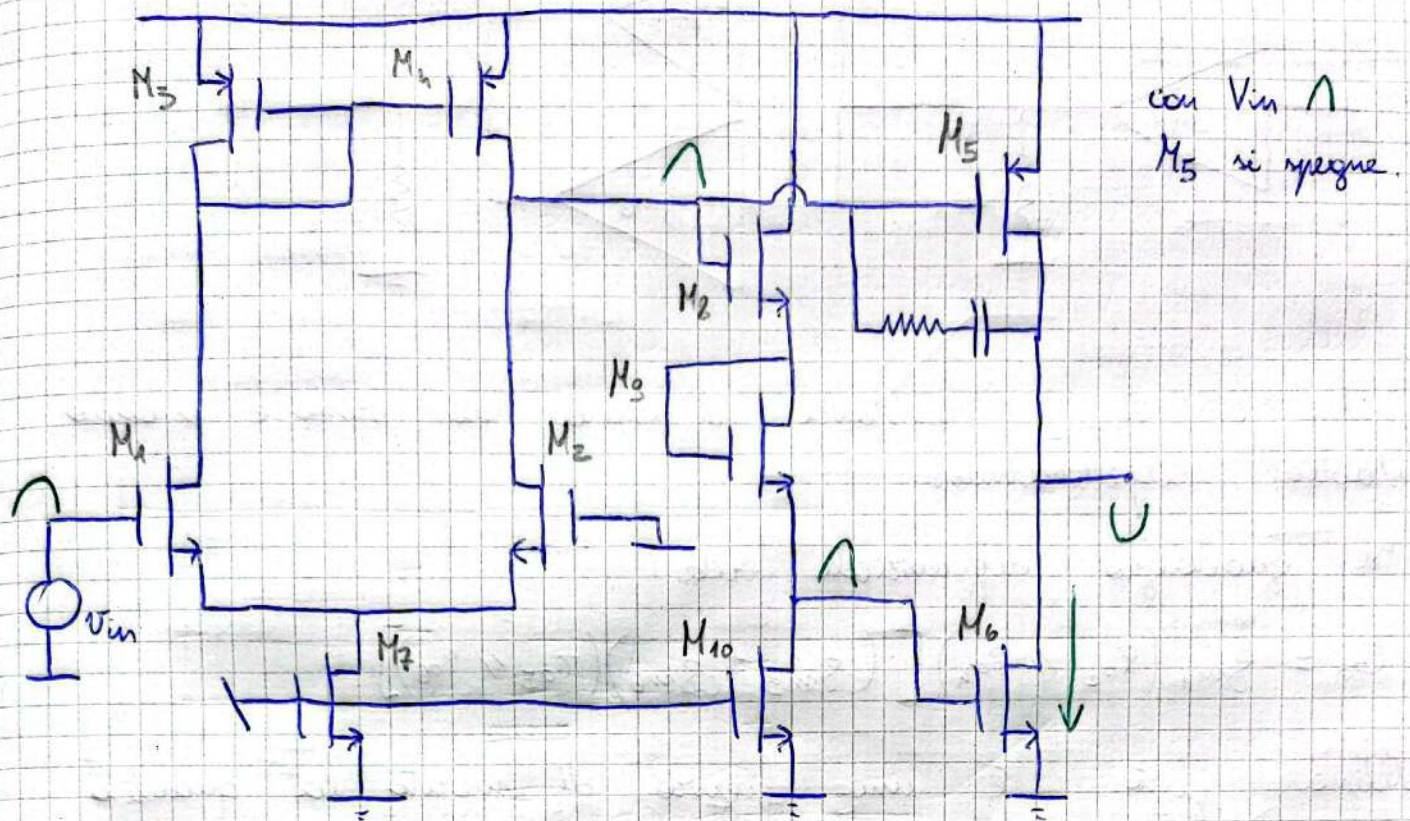
Questo vuol dire che lo specchio si deteriora e M_4 non
è più in grado di fornire corrente $2I_1$.
 M_4 diventa quindi un resistore da resistenza molto
bassa, e in tal modo C_C e C_L diventano
praticamente in parallelo. Perciò lo slew rate assume
espressione: $SR = \frac{I_2}{C_C + C_L}$. Mentre prima lo slew rate

dipendeva solo da parametri interni al circuito, ora
dipende anche da C_L .

D In definitiva: $SR_{ext}^- = \min \left[SR_{int}, \frac{I_2}{C_c + C_L} \right]$

Il problema di questo stadio è quindi che se M_0 rimane acceso, sia nel caso di SR^+ che nel caso di SR^- , M_0 deve fornire maggior corrente. Questo causa più consumo di energia.

Una soluzione alternativa è usare il clauso AB come output stage per evitare un aumento del consumo di potenza.



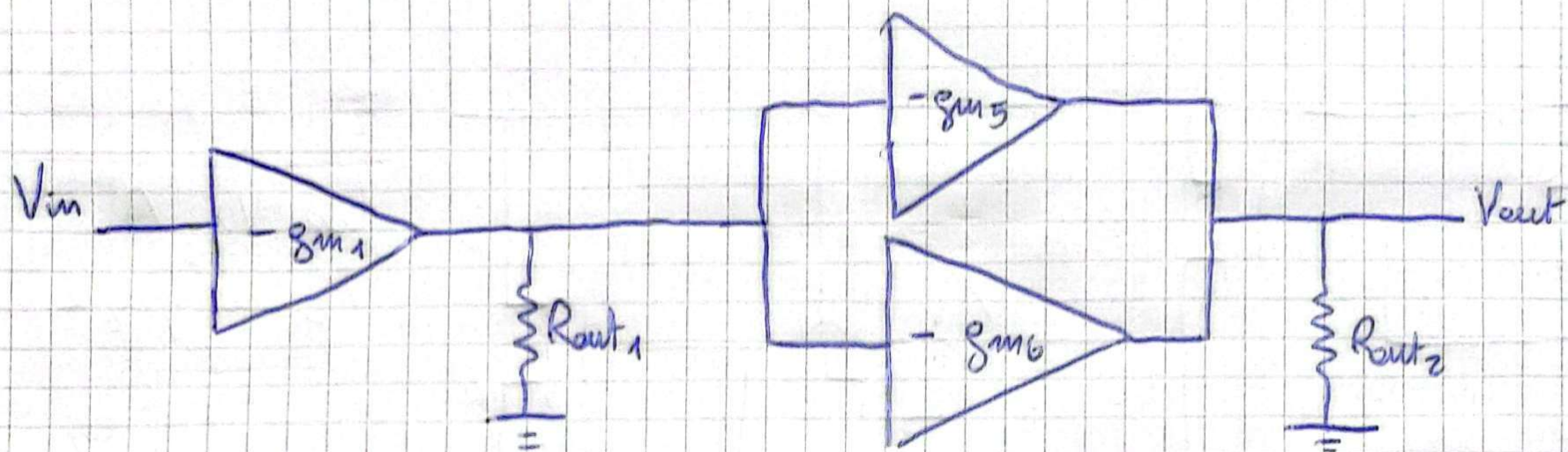
M_7 e M_8 sono posti tra il primo e il secondo stadio per unire M_6 all'uscita del primo stadio.

Nella semionda positiva di V_{in} , M_5 si spegne, mentre M_6 aumenta la corrente fornita al carico al di sopra del valore di polarizzazione.

Anche nella semionda negativa di V_{in} , M_6 si spegne, mentre la corrente al carico è fornita da M_5 .

In questa soluzione, M_5 e M_6 lavorano in antifase. $\Rightarrow$ aumentano la corrente fornita al carico dal circuito senza richiedere un aumento del consumo di potenza in DC.

Questa soluzione va a modificare anche il guadagno. I due percorsi dovuti a M_5 e M_6 lavorano in parallelo. Il sistema può essere rappresentato come:

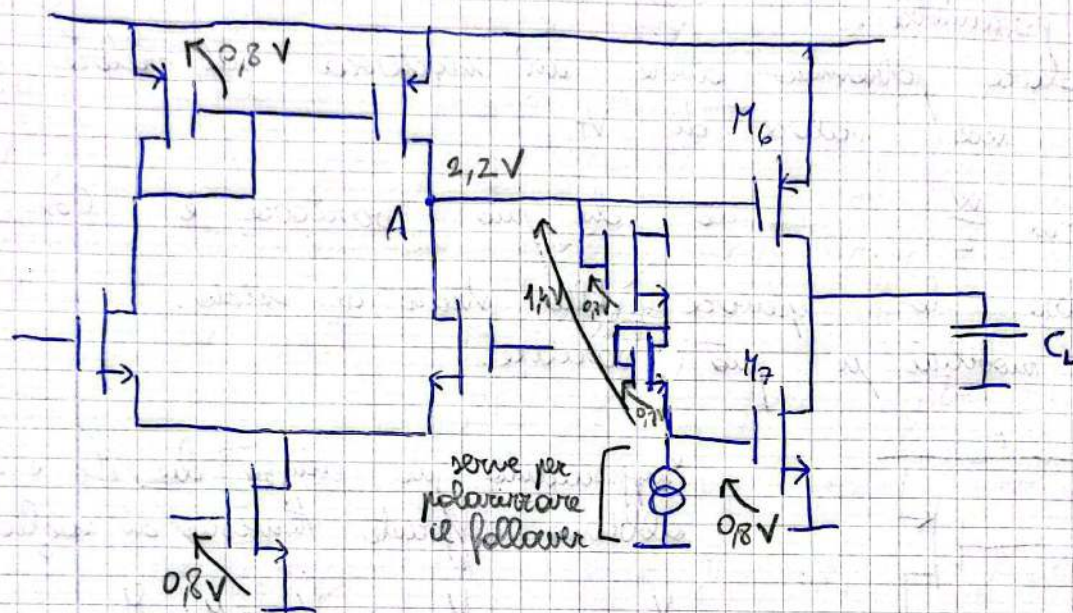


R_{out1} e R_{out2} resistenze d'uscita del primo e secondo stadio rispettivamente.

Il guadagno differenziale vale:

$$G_d = g_{m1} (r_{o2} \parallel r_{on}) \left[(g_{m5} + g_{m6}) (r_{o5} \parallel r_{o6}) \right]$$

E Consideriamo il seguente circuito :



Noi vorremo che M_7 non trasporti sempre tanta corrente per soddisfare la condizione sempre. Noi vorremo che M_7 trasporti tanta corrente solo quando il nodo A sale molto in tensione, per evitare tutte le conseguenze negative espresse in precedenza. A tal fine possiamo collegare il nodo A con il gate di M_7 tramite un source follower. In questo modo, se il nodo A sale aumenta anche la tensione di comando di M_7 e quindi M_7 trasporta più corrente solo quando necessario.

Il transistor in condizione di transilicco sotto il source follower è stato posizionato perché altrimenti il source follower avrebbe avuto una $V_{DS} = 1,4V$ che è troppo elevata. Così invece vale $0,7V$. La configurazione transilicco ha impedenza bassa, pari a $1/g_m$ e permette così di non degradare il source follower.

Se v_A aumenta, M_6 trasporta corrente di segnale

verso l'alto pari a $g_{m6} V_A$, mentre M_7 corrente
di uguale verso il basso pari a $g_{m7} V_A$.
In questo modo la transconduttanza del secondo
stadio vale $g_{m6} + g_{m7}$.

F Viene definito figure of merit la quantità:

$$F_o M = \frac{SR \cdot C_L}{I_{tot}}$$

oppure definito anche:

$$F_o M = \frac{GBWP \cdot C_L}{I_{tot}}$$

C'è un qualche collegamento tra SR e GBWP?

Sia il GBWP che la SR dipendono dalla capacità di compensazione.

$$GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C_c} ; \quad SR = \frac{2I_1}{C_c} \quad , \quad \text{period}$$

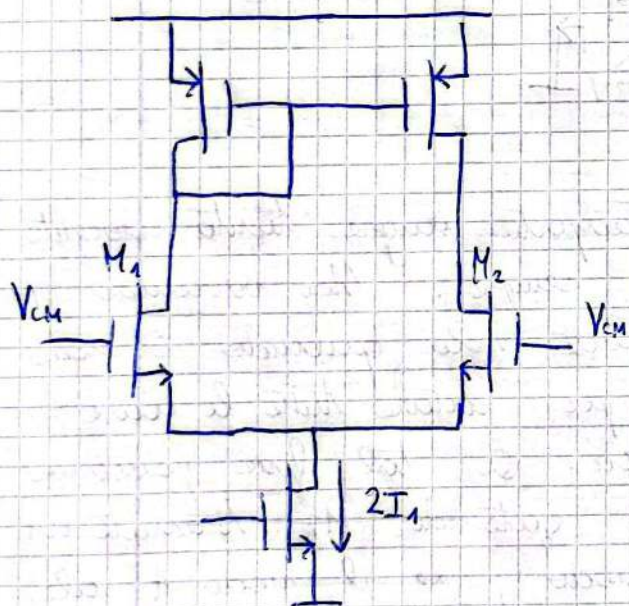
$$2\pi GBWP = \frac{g_{m1}}{2I_1} \cdot SR = \underbrace{\frac{2I_1}{V_{ov}}}_{g_{m1}} \cdot \frac{1}{2I_1} \cdot SR \quad \text{da cui:}$$

$$SR = V_{ov} \cdot 2\pi GBWP$$

G Studiamo ora l'effetto del circuito:
vediamo quali sono gli effetti se i transistori di una coppia non sono identici, ma differiscono per alcuni parametri.

In particolare potremmo avere un'inversione nel valore di K e nel valore di V_T .

$K = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L}$, ciò che può variare è C_{ox} , in particolare lo spessore dello strato di ossido. Anche la mobilità μ può variare.



Supponiamo per esempio che M_1 e M_2 abbiano differenti tensioni di soglia:

V_{T1} per M_1 e V_{T2} per M_2

$$V_{T0} = \frac{V_{T1} + V_{T2}}{2}, \text{ mentre}$$

$$V_{T1} - V_{T2} = \Delta V_T. \text{ Per esempio:}$$

$$V_{T1} = V_{T0} + \frac{\Delta V_T}{2} \text{ e}$$

$$V_{T2} = V_{T0} - \frac{\Delta V_T}{2}$$

Ora le tensioni di comando V_{GS1} e V_{GS2} sono uguali, ma dato che le V_T sono differenti, $I_1 \neq I_2$.

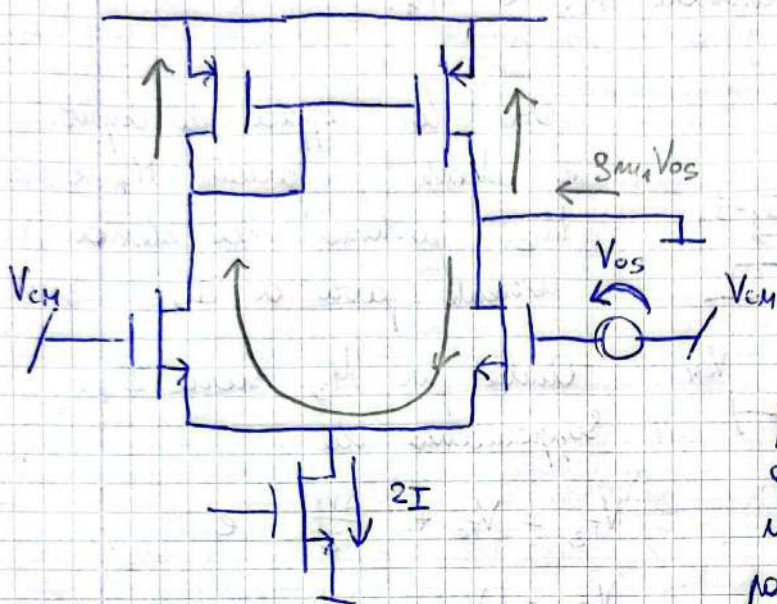
$$I_1 = K \left(V_{GS} - V_{T0} - \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2; \quad I_2 = K \left(V_{GS} - V_{T0} + \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2$$

$$I_1 = K \left[\left(V_{GS} - V_{T0} \right)^2 - \left(V_{GS} - V_{T0} \right) \Delta V_T + \left(\frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_2 = K \left[\left(V_{GS} - V_{T0} \right)^2 + \left(V_{GS} - V_{T0} \right) \Delta V_T + \left(\frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_2 - I_1 = 2K (V_{GS} - V_{TO}) \Delta V_T$$

Il modello equivalente per rappresentare questa non idealità è il seguente:



il generatore di effetto va innanzi al gate di M_2 .

Per questo caso, con la presenza di V_{os} solo al gate di M_2 , si genera una corrente differenziale pari a: $\frac{g_{m1}}{2} V_{os}$.

Per cui la corrente in uscita vale $g_{m1} V_{os}$.

V_{os} deve essere tale che: $V_{os} g_{m1} = I_2 - I_1 = 2K(V_{GS} - V_{TO}) \Delta V_T$

$$V_{os} g_{m1} = \frac{2K(V_{GS} - V_{TO}) \Delta V_T}{g_{m1}} \quad \text{per cui } V_{os} = \Delta V_T$$

Supponiamo ora che ci sia una differenza nel valore di K , in particolare:

$K_1 = K_0 + \frac{\Delta K}{2}$ e $K_2 = K_0 - \frac{\Delta K}{2}$. Le espressioni delle correnti diventano:

$$I_1 = \left(K_0 + \frac{\Delta K}{2}\right) (V_{GS} - V_T)^2; \quad I_2 = \left(K_0 - \frac{\Delta K}{2}\right) (V_{GS} - V_T)^2, \text{ da cui}$$

$$I_2 - I_1 = -\Delta K (V_{GS} - V_T)^2. \quad \text{Calcoliamo } V_{os} \text{ in questo caso:}$$

$$V_{os} g_{m1} = -\Delta K (V_{GS} - V_T)^2 \Rightarrow V_{os} = -\frac{\Delta K (V_{GS} - V_T)^2}{2K_0 (V_{GS} - V_T)} =$$

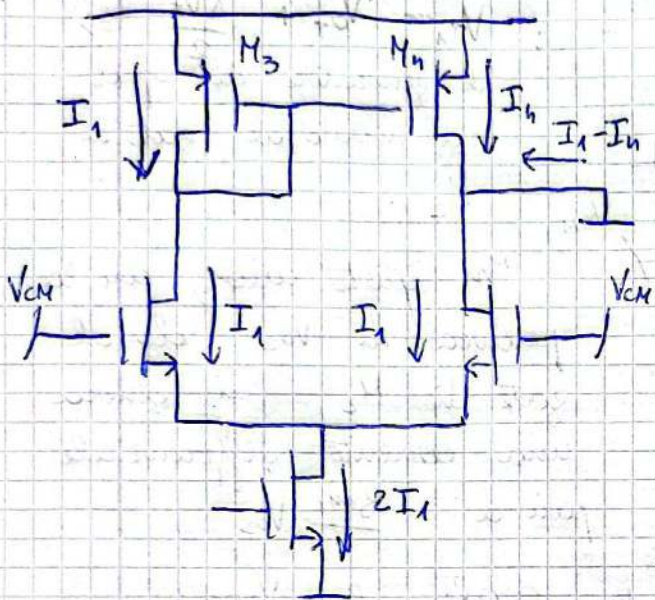
$$= -\frac{\Delta K}{K} \frac{V_{ov}}{2}$$

Quindi complessivamente, considerando sia una differenza per la V_T che per K , si ha una

tensione di offset pari a:

$$V_{OS} = \Delta V_T - \frac{\Delta K}{K} \cdot \frac{V_{OV}}{2}$$

Consideriamo ora i transistori M_3 e M_n :



Ora la coppia di input
è ideale, perciò M_1 e
 M_2 portano la stessa
corrente pari a I_1 .

Anche per M_3 sono I_1 .
Sappiamo che:

$$V_{T3} = V_{T0} + \frac{\Delta V_T}{2} e$$

$$V_{T_h} = V_{T_0} - \frac{\Delta V_T}{2}$$

$$I_3 = I_1 = K_H \left(V_{SG} - V_{To} - \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2, \quad \text{mentre per } I_n:$$

$$I_n = K_M \left(V_{SG} - V_{T0} + \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2$$

$$I_1 - I_n = 2K_M (V_{SG} - V_{To}) \Delta V_T \quad \text{Calcoliamo ora } V_{os} :$$

(facendo un ragionamento analogo a quello di prima)

$$V_{OS} = \frac{2K_M (V_{SG} - V_{TO})}{g_{m1}} \Delta V_T = \frac{2I_1}{V_{OV1}} \cdot \frac{V_{OV1}}{2I_1} \cdot \Delta V_T, \text{ perció}$$

$$V_{OS} = \frac{V_{OV1}}{V_{OVn}} \cdot \Delta V_T$$

l'ultimo: consideriamo una differenza nei valori di K dei transistori dello specchio di corrente:

$K_3 = K_0 + \frac{\Delta K}{2}$ e $K_n = K_0 - \frac{\Delta K}{2}$. Le correnti ora hanno espressione:

$$I_1 = I_3 = \left(K_M + \frac{\Delta K_M}{2} \right) (V_{SG} - V_{TD})^2 e$$

$$I_n = \left(K_M - \frac{\Delta V_{OM}}{2} \right) (V_{SG} - V_{TO})^2$$

$I_1 - I_n = \Delta K_M (V_{SG} - V_{To})^2$. Calcoliamo il contributo su V_{os} :

$$V_{os} = \frac{\Delta K_{OM} V_{OV_M}^2}{2 K_{in} V_{ov_i}} = \frac{\Delta K_{OM} V_{OV_M}^2}{2 K_{in} V_{ov_i}} \cdot \frac{K_M}{K_M} \cdot \frac{V_{ov_i}}{V_{ov_i}} = \frac{\Delta K_M}{K_M} \cdot \frac{V_{ov_{in}}}{2}$$

$I_3 = I_1$

I_1

Però in definitiva, considerando sia le differenze tra M_1 e M_2 sia quelle tra M_3 e M_4 , si ottiene V_{os} pari a:

$$V_{os} = \Delta V_T - \frac{\Delta K}{K} \frac{V_{ov_1}}{2} + \Delta V_{TM} \frac{V_{ov_1}}{V_{ov_M}} + \frac{\Delta K_M}{K_M} \frac{V_{ov_{in}}}{2} \quad \text{M realta}$$

V_{os} è un valore statistico, perciò:

$$\sigma_{V_{os}} = \sqrt{(\sigma_{\Delta V_T})^2 + \sigma_{\Delta V_{TM}}^2 \left(\frac{V_{ov_1}}{V_{ov_M}}\right)^2 + \sigma_{\frac{\Delta K}{K}}^2 \left(\frac{V_{ov_1}}{2}\right)^2 + \sigma_{\frac{\Delta K_M}{K_M}}^2 \left(\frac{V_{ov_1}}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$ il segno di V_{os} non ha rilevanza.

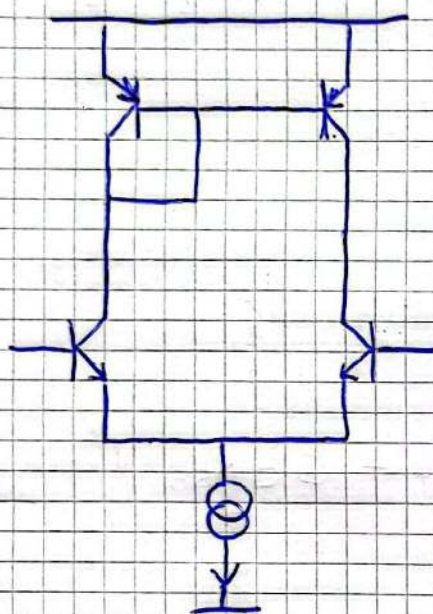
25/11/24

28/11/24

Lezione 23

Nella realtà, i parametri k e V_T sono correlati tra loro, non sono indipendenti. Entrambi dipendono, per esempio, dallo spessore dello strato di ossido t_{ox} .
Nel nostro caso, per semplicità, abbiamo considerato ogni cosa indipendente.

Studiamo ora il caso dei BST:



$$I_c = I_s e^{\frac{qV_{DS}}{kT}} = D_n q \frac{M_i^2}{N_B W_B} e^{\frac{qV_{DS}}{kT}}$$

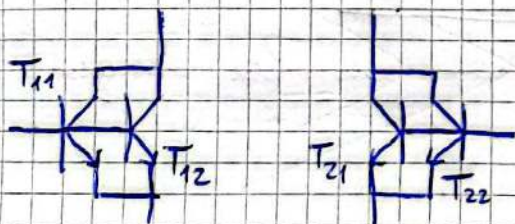
C'è da ricordare che il termine M_i^2 è proporzionale a $e^{-E_g/kT}$, perciò I_c ha dipendenza dalla temperatura.

Quindi nel caso dei BST è importante che i transistori operino alla stessa temperatura.

Il punto più caldo è verso l'interno, perciò tra le coppie di transistori che devono operare allo stesso modo, potrebbe essercene uno più vicino all'interno e quindi più caldo.

Una tecnica è posizionare i transistori che devono funzionare allo stesso modo lungo la stessa isoterma.

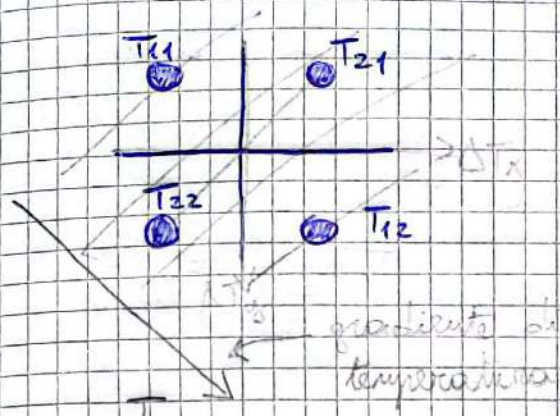
Oppure si può operare la seguente tecnica:



Ove T_{xy} indica la temperatura di un determinato transistor.

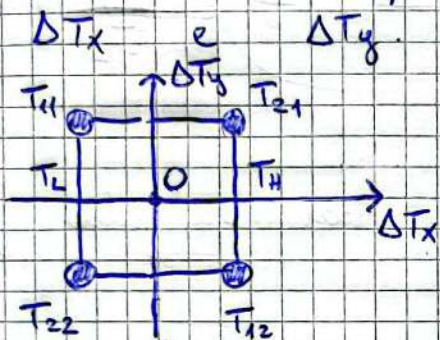
$\Rightarrow$ i transistori vengono splittati in 2.

Gli essi vengono posizionati in questo modo:



in questo modo la temperatura media di ogni coppia è la stessa.
Supponiamo che la temperatura abbia andamento lineare con la posizione.

Osserviamo rompere il gradiente T in due direzioni,



Entrambe le coppie $T_{11} - T_{12}$ e $T_{22} - T_{21}$ hanno temperatura media nel centro O , sia per ΔT_x che per ΔT_y .

Questa tecnica è chiamata common centroid strategy. Non solo la temperatura può essere bilanciata con questa tecnica, ma ogni variabile che ha una dipendenza spaziale, e si può applicare anche al caso di circuiti con MOSFET.

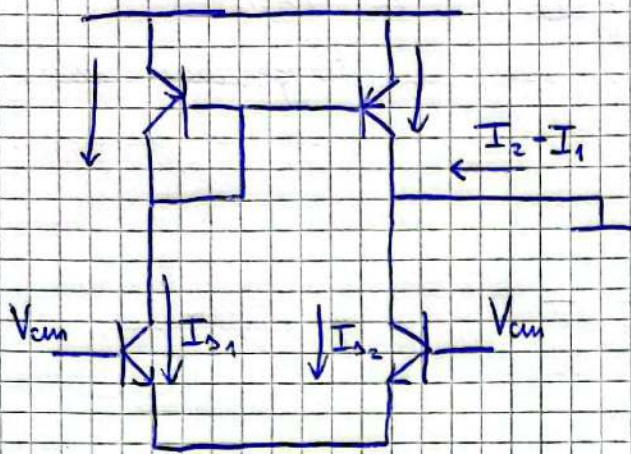
Per ricapitolare: l'offset è generato da differenze all'interno della coppia di transistori. Se l'errore ha una dipendenza sistematica, si può risolvere usando il common centroid.

C'è però anche un secondo contributo dell'errore, che è statistico. Per esempio la densità di drogante non è precisa, varia in modo statistico.
 $\Rightarrow$ il prodotto $N_D W_D$ non è preciso.

La differenza in $N_D W_D$ va a modificare il valore di I_s , perciò anche il valore di I_c che scorre nei transistori Q_1 e Q_2 per esempio.

Supponiamo per esempio che $I_{s2} \neq I_{s1}$, questo

genera una corrente $I_2 - I_1$ che scorre nel ramo d'uscita.



$$I_c = I_s e^{\frac{q V_{BE}}{KT}}$$

$$I_2 - I_1 = \Delta I_s e^{\frac{q V_{BE}}{KT}} = g_{m1} V_{os}$$

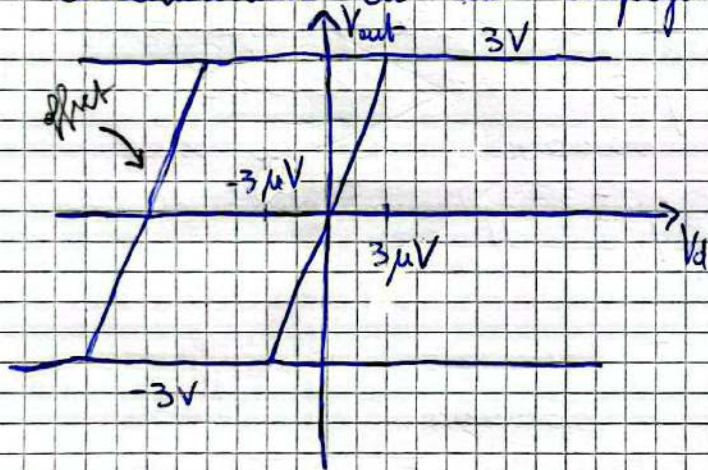
da cui:

$$V_{os} = \frac{\Delta I_s e^{\frac{q V_{BE}}{KT}}}{I_c} \cdot \frac{KT}{q} = \frac{\Delta I_s}{I_s} V_{th}$$

$$I_{\Delta} e^{\frac{q V_{BE}}{KT}} \uparrow \frac{1}{g_{m1}}$$

Lo stesso risultato si ottiene anche per i transistori dello specchio di corrente.

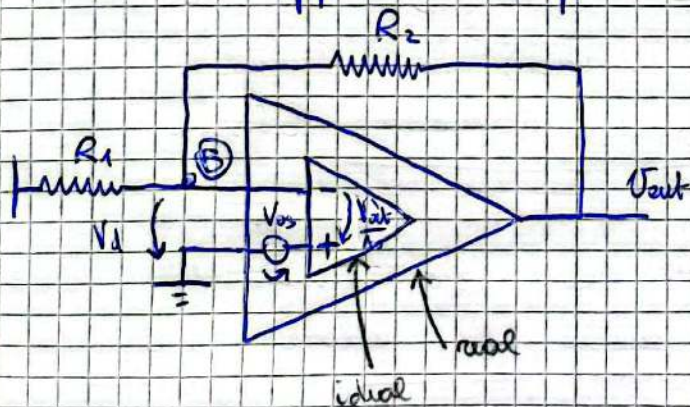
Caratteristica di un amplificatore



perfettamente simmetrico:

Supponiamo $G_d = 10^6$, perciò nel caso ideale l'uscita naturale a 3V per $V_d = 3\mu V$. L'offset solitamente è dell'ordine dei mV, perciò anche se $V_d = 0V$, l'uscita è comunque saturata.

L'amplificatore diventa utilizzabile quando inserito in un differential feedback:

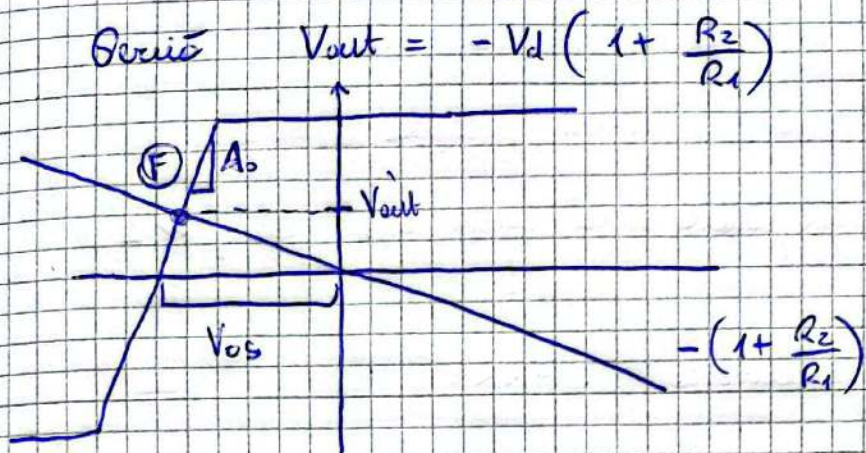


La presenza della rete

resistiva genera un collegamento tra l'uscita e la tensione differenziale.

$$V_B = V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_d = -V_B = -V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



Il punto F è il punto di operazione dell'amplificatore.

Il punto F è nel range lineare dell'amplificatore.

Chiamo X_F l'ascissa del punto F . Essa vale:

$$X_F = -V_{os} + \frac{V_{out}'}{A_0}, \text{ dove } A_0 \text{ è il guadagno differenziale dell'amplificatore.}$$

Chiamo $V_d' = X_F$, perciò:

$$V_d' = -\left(V_{os} - \frac{V_{out}'}{A_0}\right) \text{ ha tensione differenziale}$$

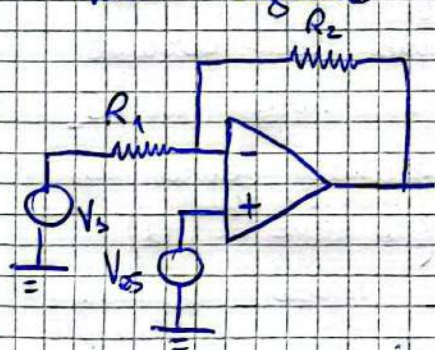
in input, quella tra i morsetti $+$ e $-$ dell'amp. ideale, vale $\frac{V_{out}'}{A_0}$. Perciò vale che:

$$V_d' - V_{os} = \frac{V_{out}'}{A_0} \text{ Se } A_0 \rightarrow \infty, \text{ i morsetti dell'amp}$$

ideale sono alla stessa tensione, e perciò

$V_d' = V_{os}$. Quindi il punto F si muove in tensione grazie alla presenza del feedback per bilanciare l'effetto dell'offset.

Nel seguente caso:



$$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_s + V_{os} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

la cosa positiva è che l'amplifier lavora in zona lineare, la cosa negativa è che V_{out} ha un valore in DC non nullo anche se $V_{in} = 0$.

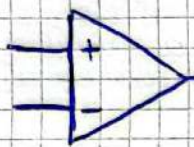
Affinché il sistema operi in zona lineare, la pendenza di A_0 deve essere molto maggiore di $1 + \frac{R_2}{R_1}$.

Deriva in questo caso due valori che:

$A_o \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}$ che può essere vista come:

$\frac{A_o R_1}{R_1 + R_2} \gg 1$ che corrisponde alla condizione $G_{loop} \gg 1$

Studiamo ora il parametro CMRR:

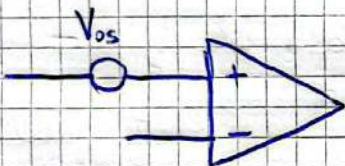


$V_{out} = A_d V_d + A_{cm} V_{cm}$ idealmente $A_{cm} = 0$, ma nella realtà non è così. L'espressione

può essere riscritta come:

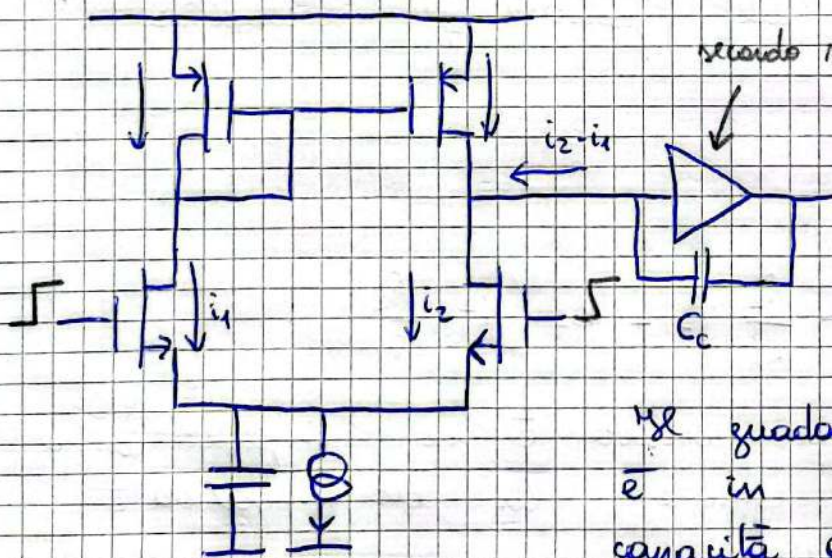
$V_{out} = A_d \left(V_d + \frac{A_{cm}}{A_d} V_{cm} \right)$ il termine $\frac{A_{cm}}{A_d} V_{cm}$ si com-

porta come V_{os} .



$$V_{os} = \frac{A_{cm}}{A_d} V_{cm} = \frac{V_{cm}}{CMRR}$$

Il parametro CMRR dipende dalla frequenza, infatti né A_d né A_{cm} sono costanti in tutta la banda.



Anche nel caso di segnale di modo comune la corrente $i_2 - i_1$ non è per C_c e quindi genera un polo (lo stesso di A_d)

Il guadagno di modo comune è in aggiunta influenzato dalla capacità ai capi del generatore di $v_{os} \Rightarrow A_{cm}$ ha anche uno zero

Diagramma di A_d e A_{cm} nello stesso grafico:

teniamo di modo comune V_{cm} , ma i transistori M_3 e M_4 non hanno la stessa transconduttanza, per esempio $V_{T3} \neq V_{T4}$.

Se V_{cm} aumenta, scende corrente per il generatore di coda pari a V_{cm}/r_{o2} . Supponendo $R_1 = R_2$, questa corrente si divide equamente tra M_1 e M_2 .

Il gate di M_3 scende di una tensione pari a $\frac{i_{cm}}{g_{m3}}$. V_A comanda M_4 e perciò per M_4 .

Scorre una corrente $i_n = g_{m4} \frac{i_{cm}}{g_{m3}}$ ha corrente

che scorre per il ramo d'uscita vale:

$$i_{out} = i_{cm} - \frac{g_{m4}}{g_{m3}} i_{cm} = i_{cm} \left(\frac{g_{m3} - g_{m4}}{g_{m3}} \right) \quad \text{definisco}$$

$$\bar{g}_{m4} = \frac{g_{m3} + g_{m4}}{2}, \quad \text{perciò} \quad g_{m3} = \bar{g}_{m4} + \frac{g_{m3} - g_{m4}}{2}$$

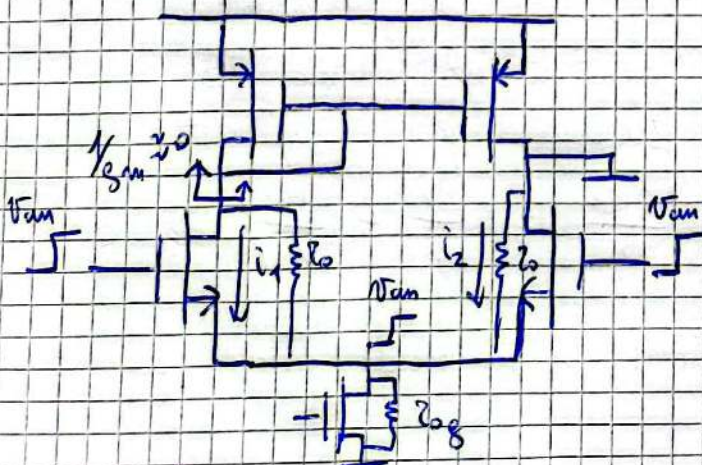
Possiamo dire che:

$$i_{out} = i_{cm} \left(\frac{g_{m3} - g_{m4}}{g_{m3}} \right) \approx i_{cm} \frac{\Delta g_{m4}}{\bar{g}_{m4}} \quad \text{dove } \Delta g_{m4} = g_{m3} - g_{m4}$$

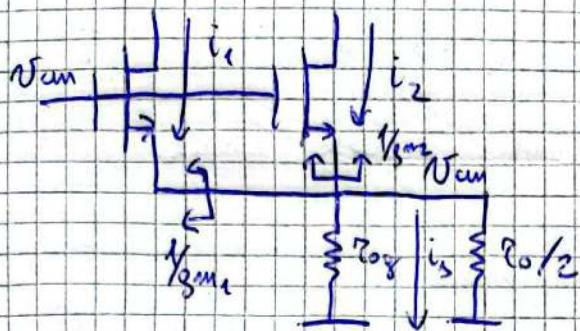
definisco $\varepsilon = \frac{\Delta g_{m4}}{\bar{g}_{m4}}$ che è un errore statistico.

Ovvero all'errore precedente, si aggiunge una parte statistica $\Rightarrow$ l'errore complessivo ha sia una parte statistica che una parte deterministica.

Consideriamo ora lo specchio ideale, mentre ora $g_{m1} \neq g_{m2}$.



Le due r_o di M_1 e M_2 sono in parallelo dato che $\frac{1}{g_m} \approx 0$. Ovvero possiamo anche rappresentare il circuito come:



r_{o8} e $r_{o/2}$ sono in parallelo

$$i_s = \frac{V_{cm}}{(r_{o8} \parallel r_{o/2})}$$

$$i_1 = \frac{1/g_{m2}}{1/g_{m1} + 1/g_{m2}} i_s = \frac{g_{m1}}{g_{m1} + g_{m2}} i_s$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{g_{m2}}{g_{m1} + g_{m2}} i_s$$

$$i_{out} = i_2 - i_1 \quad \text{perciò:}$$

$$i_{out} = i_s \frac{g_{m2} - g_{m1}}{g_{m2} + g_{m1}} = i_s \frac{\Delta g_{min}}{2 \bar{g}_{min}} \quad \text{definendo } \Delta g_{min}$$

e $\bar{g}_{min}$ analogamente al caso dello specchio di corrente.

$$i_{out} = \frac{V_{cm}}{(r_{o8} \parallel r_{o/2})} \left(r_{o8} + \frac{r_o}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}} = \frac{V_{cm}}{r_{o8}} \left(\frac{r_{o8}}{r_o} + \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}} =$$

$$= \underbrace{\frac{V_{cm}}{2 r_{o8}}}_{I_{cm}} \underbrace{\left(1 + \frac{2 r_{o8}}{r_o} \right)}_{\varepsilon} \frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}}$$

perciò l'errore complessivo, tenendo conto delle componenti statistiche e delle componenti

sistematiche, è dato da:

$$\varepsilon = \frac{1}{g_{mH} r_{oH}} + \frac{1}{g_{mH} r_{oH}} + \frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}} + \frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}} \left(1 + \frac{2 r_{o8}}{r_o} \right)$$

Scriviamo il CHRR tenendo in considerazione solo l'ultimo termine di ε :

$$CHRR = \frac{2 g_{m1} r_{o8}}{\frac{\Delta g_{min}}{\bar{g}_{min}} \left(1 + \frac{2 r_{o8}}{r_o} \right)}$$

Questo termine di ε è l'unico dipendente da r_{o8} .

perciò non vale in questo caso che se $r_{o8} \rightarrow \infty$

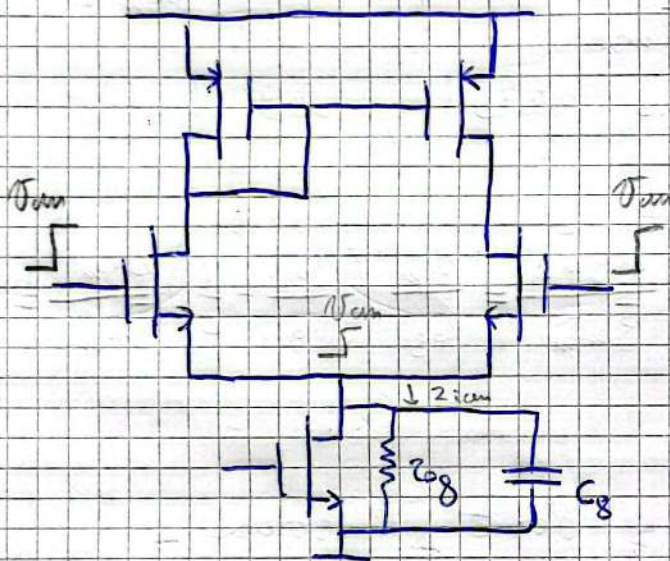
$CMRR \rightarrow \infty$. Infatti se $r_{o2} \rightarrow \infty$:

$$CMRR = \frac{2g_{m1} r_o}{\frac{\Delta g_{min}}{g_{min}}} \quad \text{che } \bar{e} \text{ il valore limite.}$$

In questo caso r_o è responsabile della corrente di modo comune, e determina il massimo CMRR in caso di differenza tra g_{m1} e g_{m2} .

26/11/2h
lezione 2h

30/11/2h



$$2i_{cm} = v_{cm} \frac{1 + sC_g r_{o2}}{r_{o2}}$$

la capacità C_g è quella responsabile del secondo polo di A_{cm} .

Supponiamo di volere che:

$\frac{2 r_{o2} g_{m1}}{E} \gg CMRR$, dove CMRR è un dato valore richiesto. Allora E , che è l'errore attraverso il primo stadio, deve valere:

$$|E| \leq \frac{2 r_{o2} g_{m1}}{CMRR} \quad \text{il segno è irrilevante.}$$

E ha una parte deterministica, di cui sappiamo

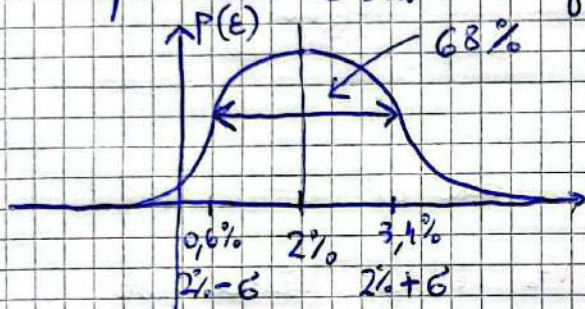
il valore e il segno, supponiamo per esempio
 $E_{det} = 2\%$

Da σ è una componente di errore statistica, dove

$$\sigma_{Estat} = \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{\Delta g_{mH}}{g_{mH}} \right) + \sigma^2 \left(\frac{\Delta g_{mL}}{g_{mL}} \right) \left(1 + \frac{2\tau_{0g}}{\tau_0} \right)^2}$$

$(1\%)^2 \quad (1\%)^2 \quad = (1,4\%)$

Però c'è una certa probabilità gaussiana che esprime E_{stat} . Graficamente:

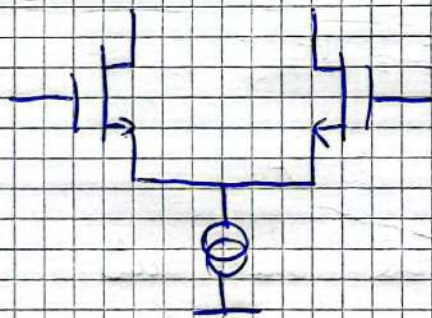


Supponiamo che:

$$|E| \leq \frac{2\tau_{0g} g_{m1}}{CHRR} = 2\%$$

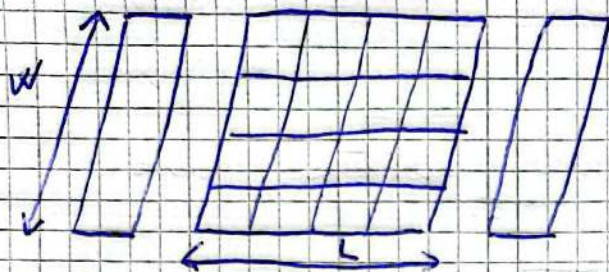
Però dobbiamo considerare la parte di gaussiana compresa tra $\pm 2\%$

Calcoliamo ora da cosa dipendono le variazioni statistiche di K e V_T in base alla tecnologia e le dimensioni dei transistor.



Abbiamo visto che la differenza di V_T può essere dovuta a una differenza di t_{ox} , e che l'errore di t_{ox} potrebbe avere un andamento lineare nello spazio. La soluzione è il common centroid.

In questo modo riusciamo a compensare gli errori deterministici. Ci sono tuttavia degli errori statistici, come per esempio la diversa densità di drogante. Però la tensione di soglia complessiva è la risultante delle tensioni di soglia delle varie zone locali ciascuna con la sua densità di drogante. $\sigma^2(V_T)$ è influenzata dall'area del transistor.



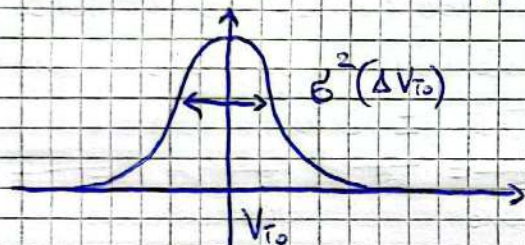
Dividiamo l'area totale in tante regioni indipendenti. Le tensioni di soglia in due zone adiacenti sono indipendenti.

Definiamo A_0 come un'area di correlazione, all'interno della quale le tensioni di soglia sono correlate.

$N = \frac{WL}{A_0}$ dove N è il numero di contributi indipendenti. Valore medio della tensione di soglia:

$$\bar{V}_T = \frac{1}{N} \sum V_{Ti}$$

La tensione di soglia di ogni porzione di area vale:



dove V_{T0} è la stessa per ogni porzione di area.

Chiamo $E(x)$ l'expected value di una certa quantità x . Vale che:

$$E(\bar{V}_T) = \frac{E(\sum V_{Ti})}{N} = \frac{\sum E(V_{Ti})}{N} = \frac{NV_{T0}}{N} = V_{T0}$$

Abbiamo calcolato ora la varianza di V_T .

$$\sigma^2(\Delta \bar{V}_T) = \frac{N \sigma^2(\Delta V_{T0})}{N^2}, \text{ infatti vale che date:}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_N \text{ allora } \sigma^2(x_1, x_2, \dots, x_N) = N \sigma^2(x_i)$$

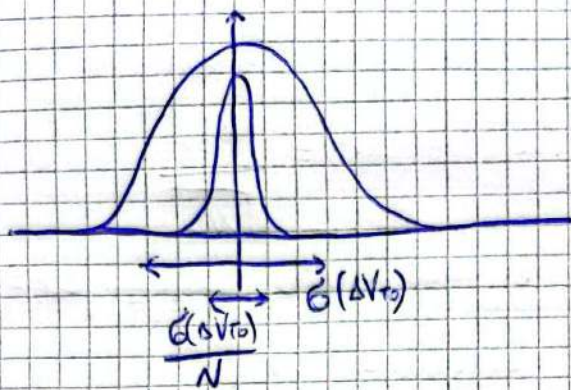
$$\text{e vale che: se } y = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{N} \text{ allora}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2) = \frac{3 \sigma_x^2}{N^2} \text{ nel caso in cui}$$

x_1, x_2 e x_3 hanno tutte stessa distribuzione.

$$\text{Però si ottiene: } \sigma^2(\Delta \bar{V}_T) = \frac{\sigma^2(\Delta V_{T0})}{N}, \text{ chiamando:}$$

$$\bar{V}_T = V_{T0} \text{ e } \sigma^2(\Delta \bar{V}_T) = \frac{\sigma^2(\Delta V_{T0})}{N}$$



Quando si fa la media dei vari V_{T_i} , la varianza diminuisce.

In realtà non siamo interessati nella varianza di V_T di un singolo transistor, siamo interessati nella differenza di V_T tra due transistori adiacenti.

Siamo interessati alla differenza $V_{T_1} - V_{T_2}$.

$E(V_{T_1} - V_{T_2}) = V_D - V_{T_0} = 0$ ha senso, noi ci appelliamo che $V_{T_1} = V_{T_2}$.

$$\sigma^2(V_{T_1} - V_{T_2}) = [\text{se } V_{T_1} \text{ e } V_{T_2} \text{ indipendenti}] = \sigma^2(V_{T_1}) + \sigma^2(V_{T_2}) = 2\sigma^2(V_{T_1})$$

$\sigma^2(\Delta V_T)$ che compare nell'equazione:

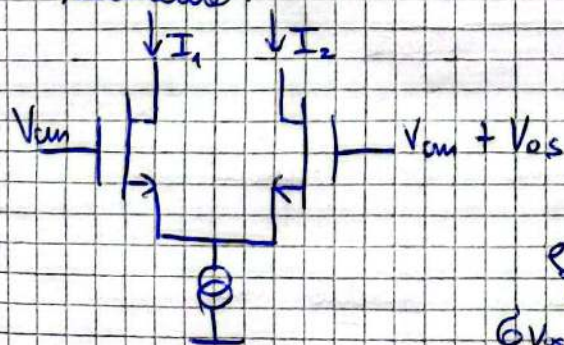
$$\sigma^2\left(\frac{\Delta g_m}{g_m}\right) = \sigma^2\left(\frac{\Delta K}{K}\right) + \frac{\sigma^2(\Delta V_T)}{V_{ov}^2} \quad \text{è proprio } \sigma^2(V_{T_1} - V_{T_2})$$

Però: $\sigma^2(\Delta V_T) = \frac{2\sigma^2(\Delta V_{T_0})}{W/L} A_0 \leftarrow K_{\Delta V_T}$ perché:

$$\sigma(\Delta V_T) = \frac{K_{\Delta V_T}}{\sqrt{W/L}} \quad \text{dove } K_{\Delta V_T} \text{ è chiamato Pelgram coefficient}$$

ed è determinato dalla tecnologia, mentre $\sqrt{W/L}$ dipende dalle dimensioni del transistor.

Il coefficiente di Pelgram può essere ricavato sperimentalmente.



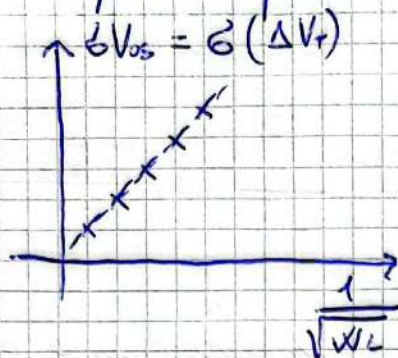
V_{os} è sommato in modo tale che $I_1 = I_2$.

2/12/2h

Tale che $\sigma V_{os} = \sigma(\Delta V_T)$

Sperimentalmente si può ricavare σV_{os} facendo più misure con differenti dimensioni W/L .

R può quindi ricavare il seguente grafico:



Otto da $\sigma(\Delta V_T) = \frac{K_{\Delta V_T}}{\sqrt{WL}}$ il

grafico è una retta con coef =
fiente angolare $K_{\Delta V_T}$

Un altro analogo si può fare per il termine:

$\sigma^2\left(\frac{\Delta K}{K}\right)$. Ma: ricorda che vale l'equazione:

$$\sigma^2\left(\frac{\Delta g_m}{g_m}\right) = \sigma^2\left(\frac{\Delta K}{K}\right) + \frac{\sigma^2(\Delta V_T)}{V_{OV}^2}$$

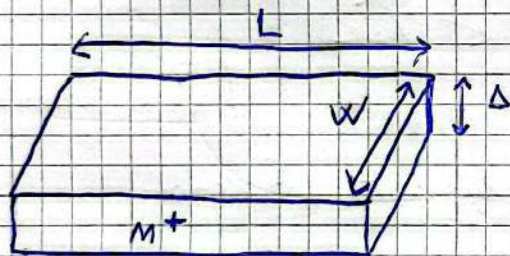
abbiamo studiato

il termine $\sigma^2(\Delta V_T)$ un altro analogo si
può fare per $\sigma^2\left(\frac{\Delta K}{K}\right)$

vale che:

$$\sigma^2\left(\frac{\Delta K}{K}\right) = \frac{K_{\Delta K/K}}{\sqrt{WL}}$$

Consideriamo un resistore



$$R = \frac{1}{q\mu n} \cdot \frac{L}{W\Delta} = \frac{1}{q\mu n\Delta} \cdot \frac{L}{W}$$

solitamente il progettista non ha
controllo sul fattore Δ

Si può scrivere R come:

$$R = R_0 \frac{L}{W}$$

$$dR = dR_0 \frac{L}{W} + R_0 \frac{dL}{W} - R_0 \frac{L}{W^2} dW$$

Mentre:

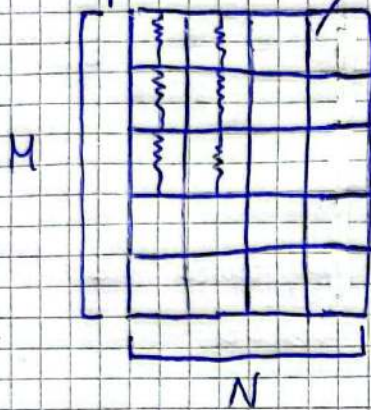
$$\frac{dR}{R} = \frac{dR_0}{R_0} + \frac{dL}{L} - \frac{dW}{W}$$

solitamente i termini

$\frac{dL}{L}$ e $\frac{dW}{W}$ sono trascurabili. Quello che
influenza la conduttività è il termine $\frac{dR_0}{R_0}$

può variare la densità di portatori n e anche Δ che può avere alcune fluttuazioni.

Top view:



ogni pezzo di area ha resistenza R_0 .
la resistenza complessiva è data dalla composizione in serie/parallelo delle resistenze. Supponiamo N colonne e M righe.

Ogni resistenza R_0 è influenzata da una varianza:

la conduttanza totale di una riga G_r vale:

$$G_r = N G_0 \Rightarrow R_r = \frac{1}{G_r} \text{ per riga}$$

$$R_{tot} = M R_r = \frac{M}{N} R_0$$

$$\sigma^2(R_{tot}) = M \sigma^2(R_r) ; \quad \frac{\sigma^2(R_{tot})}{R_{tot}^2} = \frac{M \sigma^2(R_r)}{M^2 R_r^2} = \frac{1}{M} \frac{\sigma^2(R_r)}{R_r^2}$$

Dato che $G_r = N G_0$ allora $\sigma^2(G_r) = N \sigma^2(G_0)$

$$\frac{\sigma^2(G_r)}{G_r^2} = \frac{N \sigma^2(G_0)}{N^2 G_0^2} = \frac{1}{N} \frac{\sigma^2(G_0)}{G_0^2}$$

Per $R_r = \frac{1}{G_r}$, dobbiamo trovare il legame che c'è tra $\sigma^2(R_r)$ e $\sigma^2(G_r)$.

$$dR = - \frac{dG_r}{G_r^2} , \quad \frac{dR_r}{R_r} = - \frac{dG_r}{G_r^2} \cdot \frac{1}{R_r} \Rightarrow \frac{dR_r}{R_r} = - \frac{dG_r}{G_r}$$

quindi $\frac{\sigma^2(R_r)}{R_r^2} = \frac{\sigma^2(G_r)}{G_r^2}$, per cui vale che:

$$\frac{\sigma^2(R_{tot})}{R_{tot}^2} = \frac{1}{MN} \frac{\sigma^2(G_0)}{G_0^2} = \frac{1}{NM} \frac{\sigma^2(R_0)}{R_0^2} \text{ per cui aumentando}$$

il numero di resistori elementari diminuisce la varianza relativa della resistenza totale.

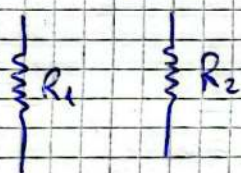
Tale che: $\frac{1}{NM} = \frac{A_0}{WL}$, dove A_0 è l'area di ogni singolo componente Bernoulli.

$$\frac{\sigma^2(R_{tot})}{R_{tot}^2} = \frac{A_0}{WL} \frac{\sigma^2(R_0)}{R_0^2}, \text{ la quantità } A_0 \frac{\sigma^2(R_0)}{R_0^2} \text{ è}$$

un numero che dipende dalla tecnologia.

Solitamente però siamo interessati alla differenza tra due resistenze, non al loro singolo valore.

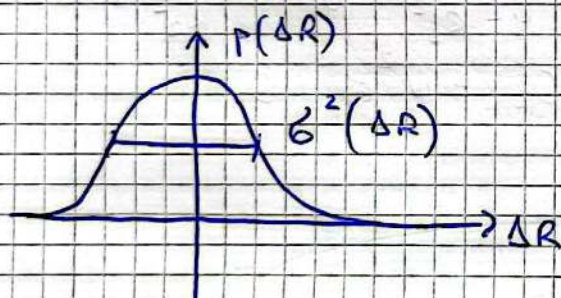
Per esempio supponiamo due resistenze R_1 e R_2 che hanno stesso valore nominale, allora:



$$\Delta R = R_1 - R_2 = 0,$$

$$\frac{\sigma^2(\Delta R)}{R^2} = \frac{\sigma^2(R_1)}{R_1^2} + \frac{\sigma^2(R_2)}{R_2^2} = \frac{2\sigma^2(R)}{R^2} =$$

$$= \frac{2 A_0 \sigma^2(R_0)/R_0^2}{WL} = \frac{K_{\Delta R/R}}{WL}$$

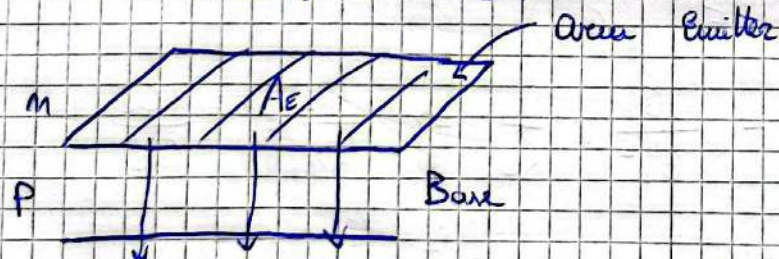


$$\frac{\sigma^2(\Delta R)}{R^2} = \frac{K_{\Delta R/R}}{WL} \Rightarrow$$

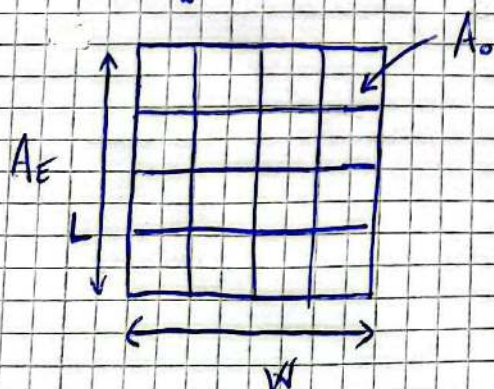
$$\frac{\sigma(\Delta R)}{R} = \frac{K_{\Delta R/R}}{\sqrt{WL}}$$

dove $K_{\Delta R/R}$ Belgram coefficient

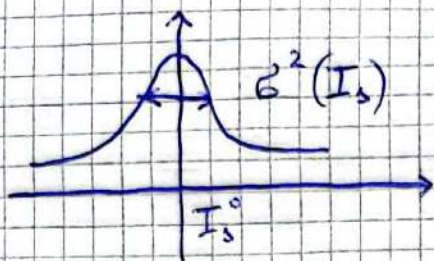
Nel transistor BJT:



$$I_c = I_s e^{\frac{qV_{BE}}{KT}} = A_E q \frac{D_n n_i^2}{W_B N_B} e^{\frac{qV_{BE}}{KT}}$$



ogni elemento di area A_0 ha un suo valore di I_s , che ha valore nominale I_s^0 e distribuzione Gaussiana.



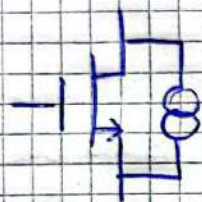
$$\frac{\sigma(I_s)}{I_s} = \frac{K_A I_s / I_s}{\sqrt{WL}}$$

h/12/24

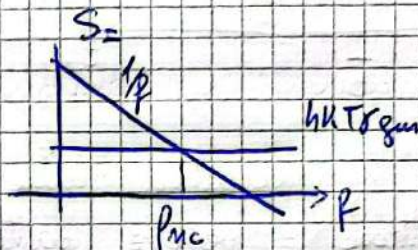
2/12/24

Lezione 25: guarda dispende per chiarire alcune cose.

Fino ad ora abbiamo considerato solo componenti di rumore bianco. In realtà c'è anche rumore $1/f$

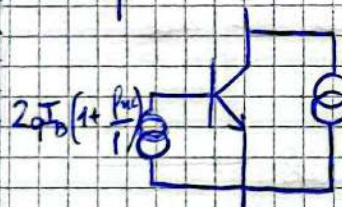


$$S_{I_s} = hKT \gamma g_m + \frac{K}{f}$$



f_{mc} è la frequency noise corner, dove rumore bianco e rumore $1/f$ si incontrano.

Anche nei BJT il rumore di base ha una componente $1/f$.

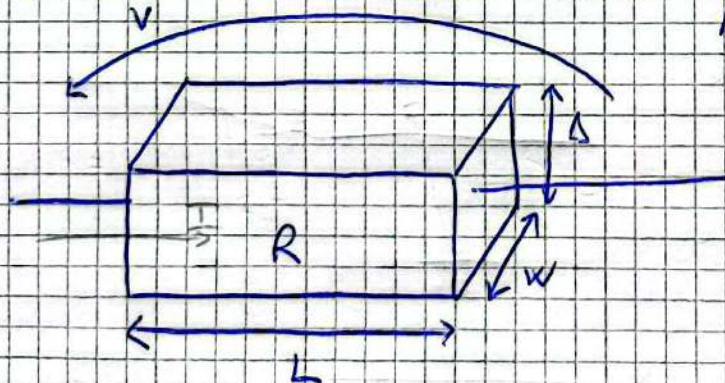


$$S_{I_c} = 2qI_c$$

l'espressione del rumore di base diventa:

$$2qI_B \left(1 + \frac{f_{mc}}{f}\right)$$

Vediamo come modellizzare questa componente di rumore:



$$I = V q \mu n \frac{W \Delta}{L} \cdot \frac{L}{L} =$$

$$= V q \mu \frac{N}{L^2} \quad \text{dove } N \text{ è}$$

il numero totale di elettroni liberi.

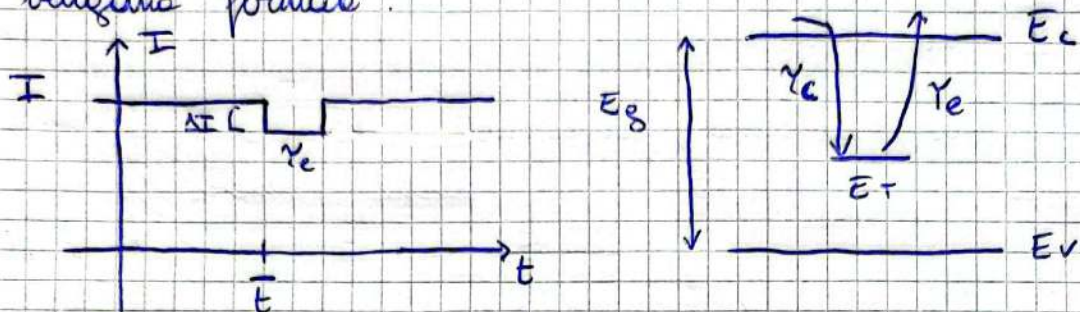
Però la corrente complessiva è proporzionale al numero totale di elettroni liberi nel transistor.

Se N ha fluttuazioni, anche I le avrà.

$$dI = \frac{V_g \mu}{L^2} dN \Rightarrow \frac{dI}{I} = \frac{V_g \mu}{L^2} \frac{dN}{\frac{V_g \mu N}{L^2}} = \frac{dN}{N}$$

se $\Delta N = \pm 1$, allora $\Delta I = \left(\frac{I}{N}\right)$.

Supponiamo che all'istante $\bar{t}$ una o più cariche vengono formate:

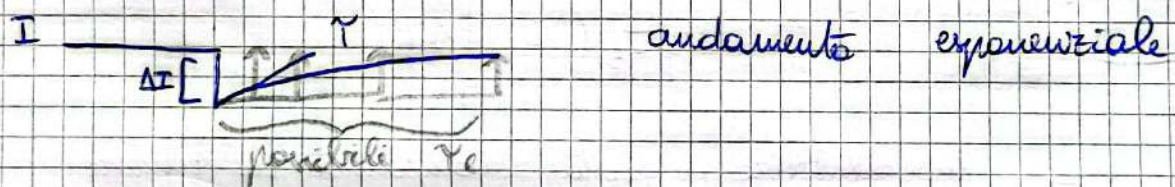


τ_c è il capture time, il tempo impiegato prima che un elettrone venga catturato.

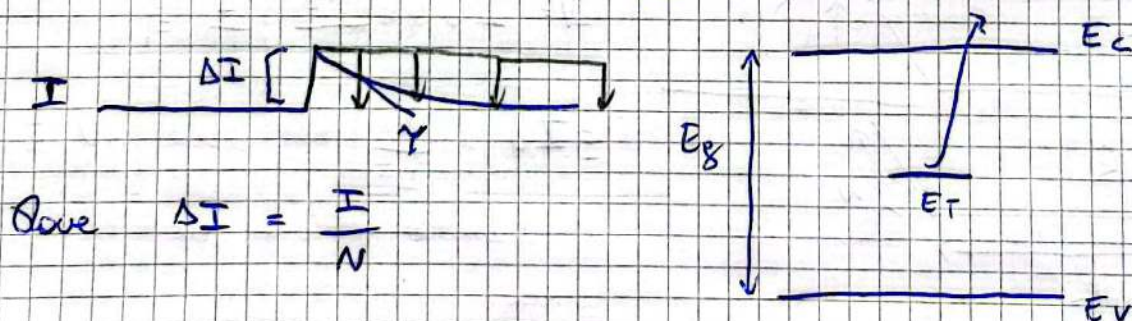
τ_e è l'emission time, il tempo impiegato dall'elettrone prima di essere espulso.

τ_c e τ_e sono quantità statistiche, non fisse.

Dato che τ_e è statistico, in media I nel tempo avrà andamento:



Quo' anche avviene che:



Dove $\Delta I = \frac{I}{N}$

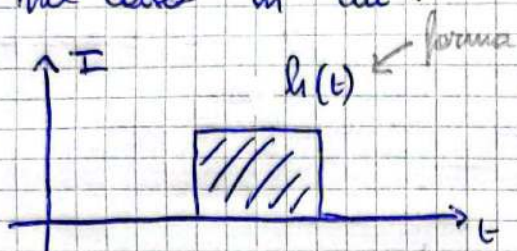
Quo' essere dimostrato che per le trappole (in inglese traps) nell'intorno del livello di Fermi, $\tau_e = \tau_c$.

Però il numero di variazioni positive di I egua =

glia il numero di variazioni negative.

λ_e emission rate. λ_c capture rate. Vale che:
 $\lambda_e = \lambda_c = \lambda$.

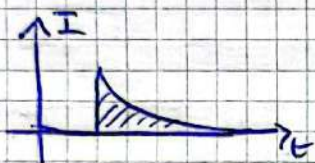
Nel caso in cui:



con rate pari a λ , allora

$$S_I = 2\lambda q^2 |H(j\omega)|^2 \quad \text{dove } q \text{ è l'area della curva.}$$

Nel caso in cui ha forma sia: (picchi positivi)



allora possiamo scegliere il parametro λ ha forma del grafico ha

espressione:

$$h(t) = \frac{1}{\gamma} e^{-t/\gamma}$$

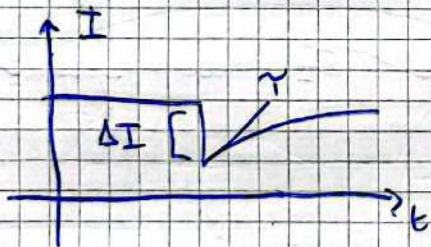
l'area della curva ha le dimensioni di una carica, la chiamiamo Q .

$$Q = \Delta I \cdot \gamma \quad \text{Però:} \quad S_I = 2\lambda Q^2 \frac{1}{1+\omega^2\gamma^2} \quad \text{dove } \lambda$$

è l'emission rate e:

$$H(j\omega) = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{s + 1/\gamma} \quad \text{da cui} \quad |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2\gamma^2}$$

Studiamo ora il contributo dei picchi negativi:



S_I anche in questo caso è lo stesso, dato che è uguale λ , Q e $|H(j\omega)|^2$. Però complessivamente, calcolando picchi

positivi e picchi negativi, si ha che:

$$S_I = 4\lambda Q^2 \frac{1}{1+\omega^2\gamma^2} \quad \lambda \text{ è il numero di eventi di emissione o di cattura per unità di tempo.}$$

$$\lambda = \beta \frac{N_T}{\gamma}, \quad \text{dove } \beta \text{ è un coefficiente e } N_T \text{ è}$$

il numero di trappole.

Q può essere scritta come: $Q = \Delta I \gamma = \frac{I}{N} \gamma$

Però S_I può essere scritto come:

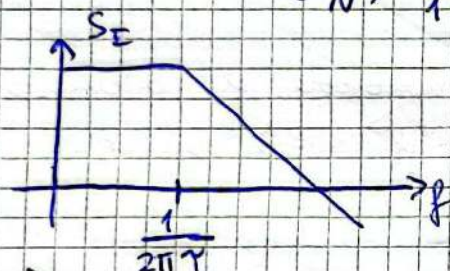
$$S_I = h \beta \frac{N_T}{\gamma} \left(\frac{I}{N} \gamma \right)^2 \frac{1}{1 + \omega^2 \gamma^2} \quad \text{Si può dimostrare}$$

che $\beta = \frac{1}{h}$ per le trappole al livello di Fermi.

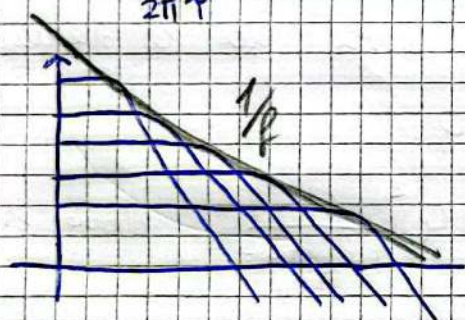
Però $h \beta = 1$. Ottenendo in definitiva:

$$S_I = N_T \left(\frac{I}{N} \right)^2 \frac{\gamma}{1 + \omega^2 \gamma^2}$$

S_I ha quindi forma:

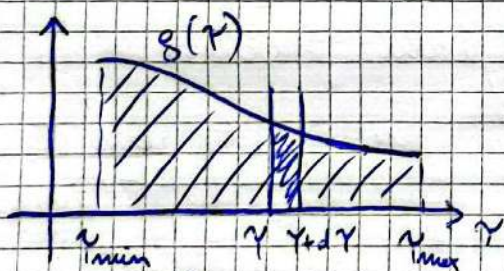


Potremo avere differenti impurità al livello di Fermi che danno diversi contributi di S_I .



Potrebbe succedere che la somma di tutti i contributi S_I danno complessivamente un andamento $1/f$.

Potrebbe succedere che le varie trappole hanno costanti di tempo γ , con andamento $g(\gamma)$.



l'area sotto da N_T .

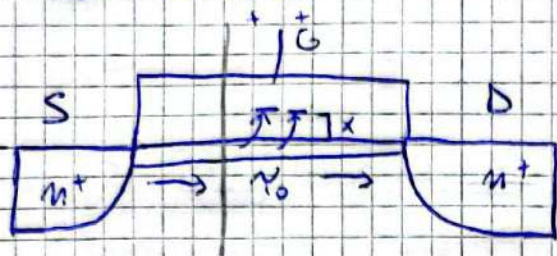
In tal caso S_I ha espressione:

$$S_I = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} N_T \left(\frac{I}{N} \right)^2 \frac{\gamma g(\gamma) d\gamma}{1 + \omega^2 \gamma^2}$$

Nel transistor MOSFET può succedere che alcuni elettroni sono attratti dal gate (carico positivamente) e vanno a finire nell'ossido.

$\Rightarrow$ potremmo avere trappole nell'ossido che dopo un po' vengono riempite nel canale.

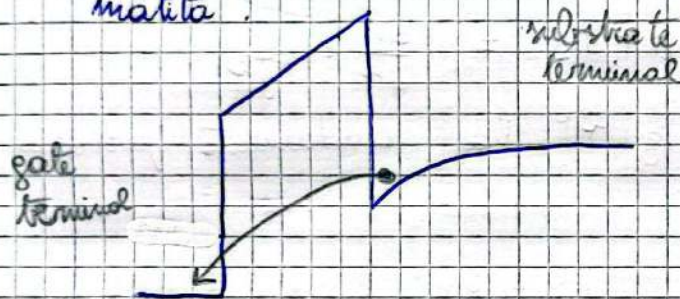
Chiamiamo τ_0 la costante di tempo relativa all'interfaccia tra canale e ossido.



$$\tau = \tau_0 e^{\delta x}$$

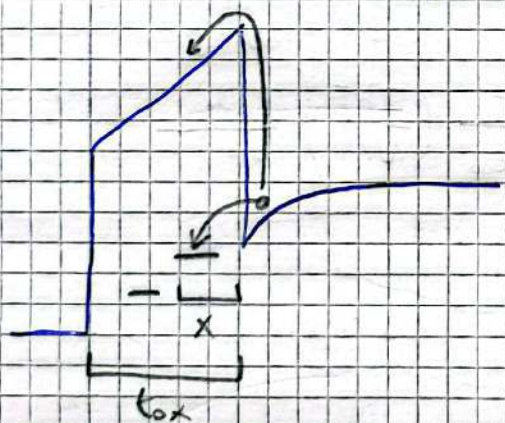
dove x è la profondità dell'impurità all'interno dell'ossido.

Andamento dell'energia potenziale lungo la linea a matita:



l'elettrone è attratto ad andare nella zona a energia potenziale minore. Se l'empiezza dell'ossido è grande, l'elettrone non può arrivare al gate.

Ma se ci sono trappole in mezzo:



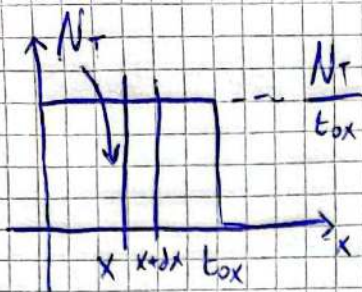
l'elettrone però per finire nella trappola dovrebbe essere in grado di superare la barriera di potenziale.

Però se x è piccola, può avvenire il tunneling e l'elettrone può finire nella trappola anche se

non ha l'energia cinetica sufficiente per superare la barriera. La probabilità che l'elettrone raggiunga la trappola dipende sia dall'altezza della barriera di potenziale (δ è il termine proporzionale a questa altezza) sia dalla distanza x . Breve:

$$\tau = \tau_0 e^{\delta x}$$

Supponiamo di avere varie trappole distribuite uniformemente lungo tutto t_{ox} .



Numero complessivo di trappole: N_T
 Altezza del grafico che indica la
 densità di trappole punto per punto:
 $\frac{N_T}{t_{ox}}$

Il numero di trappole tra x e $x+dx$ è:

$\frac{N_T}{t_{ox}} \cdot dx$ Deve valere che: $\frac{N_T}{t_{ox}} dx = N_T g(\gamma) d\gamma$

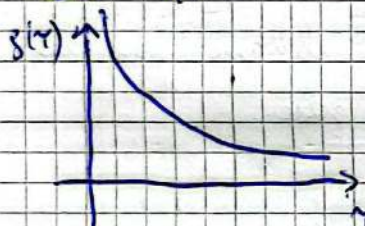
da questa equazione possiamo ricavare l'espressione di

$g(\gamma)$: $g(\gamma) = \frac{1}{t_{ox}} \frac{dx}{d\gamma}$ Dato che $\gamma = \gamma_0 e^{\delta x}$

allora $d\gamma = \delta \gamma_0 e^{\delta x} dx = \delta \gamma dx \Rightarrow \frac{dx}{d\gamma} = \frac{1}{\delta \gamma}$

però $g(\gamma) = \frac{1}{\delta t_{ox} \gamma} \Rightarrow g(\gamma)$ ha andamento iperbolico

con γ :



possiamo ricavare l'integrale che
 esprime S_I con la corretta espressione
 di $g(\gamma)$:

$$S_I = \frac{N_T}{\omega \delta t_{ox}} \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} \left(\frac{I}{N} \right)^2 \frac{d\gamma \omega}{1 + \omega^2 \gamma^2} = \frac{N_T}{\omega \delta t_{ox}} \left(\frac{I}{N} \right)^2 \int_{\omega \gamma_{min}}^{\omega \gamma_{max}} \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\int_{\omega \gamma_{min}}^{\omega \gamma_{max}} \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1}(\omega \gamma_{max}) - \tan^{-1}(\omega \gamma_{min})$$

Chiamo ω la frequenza di interesse, quella alla
 quale opera il circuito. Vale che:

$$\frac{1}{\gamma_{max}} \ll \omega \ll \frac{1}{\gamma_{min}} \Rightarrow \omega \gamma_{min} \ll 1 \text{ e } \omega \gamma_{max} \gg 1$$

questo significa che $\tan^{-1}(\omega \gamma_{min}) \approx 0$ e

$\tan^{-1}(W \gamma_{max}) \approx \frac{\pi}{2}$. Perciò il valore dell'integrale è $\frac{\pi}{2}$. Quindi:

$$S_I = \frac{N_T}{2\pi \gamma_{tox}} \left(\frac{I}{N}\right)^2 \frac{1}{f} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{N_T}{4\pi \gamma_{tox}} \left(\frac{I}{N}\right)^2 \frac{1}{f} \quad \text{che è}$$

proporzionale a $\frac{1}{f}$. S_I si può riscrivere come:

$$S_I = \frac{N_T}{4\pi \gamma_{tox}} \frac{I}{N^2} \frac{I}{f}, \quad N = \frac{WL C'_{ox} (V_G - V_T)}{q} \quad \left[\begin{array}{l} \text{carica complessiva} \\ \text{carica dumentata} \end{array} \right]$$

$\Rightarrow N^2$ dipende da V_{ov}^2 , ma anche I dipende da V_{ov}^2

$$I = \frac{1}{2} \mu_n C'_{ox} \left(\frac{W}{L}\right) V_{ov}^2, \quad N^2 = \frac{(WL)^2 C'_{ox}^2 V_{ov}^2}{q^2}$$

$$\frac{I}{N^2} = \frac{\frac{1}{2} q^2 \mu}{C'_{ox}} \cdot \frac{W}{L (WL)^2} \frac{I}{f}$$

Possiamo riscrivere N_T (che è il numero di trappole nell'anello)

$N_T = n_T t_{ox} WL$. Perciò S_I diventa:

$$S_I = \frac{n_T q^2 \mu t_{ox}}{8 \gamma_{tox} C'_{ox}} \underbrace{\frac{WL}{(WL)^2} \left(\frac{W}{L}\right)}_{\frac{1}{L^2}} \frac{I}{f} = K_I^{1/2} \frac{1}{L^2} \frac{I}{f} \left[\frac{A^2}{H_2} \right]$$

dipende dalla tecnologia
chiamo questo $K_I^{1/2}$

Seguendo questa trattazione:  $hKT \gamma_{gm} + \frac{K_I^{1/2}}{L^2} \frac{I}{f}$

Possiamo passare al seguente modello: $(S_I(f) = g_m^2 S_V(f)) \Rightarrow$

$$S_V = \frac{hKT \gamma_{gm}}{g_m^2} + \frac{K_I^{1/2}}{L^2} \frac{I}{g_m^2} \frac{1}{f} \quad g_m = 2K V_{ov}$$

$\Rightarrow g_m^2 \propto V_{ov}^2$ e anche $I \propto V_{ov}^2$
 $\Rightarrow V_{ov}^2$ si semplifica.

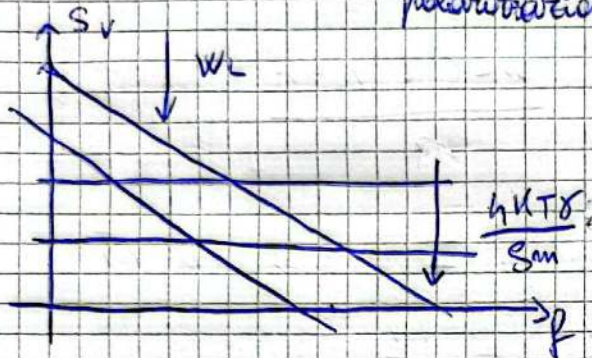
Quindi S_V si può riscrivere come:

$$S_V = \frac{hKT \gamma}{g_m} + K_I^{1/2} \frac{\frac{1}{2} \mu C'_{ox} \frac{W}{L}}{\mu^2 C'_{ox}^2 \left(\frac{W}{L}\right)^2} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{f} = \frac{hKT \gamma}{g_m} + \frac{K_I^{1/2}}{2\mu C'_{ox}} \frac{1}{WL} \frac{1}{f}$$

termine $\frac{1}{f}$

Possiamo definire: $K_V^{1/2} = \frac{K_I^{1/2}}{2\mu}$, per cui:

$$S_V = \frac{hKT\gamma}{g_m} + \underbrace{\frac{K_V^{1/2}}{C_{ox}} \frac{1}{WL} \frac{1}{f}}_{\text{questo termine non dipende dalla polarizzazione}}$$



$\frac{hKT\gamma}{g_m}$ diminuisce all'aumentare di g_m .

La componente $1/f$ diminuisce all'aumentare di WL .

$\Rightarrow$ la componente di S_V collegata al rumore $1/f$ diminuisce all'aumentare di WL .

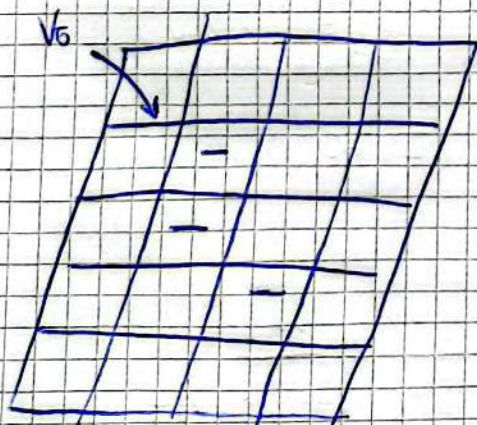
Anche $\sigma_{\Delta V_T}^2$ diminuisce all'aumentare di WL .

Infatti $\sigma_{\Delta V_T}^2 = \frac{K_{\Delta V_T}^2}{WL}$

$$V_T = \phi_{ms} + \frac{2KT}{q} \ln\left(\frac{N_A}{n_i}\right) + \Delta V_{ox}$$

Se sono presenti delle cariche negative nell'ossido, questo richiama cariche positive nel lato di gate. Questo fa aumentare la tensione di soglia rispetto al caso ideale, di un termine $+\frac{Q_T}{C_{ox}}$, per cui la presenza di cariche

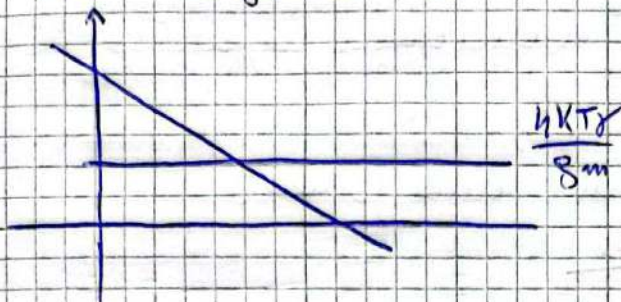
nell'ossido va a modificare la tensione di soglia in positivo o in negativo a seconda del segno delle cariche.



Dove ci sono cariche negative, la tensione di soglia locale è diversa da quella nominale. Ogni elemento è indipendente dall'altro e maggiore è WL maggiore è il numero di elementi indipendenti.

3/12/24

5/12/24

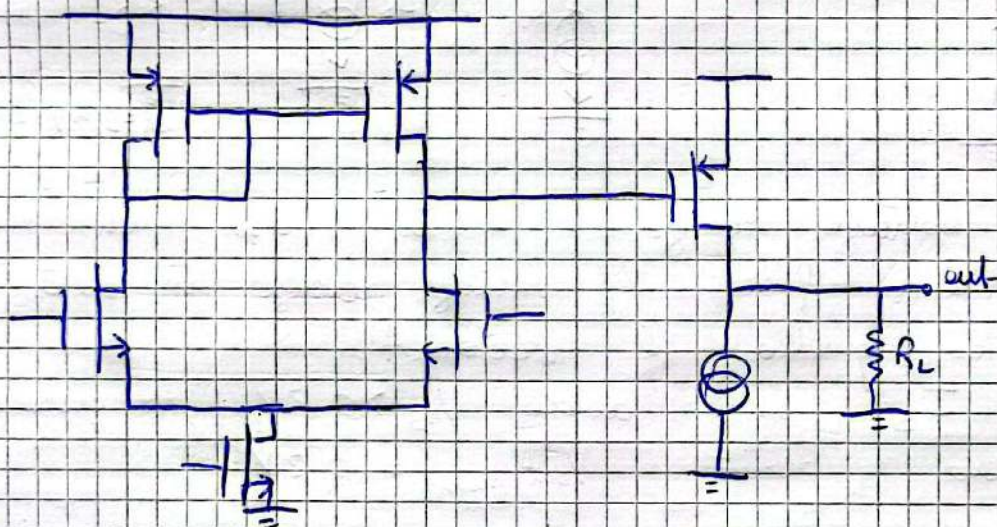
Revisione 26Nel diagramma di S_v :

Aumentando la transconduttanza, la componente di rumore $\frac{4kT\gamma}{g_m}$ diminuisce e la frequency corner f_{nc} si sposta verso destra.

Mentre l'1/f noise è pressoché indipendente dalla polarizzazione.

New topic

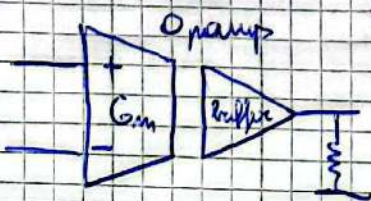
Su un amplificatore differenziale:



Se il carico è capacitivo allora questo non influisce nel guadagno. Ma se il carico è resistivo come in questo caso, questo degrada R_{out} andando di conseguenza a degradare il guadagno.

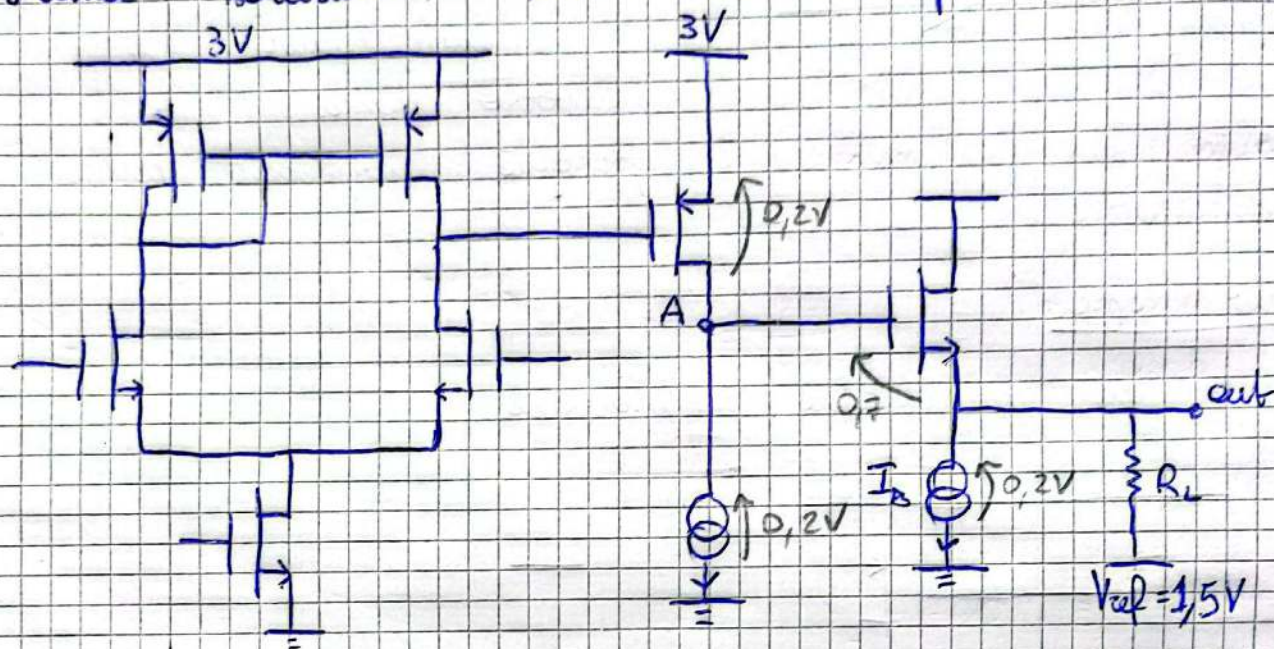
La soluzione è posizionare un buffer tra il nodo d'uscita e il carico.

La sequenza di un transconduttore e un buffer dà un operational amplifier:



Vediamo come implementare il buffer. L'aggiunta del buffer aumenta la dissipazione di energia, perché comporta la polarizzazione di un altro circuito. Però se il carico è esclusivamente capacitivo è meglio evitare di usare il buffer.

Prima soluzione: usare un source follower.



Calcoliamo il voltage range in uscita. Ora, con l'aggiunta del buffer, il voltage range in uscita è inferiore a quello al modo A.

Il generatore I_D deve avere $V_{DS} > 0,2V$ per operare in saturazione. Però: $V_{out, min} = 0,2V$.

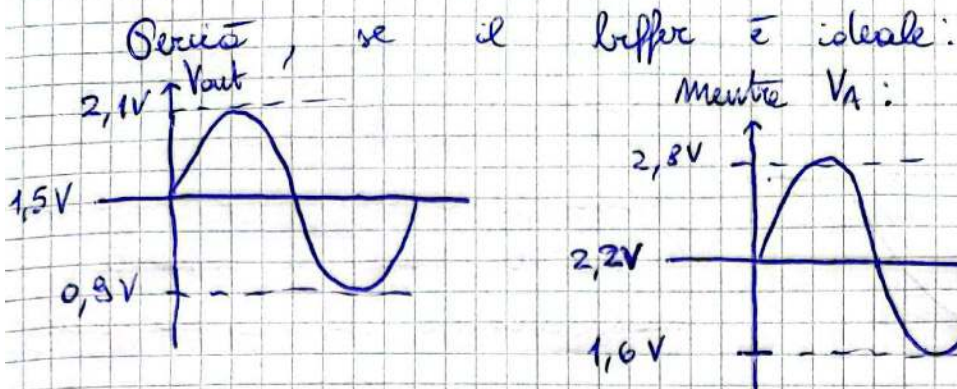
Mentre $V_{out, max} = 3V - 0,2V - 0,7V = 2,1V$.

Sarebbe bello che in polarizzazione $V_{out} = 1,5V$ che è a metà della tensione di alimentazione.

In questo modo in polarizzazione non scorre corrente per R_L . A tal scopo $V_A = 2,2V$ così che

$$V_{out} = V_A - 0,7V = 1,5V.$$

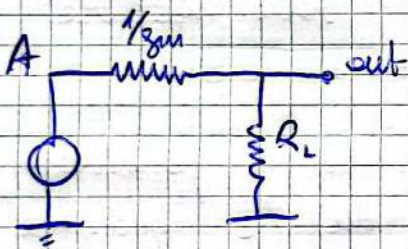
Se V_{out} ha andamento sinusoidale, può avere ampiezza massima pari a $0,6V$ (valore in polarizzazione $1,5V$ e valore massimo $2,1V$).



Stiamo in questo caso considerando il follower ideale, perciò con il trasferimento tra V_A e V_{out} unitario.

In realtà il source follower ha un'impedenza d'uscita finita e pari a $\frac{1}{g_m}$. Inoltre il valore di $\frac{1}{g_m}$ cambia a seconda della corrente che scorre per il transistor.

In realtà il trasferimento tra V_A e V_{out} non è perfettamente unitario, infatti è presente il seguente fattore di tensione:



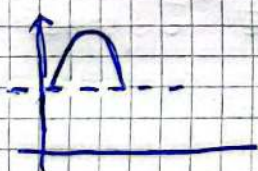
Per cui:

$$\frac{V_{out}}{V_A} = \frac{R_L}{\frac{1}{g_m} + R_L} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g_m R_L}} < 1$$

$\Rightarrow$ c'è una perdita di parte di segnale tra A e out.

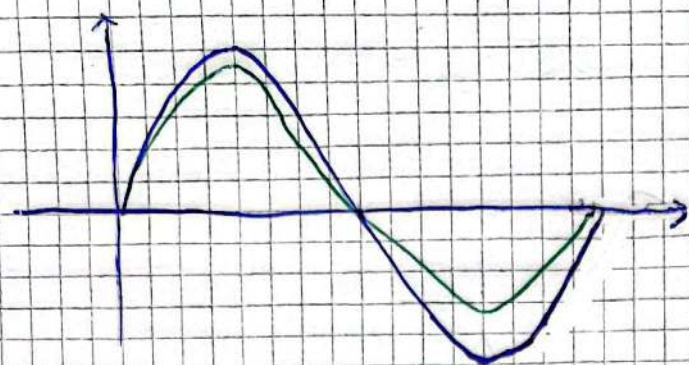
In realtà, inoltre, il circuito non è perfettamente lineare, perché g_m cambia a seconda della corrente che scorre per il transistor.

Se V_A è superiore al valore di polarizzazione,



durante questa fase, scorre più corrente per il source follower e g_m aumenta.
 $\Rightarrow \frac{V_{out}}{V_A}$ tende maggiormente a 1.

Mentre nella parte negativa di V_A :  la corrente diminuisce $\Rightarrow g_m$ diminuisce e il trasferimento $\frac{V_{out}}{V_A}$ si abbassa, allontanandosi da 1.



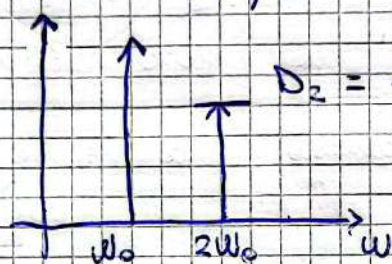
— ideal waveform
— real waveform

Nella parte di curva negativa, la curva reale si discosta maggiormente da quella ideale.

Questa distorsione aggiunge ulteriori armoniche rispetto a quella fondamentale.

In questo caso è presente sicuramente una seconda armonica che ha ampiezza:

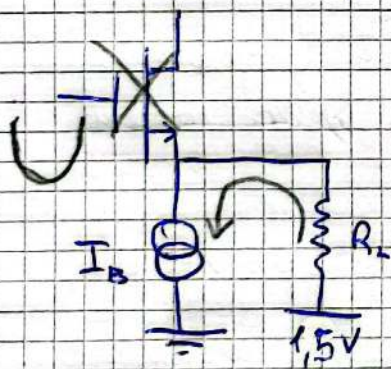
$$D_2 = \frac{A_2}{A_1}$$



Per esempio se la seconda armonica ha un'ampiezza A_2 1000 volte inferiore

all'ampiezza di A_1 , allora $D_2 = -60$ dB.

Durante la semionda negativa di V_A , potrebbe succedere che la corrente proveniente da R_L eguagli I_B , in questo caso il transistor si spegnerebbe.



Infatti quando il transistor riduce la sua corrente per effetto di V_A negativa, la corrente mancante per compensare I_B è presa da R_L . Nel caso limite il transistor si spegne e tutta la corrente è presa da R_L .

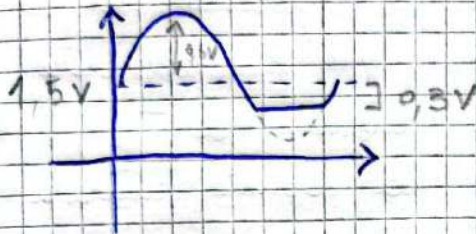
Questo argomento è rilevante per dimensionare I_B .

Supponiamo $R_L = 1k\Omega$

Quando V_{out} è 0,6V sotto il valore di polarizzazione, la corrente per R_L vale 0,6mA.

Bisogna per mantenere il transistor acceso deve avere che $I_B \geq 0,6 \text{ mA}$.

Se invece per esempio $I_B = 0,3 \text{ mA}$ per essere, allora al massimo per R_L possono scorrere $0,3 \text{ mA}$ e $V_{out \min} = -0,3 \text{ V}$. Bisogna ci avrebbe una forma del tipo:

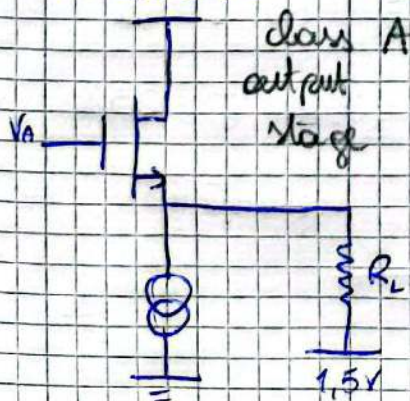


Bisogna la corrente massima che deve scorrere per il transistor è determinata da I_B , che a sua volta è determinata dal voltage

range di V_{out} . In questo caso $I_B = 0,6 \text{ mA}$ e in condizioni di polarizzazione $V_{out} = 1,5 \text{ V} \Rightarrow$ per R_L non scorre corrente $\Rightarrow$ per il source follower che chiamo M_2 deve scorrere tutta $I_B \Rightarrow I_{M_2} = 0,6 \text{ mA}$ ora però possiamo dimensionare $\left(\frac{W}{L}\right)$ e V_{ov} al fine di far scorrere $0,6 \text{ mA}$.

Supponiamo di avere una V_{ov} bassa, per esempio $V_{ov} = 0,1 \text{ V}$. Se $I_{M_2} = 0,6 \text{ mA}$ e $V_{ov} = 0,1 \text{ V}$ si può ricavare $\frac{W}{L}$. Scegliere un valore basso di V_{ov} ha anche benefici in termini di distorsione, perché la distorsione dipende dalla transconduttanza. Quindi riducendo V_{ov} (aumentando $\frac{W}{L}$) per la stessa corrente aumentiamo la transconduttanza e quindi si porta il guadagno a 1 che è il valore ideale.

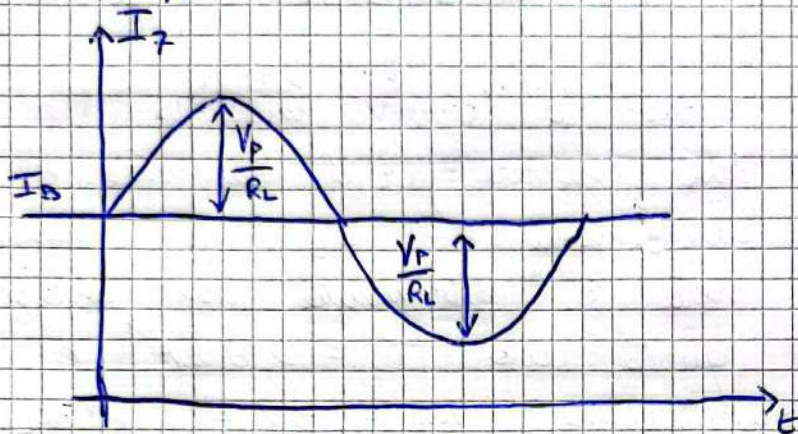
Il buffer ha il compito di comandare il carico. Se ai capi del carico c'è tensione che ha andamento sinusoidale con ampiezza V_p :



stanno portando potenza al carico. ha potenza media val. $\frac{V_p^2}{2R_L}$. Per portare

potenza al carico, dobbiamo prelevare dall'alimentazione.

Chiamo $\eta = \frac{P_L}{\bar{P}_A}$ il rapporto tra la potenza portata al carico e la potenza media prelevata dall'alimentazione. Grafico della corrente per M_7 a fronte di una tensione sinusoidale di ampiezza V_p ai capi di R_L :



la corrente media in un periodo che scorre per il transistor è uguale a I_B , questa è la corrente prelevata dall'alimentazione.

La tensione è V^+ , quella dell'alimentazione positiva. Perciò $\bar{P}_A = I_B V^+$. Perciò:

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \frac{V_p^2}{R_L}}{I_B V^+}$$

I_B come già detto va dimensionato in modo tale che il transistor stia acceso anche durante il picco negativo di I_B . Perciò $I_B \geq \frac{V_p}{R_L} \Rightarrow R_L I_B \geq V_p$.

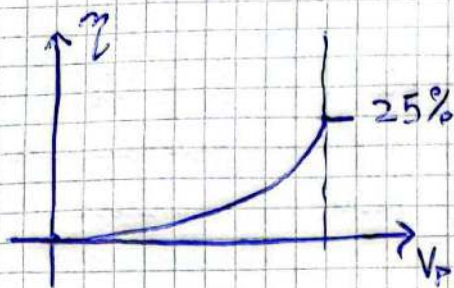
Sapendo che $R_L I_B \geq V_p$, allora:

$$\eta = \frac{V_p^2}{2 I_B R_L V^+} \leq \frac{V_p^2}{2 V_p V^+} = \frac{1}{2} \frac{V_p}{V^+}$$

V_p può assumere come valore massimo $\frac{V^+}{2}$, nel caso è super ideale caso in cui l'unità può sfruttare tutto il range disponibile.

Perciò: $\frac{1}{2} \frac{V_p}{V^+} < \frac{\frac{1}{2} V^+}{2 V^+} = \frac{1}{4} = 25\%$. Perciò la massima efficienza di potenza raggiungibile è 25%.

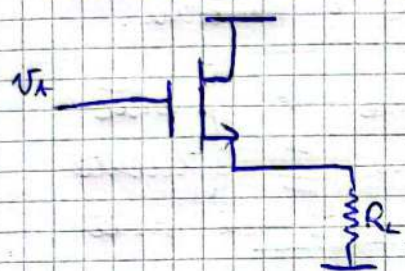
L'andamento di η con V_p ha il seguente grafico:



Questo tipo di buffer è inefficiente perché η ha un valore basso. L'inefficienza deriva dal fatto che anche in DC sono I_B e siamo prelevando indipendentemente dal segnale

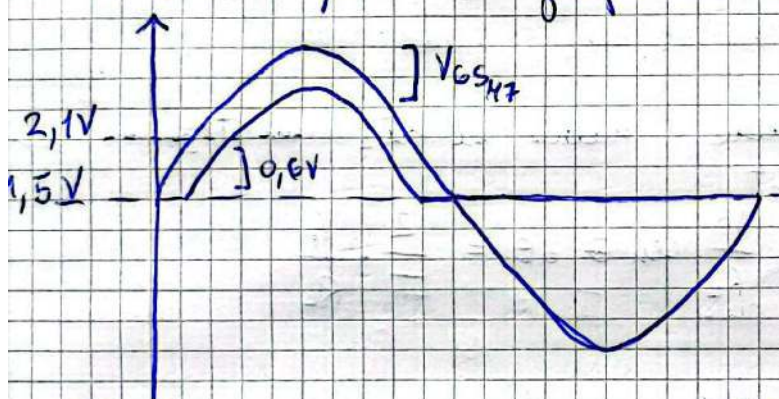
energia dall'alimentatore, ai capi del carico.
Possibile soluzione:

6/12/24



Se il segnale è a $1,5V$, non scorre corrente per R_L e il transistor è spento. Affinché il transistor si accenda, V_x deve essere di almeno una tensione di soglia rispetto al valore di polarizzazione. $\Rightarrow$ anche se V_x cresce, finché non raggiunge $1,5V + V_T$ il transistor rimane spento.

Graficamente:



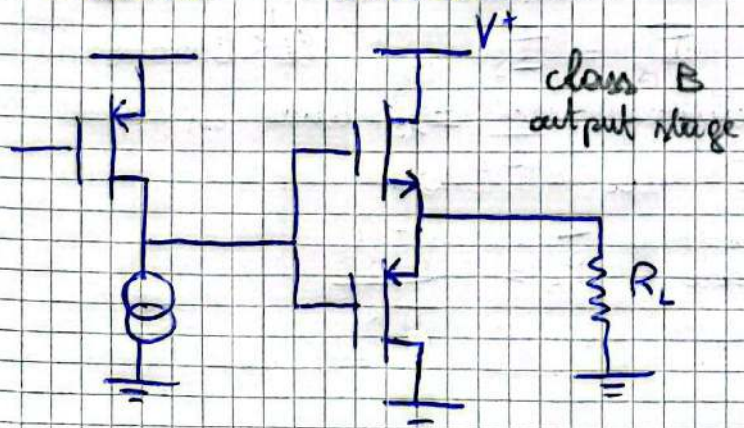
la distanza tra i due grafici è V_{GS_T} .

V_{out} inizia a crescere solo quando $V_x = 1,5V + V_T$. Questa soluzione ha però dei chiari vantaggi:

V_{out} non si muove subito e inoltre rimane una differenza tra V_x e V_{out} .

Inoltre quando $V_x < 1,5 + V_T$ V_{out} non si muove, perciò ogni variazione negativa di V_x non viene riportata in uscita.

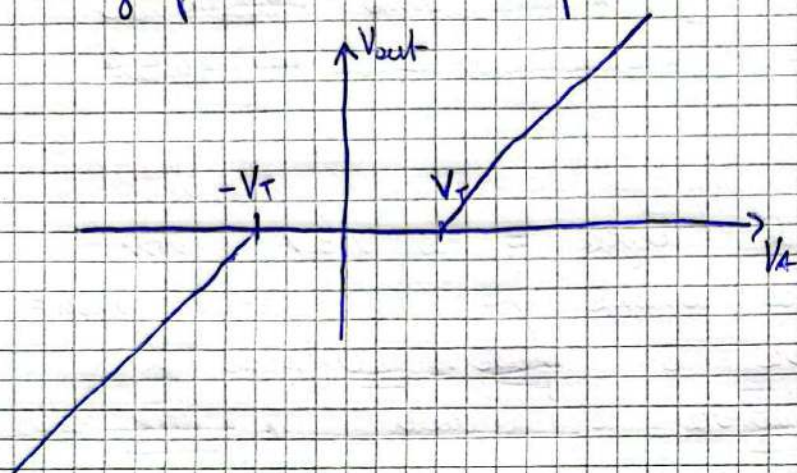
Possibile soluzione:



Se due transistori nMOS e pMOS lavorano alternativamente. Quando V_x positivo lavora l'nMOS, quando V_x negativo lavora il pMOS.

rimane però ancora una zona morta. Se V_A è compreso tra $-0,6V$ e $+0,6V$ nessuno dei due transistor è acceso e V_{out} non si muove.

Grafico del trasferimento:

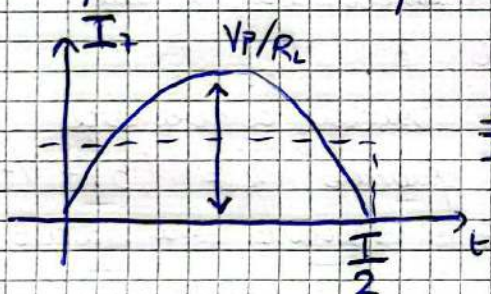


Il trasferimento è ideale tra V_A e V_{out} , allora la pendenza della retta è unitaria.

Vediamo se questa soluzione è efficiente dal punto di vista della potenza:

$$\eta = \frac{P_L}{P_A}$$

In stand-by, se $V_A = 0$ e V_A sta in polarizzazione, i MOS sono spenti e non scorre corrente $\Rightarrow$ non c'è dissipazione di potenza.



Valore medio di I_T in $T/2$:

$$\bar{I}_T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{V_p}{R_L} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_p}{R_L}$$

La corrente scorre tra due nodi che hanno una differenza di potenziale di $\frac{V^+}{2}$. Poiché la potenza media prelevata dall'alimentazione vale:

$$\frac{V^+}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_p}{R_L} = \frac{V^+ V_p}{\pi R_L}$$

Anche durante il tempo di accensione del pMOS la situazione è identica: $\bar{I}_s = \bar{I}_T$ e la tensione ai capi di M_s è sempre $\frac{V^+}{2} \Rightarrow$ anche in questo caso la potenza è la stessa.

Poiché sull'intero periodo $\bar{P}_A = \frac{V^+ V_p}{\pi R_L}$

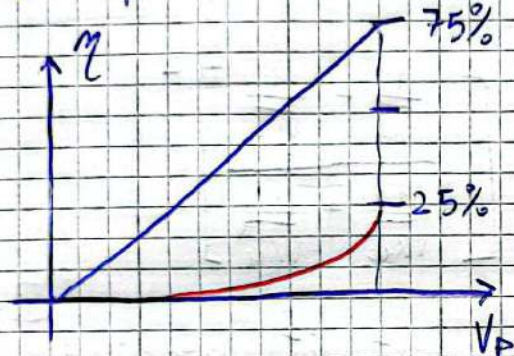
Schaltando, se V_{out} segue perfettamente V_A , vale che:

$$\eta_{max} = \frac{\frac{1}{2} V_P^2 / R_L}{\frac{V^+ V_P}{\pi R_L}} = \frac{\pi}{2} \frac{V_P}{V^+} \leq \frac{\pi}{2} \frac{V^+/2}{V^+} = \frac{\pi}{4} \approx 75\%$$

questo perché $V_{Pmax} = V^+/2$

È un bel miglioramento rispetto al 25% di prima.

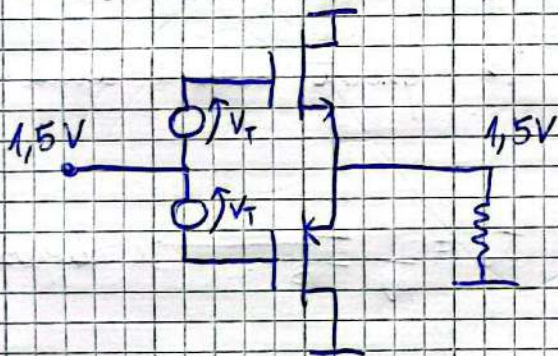
Inoltre ora l'efficienza è direttamente proporzionale a V_P .



— η in questo caso
— η nel caso precedente

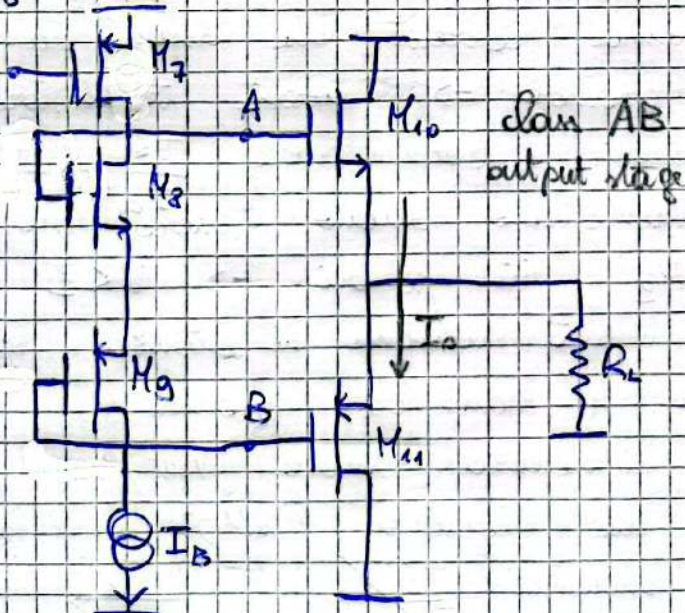
η ora è migliore non solo per il suo valore massimo, ma è migliore $\forall V_P$.

Con una soluzione di questo tipo:



valdo a rimuovere la zona morta di funzionamento del circuito.

Periamo implementare questo stadio usando transistori in configurazione transdiode:



Eliminiamo la zona morta e la distorsione generata dalla zona morta

Il costo è la potenza dissipata in stand-by.

Sobbiamo dimensionare correttamente il rapporto tra I_0 e I_B .

Per la legge di Kirchhoff delle tensioni:

$V_{GS_3} + V_{GS_3} = V_{GS_{10}} + V_{GS_{11}}$. L'equazione può essere risolta come:

$$\cancel{V_{Tn}} + \sqrt{\frac{I_B}{K_3}} + \cancel{V_{Tp}} + \sqrt{\frac{I_B}{K_3}} = \cancel{V_{Tn}} + \sqrt{\frac{I_0}{K_{10}}} + \cancel{V_{Tp}} + \sqrt{\frac{I_0}{K_{11}}}$$

[Grazie alla topologia del circuito, le V_T si elidono anche se $V_{Tn} \neq V_{Tp}$]

L'equazione diventa:

$$\frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_B}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{K_3}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}}}{\frac{1}{\sqrt{K_{10}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{11}}}} \Rightarrow \frac{I_0}{I_B} = \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{K_3}} + \frac{1}{\sqrt{K_3}}}{\frac{1}{\sqrt{K_{10}}} + \frac{1}{\sqrt{K_{11}}}} \right]^2$$

Se dimensioniamo M_3 e M_3 N volte più larghi di M_{10} e M_{11} , allora K_3 e K_3 sono N volte più grandi di K_{10} e K_{11} . In questo caso l'equazione diventa:

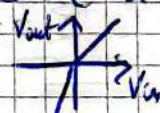
$$\frac{I_0}{I_B} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)^2 = \frac{1}{N} \quad \text{perci } \quad I_0 = \frac{1}{N} I_B \quad \text{Il rapporto}$$

tra I_0 e I_B dipende solo dal valore di $\frac{W}{L}$.

Il transistor dello stadio di uscita sono dimensionati in base alla massima corrente che devono trasportare, che   una corrente grande $\Rightarrow$ questi transistori devono essere abbastanza grandi. Per avere $\frac{I_0}{I_B} = 1$, anche i transistori in transdiode devono essere grandi.

Se facciamo M_3 e M_3 pi  piccoli $\Rightarrow N < 1$ allora $I_0 > I_B$ e si ha alto consumo di potenza. Quindi lo svantaggio   avere i transistori grandi.

Quanto per avere una dipendenza lineare V_{out}/V_{in} in tutto V_{in} , sia positivo che negativo, l'nMOS e il pMOS devono essere ugualmente conduttivi.



h/12/24

Lezione 27

Si può definire il Total Harmonic Distortion come:

$$THD = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 + A_n^2 + \dots}{A_0^2}}$$

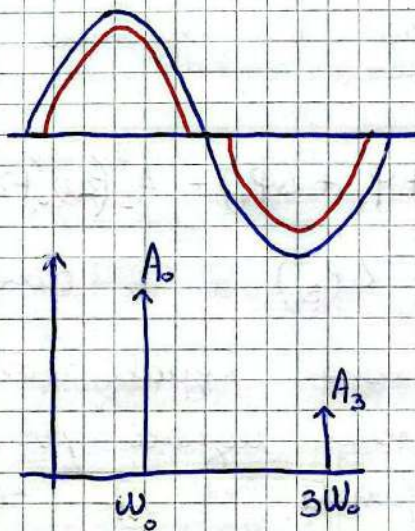
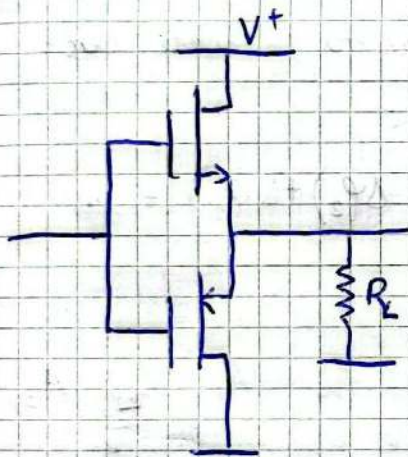
dove $A_2, A_3, A_n \dots$ sono le

ampiezze della seconda, terza, quarta ... armonica, mentre A_0 è l'ampiezza dell'armonica fondamentale.

La degradazione del segnale equivale a: $\frac{S^2}{(W + D)^2}$ dove al denominatore c'è la somma tra rumore e distorsione.

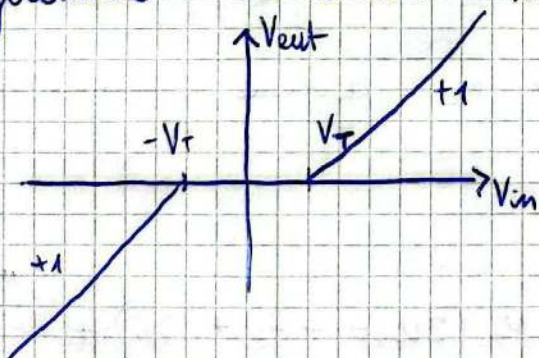
Abbiamo già detto che lo stadio di output di classe A ha come distorsione la seconda armonica dominante.

Studiamo la distorsione della rete di output di classe B:



Questo stadio introduce una distorsione con una terza armonica significativa.

Supponiamo una rete di output di classe B dove $V_{TN} = V_{TP}$, e $\frac{1}{g_m} \ll R_L \Rightarrow$ follower ideale con tra = sporcimento unitario. ha caratteristica V_{out} vs V_{in} è:

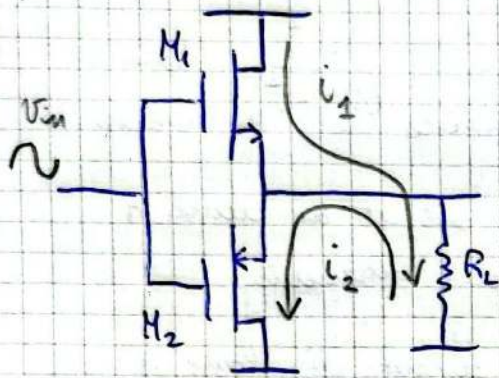


Supponendo quindi $V_{TP} = V_{TN}$, la funzione $V_{out}(V_{in})$ è dispari, per questa ragione è presente un'armonica dispari (la terza) significativa.

Anche se supponiamo $\frac{1}{g_m}$ non trascurabile, e però $\frac{1}{g_{m,n}} = \frac{1}{g_{m,p}}$ la funzione $V_{out}(V_{in})$ rimane

dispari. Se $1/g_m$ non è più trascurabile, quello che cambia è la pendenza del grafico $v_{out}(v_{in})$.
 Se invece c'è qualche asimmetria tra nMOS e pMOS e quindi $v_{out}(v_{in})$ non è più una funzione perfettamente dispari, si aggiungono delle armoniche pari.

Supponiamo ora che i due transistori siano identici:



i_1 scorre nella semionda positiva di v_{in}

$$i_1 = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3) + \dots$$

Quando invece v_{in} ha la semionda negativa, scorre corrente i_2 per M_2 .

$$i_2 = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \Delta\varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + \Delta\varphi_2) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3 + \Delta\varphi_3) \quad \text{dove:}$$

se i 2 transistori sono uguali allora $A_0, A_1, A_2, A_3, \varphi_1, \varphi_2$ e φ_3 sono uguali per i_1 e i_2 . Mentre tutta i_2 è sfasata di $\frac{T}{2}$ rispetto a i_1 . Perciò:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{2\pi}{T/2} \cdot \frac{T}{2} = 2\pi;$$

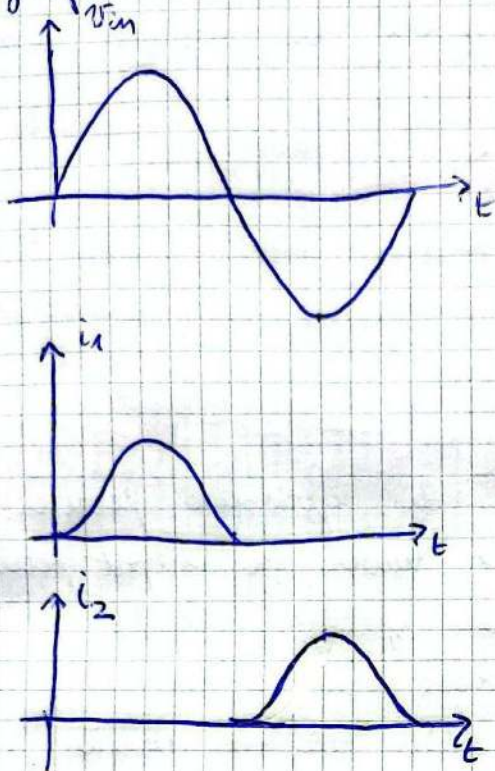
la prima armonica ha periodo T la seconda armonica ha periodo T/2

$$\Delta\varphi_3 = \frac{2\pi}{T/3} \cdot \frac{T}{2} = 3\pi \quad \text{Perciò } i_2 \text{ diventa:}$$

la terza armonica ha periodo T/3

$$i_2 = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1 + \pi) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2 + 2\pi) + A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3 + 3\pi)$$

Graficamente:



ha corrente complessiva che
scorre per la resistenza di carico
è $i_1 - i_2$.

i_2 può anche essere scritta
come:

$$i_2 = A_0 - A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) +$$

$$+ A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) -$$

$$+ A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3) \quad \text{Però}$$

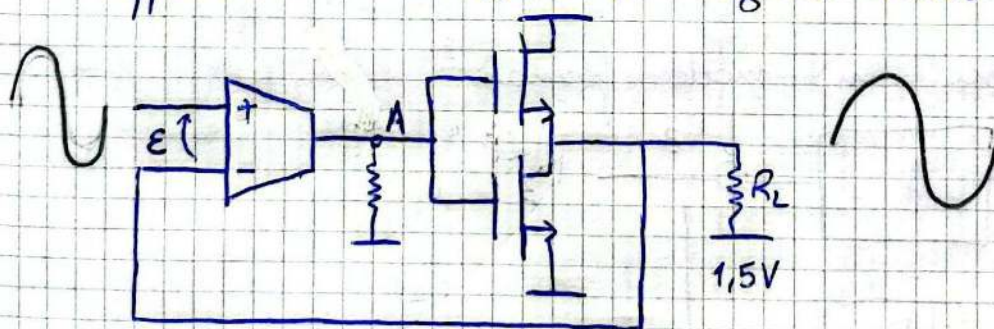
il risultato $i_L = i_1 - i_2$ è:

$$i_L = i_1 - i_2 = 2A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + 2A_3 \sin(3\omega_0 t + \varphi_3)$$

$\Rightarrow$ si vede come la corrente che scorre per R_L (e
quindi anche la tensione) ha armoniche esclusiva-
mente dispari se M_1 è identico a M_2 .

Un metodo per migliorare i problemi di distorsione è
utilizzare la retroazione.

Supponiamo di avere il seguente circuito:

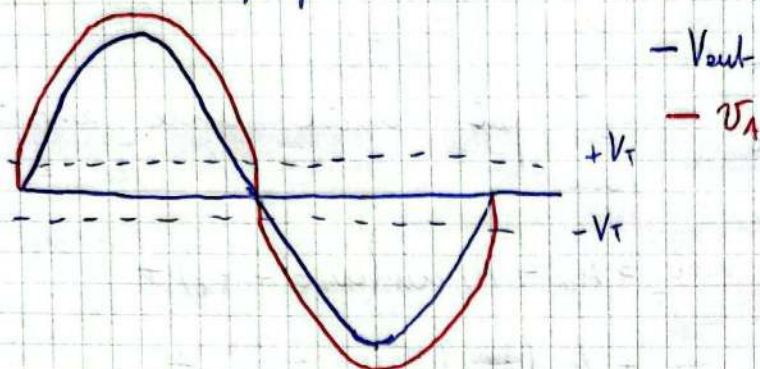


Se $A_0 \rightarrow \infty$
 v_{out} è precisa-
mente identico a
 v_{in} .

$\Rightarrow$ anche se il cir-
cuito introduce di-

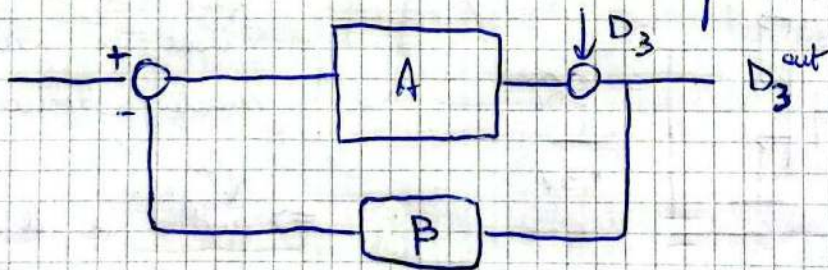
storsioni, se $A_0 \rightarrow \infty$ grazie alla retroazione la distorsione
scompare. Affinché l'unità non sia distorta, è necessario
che la tensione al nodo A non sia sinusoidale.
Supponiamo che $V^+ = 1,5V$. In questo caso lo stadio
in unità è spento.

Per avere in uscita una tensione V_{out} che sia una sinusoide perfetta, V_A dovrà avere la seguente forma.



Quando V_A attraversa la tensione di riferimento pari a metà dell'alimentazione, nulla si muove in output perché lo stadio in uscita è ancora spento. Anche l'input sta aumentando la tensione di riferimento, ma se siamo nella zona morta della rete di uscita, l'output non si muove e E aumenta. Ma se E aumenta, a causa di A_e molto elevato, la tensione V_A cresce a gradino molto repentinamente. Se il guadagno d'anello è infinito, appena V_{in} cresce rispetto alla tensione di riferimento V_A cresce al fine di raggiungere la tensione necessaria per accendere il transistor. È l'ampio guadagno d'anello che fa muovere V_A a gradino in modo tale che il transistor si accenda e la retroazione annulla la distorsione in uscita.

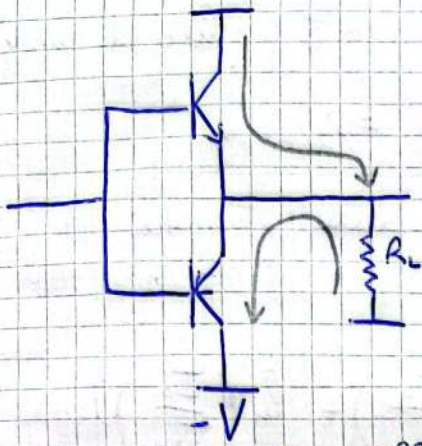
Studiamo la cosa in modo formale:



$$D_3^{out} = -D_3^{out} PA + D_3 \Rightarrow D_3^{out} = \frac{D_3}{1+PA} \quad \text{perché la di} =$$

storsione introdotta D_3 viene ridotta di $1+PA$. Nel caso ideale in cui PA è infinito, non ritroviamo alcuna distorsione in uscita.

7/12/24
 Studiamo ora il circuito implementato con i BST.



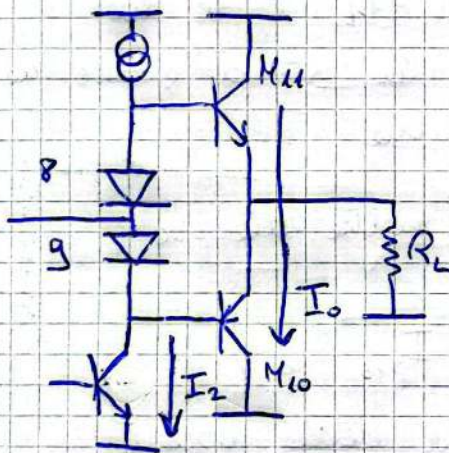
Una cosa furba è fare la seguente cosa: l'mpn è formato da emettitore drogato n, base drogata p e collettore drogato n. Qui c'è il substrato drogato p. Si può usare la base dell'mpn come emettitore del pnp.

il collettore dell'mpn come base del pnp e il substrato dell'mpn come collettore del pnp.

In questo modo si risparmia area.

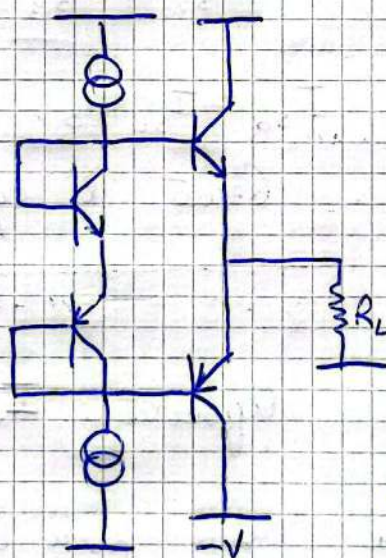
Idealmente i due transistori sono identici e lo stadio introduce solo armoniche dispari, in particolare la terza, in realtà ci sono delle differenze tra i due e perciò vengono introdotte anche armoniche pari.

Per risolvere il problema delle distorsioni della terza armonica.



3 diodi sono costituiti sfruttando le stesse giunzioni dei BST.

Oppure usando i BST in configurazione transdiodo:



In questo caso non c'è condizione di giunzione tra i BST in transdiodo e gli altri.

Perciò in questo caso si usano diodi.

Abbiamo dimensionare i due diodi.

La corrente I_2 è legata alla corrente I_0 , quella che scorre per i BST in condizione di stand-by.

Ora la legge di Kirchhoff delle tensioni:

$$V_{D8} + V_{D9} = V_{BE11} + V_{BE10} \quad \text{in un BJT (o in un diodo)}$$

la corrente ha espressione: $I = I_s e^{\frac{qV_D}{kT}} \Rightarrow$

$$V_D = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{I}{I_s}\right) \quad \text{perciò l'equazione delle tensioni diventa.}$$

importante: i termini kT si semplificano $\Rightarrow$ non c'è più dipendenza con la temperatura.

$$\frac{kT}{q} \left[\ln\left(\frac{I_2}{I_{s8}}\right) + \ln\left(\frac{I_2}{I_{s9}}\right) \right] = \frac{kT}{q} \left[\ln\left(\frac{I_0}{I_{s11}}\right) + \ln\left(\frac{I_0}{I_{s10}}\right) \right]$$

da cui: $\ln \frac{I_2^2}{I_{s8} I_{s9}} = \ln \frac{I_0^2}{I_{s11} I_{s10}} \quad \text{da cui:}$

$$\frac{I_0^2}{I_2^2} = \frac{I_{s11} I_{s10}}{I_{s8} I_{s9}}$$

ha legge di Kirchhoff delle tensioni

si è tradotta in un'equazione tra correnti. Questo prende il nome di translinear loop.

La giunzione del diodo 8 è fatta con la stessa giunzione dell'npn transistor M_{11} e se la giunzione del diodo 9 è fatta con la stessa giunzione del pnp transistor M_{11} , allora vale che:

$$I_{s11} = I_{s8} \quad \text{e} \quad I_{s10} = I_{s9} \quad \text{Inoltre vale che:}$$

$$I_{s8} = I_{s8}' A_8; \quad I_{s9} = I_{s9}' A_9; \quad I_{s10} = I_{s10}' A_{10};$$

$$I_{s11} = I_{s11}' A_{11} \quad \text{Sostituendo l'equazione delle correnti}$$

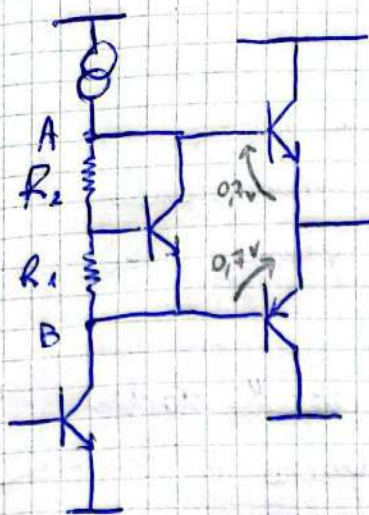
diventa:

$$\frac{I_0^2}{I_2^2} = \frac{A_{11} A_{10}}{A_8 A_9}$$

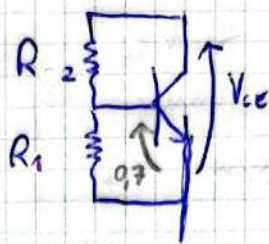
affinché $I_0 = I_2$, l'area di

un BJT deve essere pari all'area del diodo corrispondente.

Soluzione alternativa:



Questa configurazione prende il nome di V_{BE} - multiplier.



Tra i nodi A e B dovrebbe esserci un low impedance device.

la corrente che scorre per R_1 è V_{BE}/R_1 , mentre la tensione ai capi di R_2 vale $\frac{V_{BE}}{R_1} \cdot R_2$. Perciò:

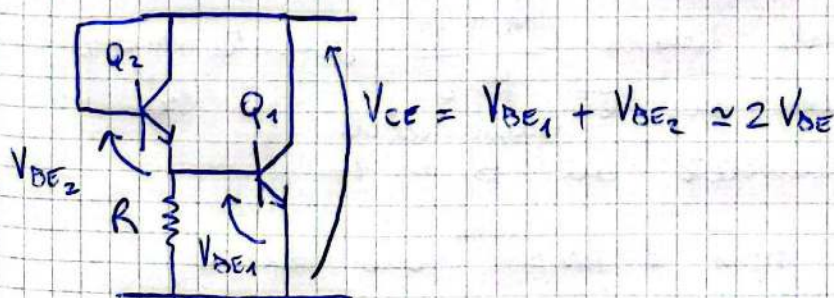
$$V_{CE} = V_{BE} + V_{BE} \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = V_{BE} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad \text{Se } R_1 = R_2$$

$V_{CE} = 2 V_{BE} \approx 1,4 V$ Perciò invece che usare due diodi si può usare questa soluzione per avere comunque una tensione di $1,4 V$ tra le basi di M_{10} e M_{11} . Inoltre modificando il rapporto tra R_2 e R_1 si può variare questa tensione.

La soluzione coi due diodi ha il vantaggio che il rapporto tra I_0 e I_2 è indipendente dal termine kT $\Rightarrow$ è indipendente dalla temperatura, e anche dal termine I_s che anch'esso dipende dalla temperatura. ha vantaggio è un'utilizzo maggiore di area.

Mentre invece la soluzione con i resistori è più precisa perché dipende da V_{BE} e dal valore dei resistori, parametri che vengono influenzati con la temperatura.

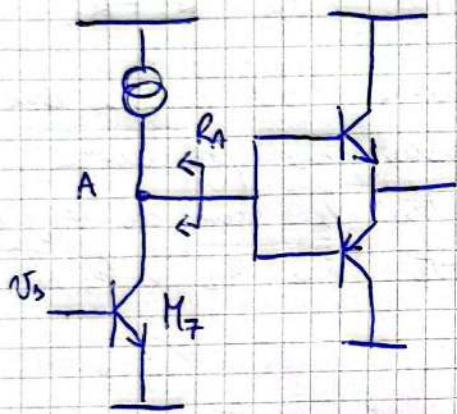
Altra soluzione:



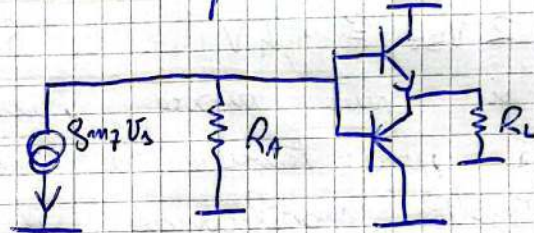
la corrente che scorre per Q_2 vale $\frac{V_{BE1}}{R} \Rightarrow$ questo valore è diviso dal valore di R .

Non ho troppo aperto i bias, ma la corrente che scorre per Q_2 è molto minore di quella per Q_1 , questo implica che $V_{BE2} < V_{BE1}$. Però modificando R , si modifica la corrente per Q_2 e quindi V_{BE2} , andando anche a modificare V_{CE} .

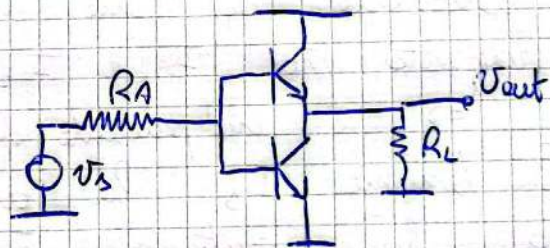
Nel caso dei MOSFET, avevamo visto che lo stadio di output è controllato in tensione. Questo è conveniente in uno stadio costituito da MOSFET, ma non in uno stadio costituito da BJT. Però il modo di ingresso dello stadio di output è meglio che sia controllato in corrente.



Modello equivalente al modo A:



Equivalenti di Thevenin:



Troviamo il legame tra v_{out} e v_s nell'equivalente di Thevenin:

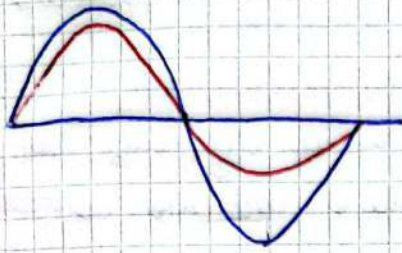
$$v_{out} = \frac{v_s}{R_A + r_{\pi} + R_L \cdot (\beta + 1)} (\beta + 1) R_L = \frac{v_s}{1 + \frac{R_A + r_{\pi}}{\beta R_L}}$$

Se β è grande $\frac{R_A + r_{\pi}}{\beta R_L}$ diventa trascurabile.

Se R_A è piccolo, il termine $\frac{R_A + r_{\pi}}{\beta R_L}$ diventa molto piccolo. Se questo termine non è trascurabile, il tra-
sformatore è influenzato da β e r_{π} .

Se i due transistori npn e pnp sono diversi,

allora il trasferimento cambia a seconda che è impiegato uno o l'altro transistor.

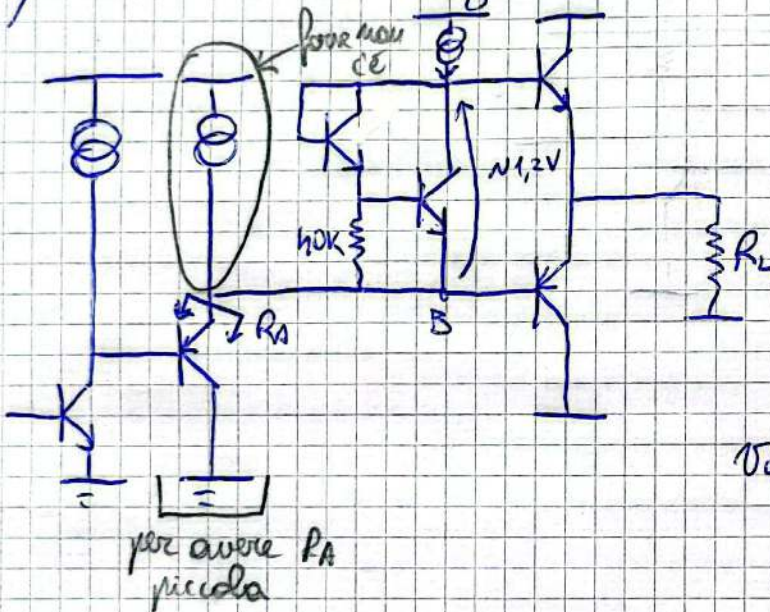


- v_s
- v_{out}

C'è un'attenuazione diversa rispetto all'ingresso tra semionda positiva e semionda negativa. Questo genera distorsione di secondo ordine.

Per rendere più indipendente il trasferimento rispetto a β è meglio ridurre R_s .

Per questa ragione lo stadio di output dell'amplificatore $\mu A 741$ è il seguente:

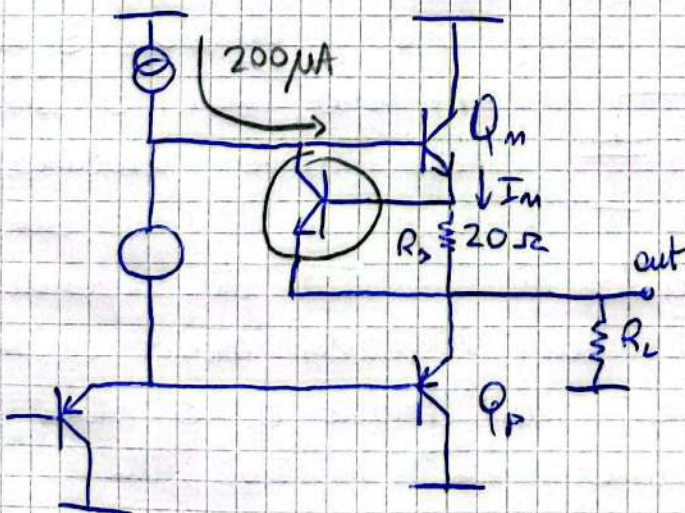


l'emitter follower interno, implementato con il PNP transistor, serve per rendere R_A piccola.

Se idealmente $R_A = 0$, allora:

$$v_{out} = \frac{v_s}{1 + \frac{1}{\beta_m R_L}}$$

Struttura short circuit protection:

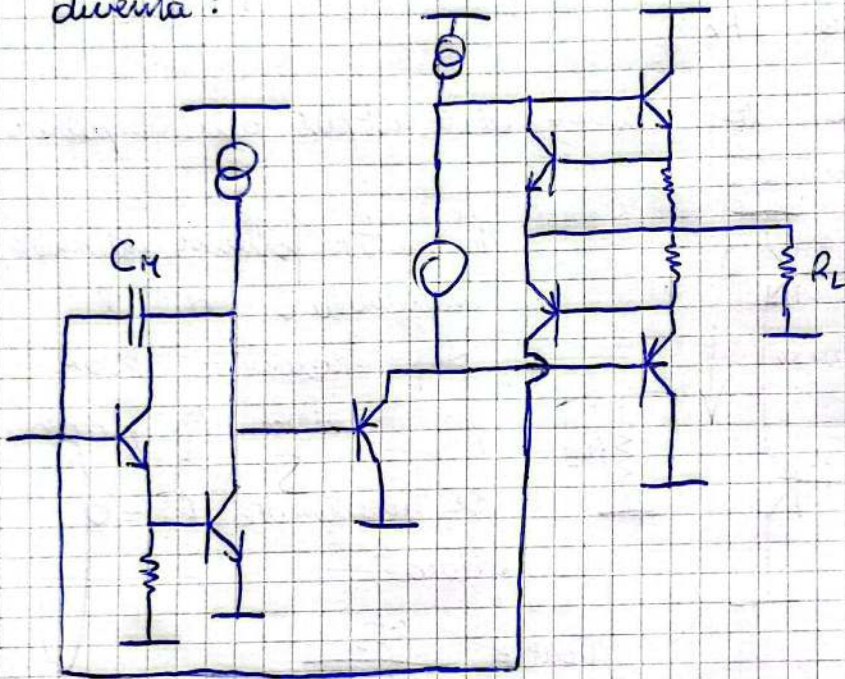


Se per caso si genera un cortocircuito tra out e massa, senza il BJT cerchiato che fa da protezione, la corrente del generatore da $200\mu A$ amplificata di un fattore β potrebbe causare la rottura del transistor Q_n .

Con invece il circuito di protezione, I_n che non

per Q_n , serve per R_D e accende il transistor di protezione e porta via la corrente dalla base di Q_n , evitando che questa venga amplificata di β e compa Q_n .

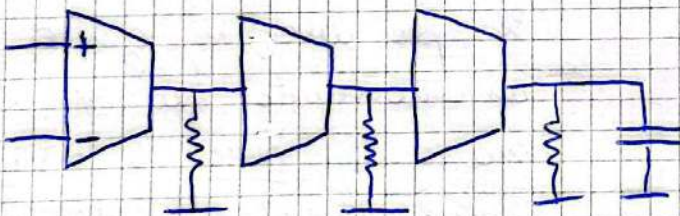
Anche il transistor Q_p va protetto, e si aggiunge un loop attorno all'ingresso del secondo stadio con che la corrente salti lo stadio di output e serve direttamente per il transistor di protezione. Il circuito diventa:



9/12/2h

Lezione 28

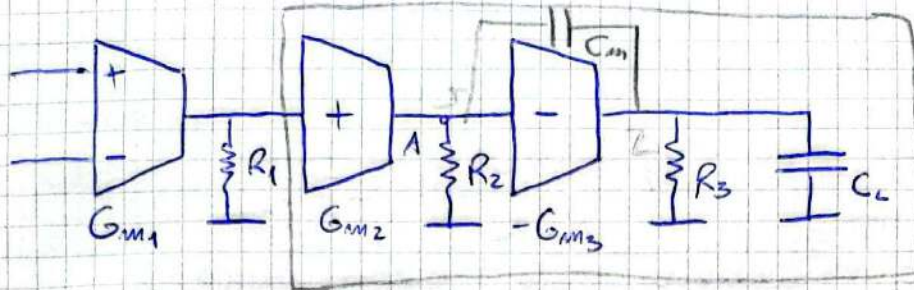
Si potrebbe implementare un circuito a tre stadi:



Ora, essendo 3 stadi, ci sono anche 3 poli che vanno posizionati tutti al di là del

GBWP, questo potrebbe rendere le procedure di compensazione più complesse. Vediamo con il Nested Miller approach come compensare correttamente un circuito a 3 stadi.

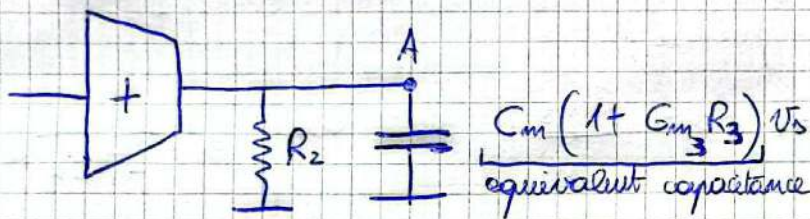
Supponiamo che il terzo stadio sia invertente, la ragione sarà chiara più avanti.



Vediamo l'effetto di una capacità di Miller ai capi dello stadio 3.

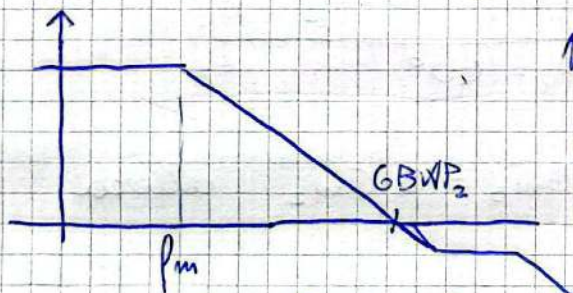
Il terzo stadio deve essere invertente, così che ci sia maggior differenza di potenziale ai capi di C_m .

In questo modo la capacità equivalente vista tra il nodo A e massa vale:



In questo modo si genera un polo dominante f_m a frequenza.

$$f_m = \frac{1}{2\pi R_2 C_m (1 + G_{m3} R_3)} \approx \frac{1}{2\pi R_2 C_m G_{m3} R_3}$$



Mentre il guadagno in DC vale:

$$G_{m2} R_2 G_{m3} R_3$$

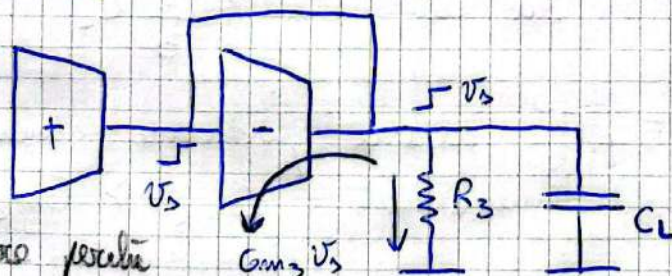
Ossia il $GBWP_2$ vale:

$$GBWP_2 = \frac{G_{m2} R_2 G_{m3} R_3}{2\pi R_2 C_m G_{m3} R_3} = \frac{G_{m2}}{2\pi C_m}$$

GBWP del secondo stadio

A causa di C_m abbiamo anche uno zero positivo e un nuovo polo.

Calcoliamo ora il polo ad alta frequenza: C_m è un corto circuito. Abbiamo calcolare la costante di tempo di C_L .



La corrente complessiva fornita da C_L è:

$$\frac{V_S}{R_3} + G_{m3} V_S = i_S \Rightarrow$$

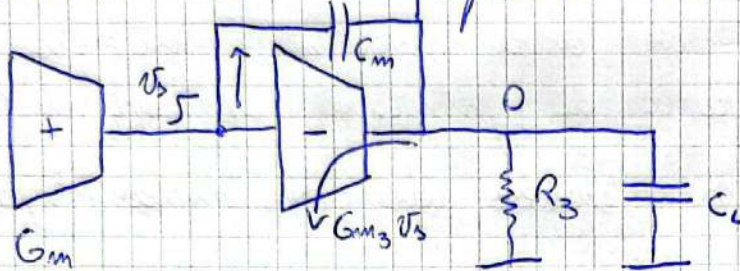
meglio perché la corrente $G_{m3} V_S$

$$\Rightarrow i_S = V_S \left(\frac{1}{R_3} + G_{m3} \right) \Rightarrow \frac{V_S}{i_S} = \frac{1}{G_{m3}} \quad \frac{1}{R_3} \text{ è trascurabile}$$

perché è dell'ordine di $\frac{1}{\tau_0}$.

Però il polo ad alta frequenza è $p_H = \frac{G_{m3}}{2\pi C_L}$.

Calcoliamo ora la frequenza dello zero positivo:



ha corrente che scorre per C_m vale $V_S \cdot s \cdot C_m$. Affinché l'uscita sia nulla, non deve scorrere

corrente per R_3 e quindi:

$$V_S \cdot s \cdot C_m = G_{m3} V_S \Rightarrow s = \frac{G_{m3}}{C_m} \text{ da cui } p_z = \frac{G_{m3}}{2\pi C_m}$$

si ottiene un margine di fase pari a:

$$\Delta\phi_H = 90^\circ - \underbrace{\arctan\left(\frac{GBWP_{2-3}}{p_z}\right) - \arctan\left(\frac{GBWP_{2-3}}{p_H}\right)}_{-30^\circ \text{ volendo } \Delta\phi_H = 60^\circ}$$

$$\frac{GBWP_{2-3}}{p_z} = \frac{G_{m2}}{G_{m3}} \quad \text{se } G_{m3} = 3 G_{m2} \text{ allora}$$

$$\frac{G_{m2}}{G_{m3}} = \frac{1}{3} \quad \text{e } \arctan\left(\frac{GBWP_{2-3}}{p_z}\right) = 18^\circ$$

$$\frac{GBWP_{2-3}}{p_H} = \frac{G_{m2}}{C_m} \cdot \frac{C_L}{G_{m3}} \quad \text{Per avere } \arctan\left(\frac{GBWP_{2-3}}{p_H}\right) = 12^\circ$$

serve che $\frac{GBWP_{2-3}}{p_H} = \frac{1}{5}$, da cui possiamo dimensionare

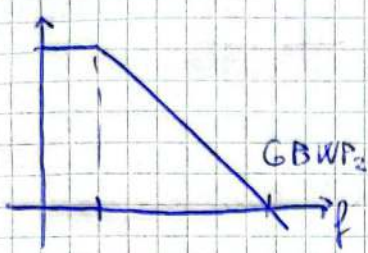
$$C_L \cdot \frac{G_{m2}}{C_m} \cdot \frac{C_L}{G_{m3}} \leq \frac{1}{5} \quad \text{da cui } C_m > \frac{5}{3} C_L$$

per esempio $C_L = 5 \text{ pF}$ allora possiamo dimensionare $C_m = 8 \text{ pF}$. Abbiamo dimensionato $G_{m3} > G_{m2}$ in modo che:

$$\frac{G_{m2}}{2\pi C_m} < \frac{G_{m3}}{2\pi C_L}$$

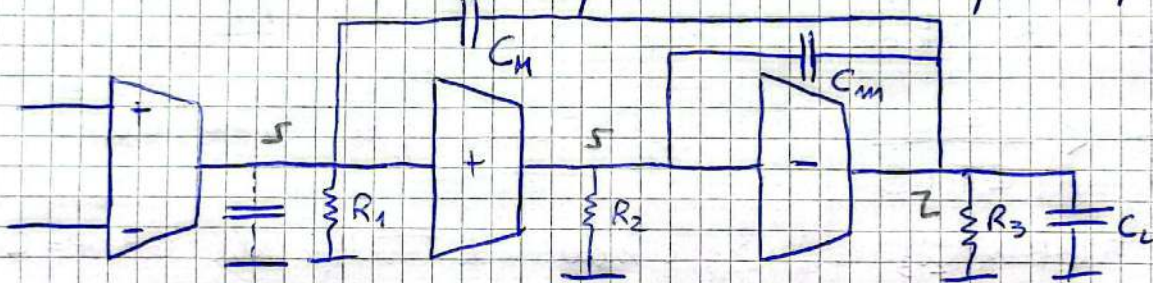
$$GBWP_{2-3} < p_H$$

In questo modo abbiamo ridotto l'ultima parte, costituita dal secondo e terzo stadio, a un solo polo:



Trasferimento del circuito costituito da 2° e 3° stadio.

Consideriamo ora il primo stadio: il primo stadio introduce un ulteriore polo. Perciò ora abbiamo 2 poli, il polo dominante del trasferimento del 2° e 3° stadio e il polo introdotto dal primo stadio. Si precisa che usare un'altra capacità di Miller per compensare:



Affinché C_M compensi, dobbiamo avere Miller effect ai capi di C_M . Perciò G_2 positivo e G_3 negativo. La capacità equivalente di Miller tra il nodo di input del secondo stadio e massa vale:

$$C_M \frac{G_{m2} R_2 G_{m3} R_3}{1} \quad \text{Perciò: } f_H = \frac{1}{2\pi R_1 C_M G_{m2} R_2 G_{m3} R_3}$$

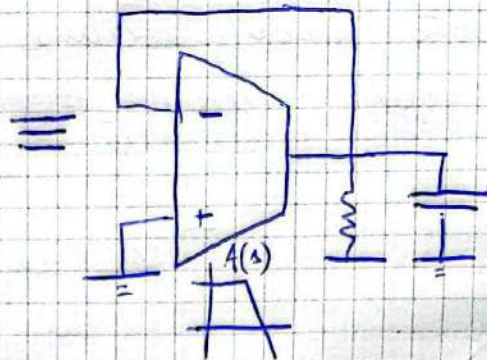
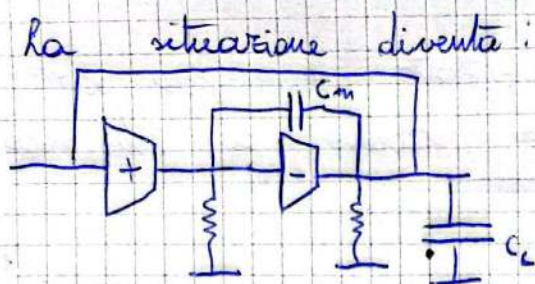
viene amplificata di questa quantità

Il guadagno in DC dell'intero amplificatore vale:

$$G_{m1} R_1 G_{m2} R_2 G_{m3} R_3 \quad GBWP = \frac{G_{m1} R_1 G_{m2} R_2 G_{m3} R_3}{2\pi R_1 C_M G_{m2} R_2 G_{m3} R_3} =$$

$= \frac{G_{m1}}{2\pi C_M}$ Ma ora, dov'è il polo f_m , generato da C_M , che era polo dominante nel circuito costituito da 2° e 3° stadio?

Dato che C_M introduce il polo dominante, per calcolare il polo di C_M considero C_M come corto circuito.



Fondamentalmente è un buffer dove il guadagno $A(s)$ ha un polo. Se il polo del closed loop gain va a finire in corrispondenza del GBWP, in questo caso di quello che abbiamo chiamato $GBWP_{2-3}$. Per avere corretta stabilità deve valere che:

$GBWP < GBWP_{2-3}$, dove $GBWP$ è quello dell'intero circuito a 3 stadi. Ovvero:

$$\frac{G_{m1}}{2\pi C_H} < \frac{G_{m2}}{2\pi C_m}$$

Avevamo già visto che

$$f_H \approx 5 GBWP_{2-3}$$

Supponendo di valere che $GBWP = 2 GBWP_{2-3}$

allora $\frac{G_{m3}}{2\pi C_L} = 10 GBWP$ Supponiamo di valere

che $f_H = 5 MHz$. Abbiamo che $C_L = 5 pF$.

$GBWP = \frac{G_{m1}}{2\pi C_L}$ Dati fino ad ora:

$$GBWP = 5 MHz; G_{m3} = 3 G_{m2}; \frac{G_{m3}}{2\pi C_L} \approx 10 \cdot GBWP = 50 MHz;$$

$$C_L = 5 pF; C_m = 8 pF.$$

$$G_{m3} = 2\pi C_L \cdot 50 MHz = 1,6 mA/V; G_{m2} = \frac{1}{3} G_{m3} \approx 0,5 mA/V.$$

$$GBWP_{2-3} = \frac{G_{m2}}{2\pi C_m} \approx 10 MHz \Rightarrow C_m = \frac{G_{m2}}{2\pi GBWP_{2-3}} = 8 pF$$

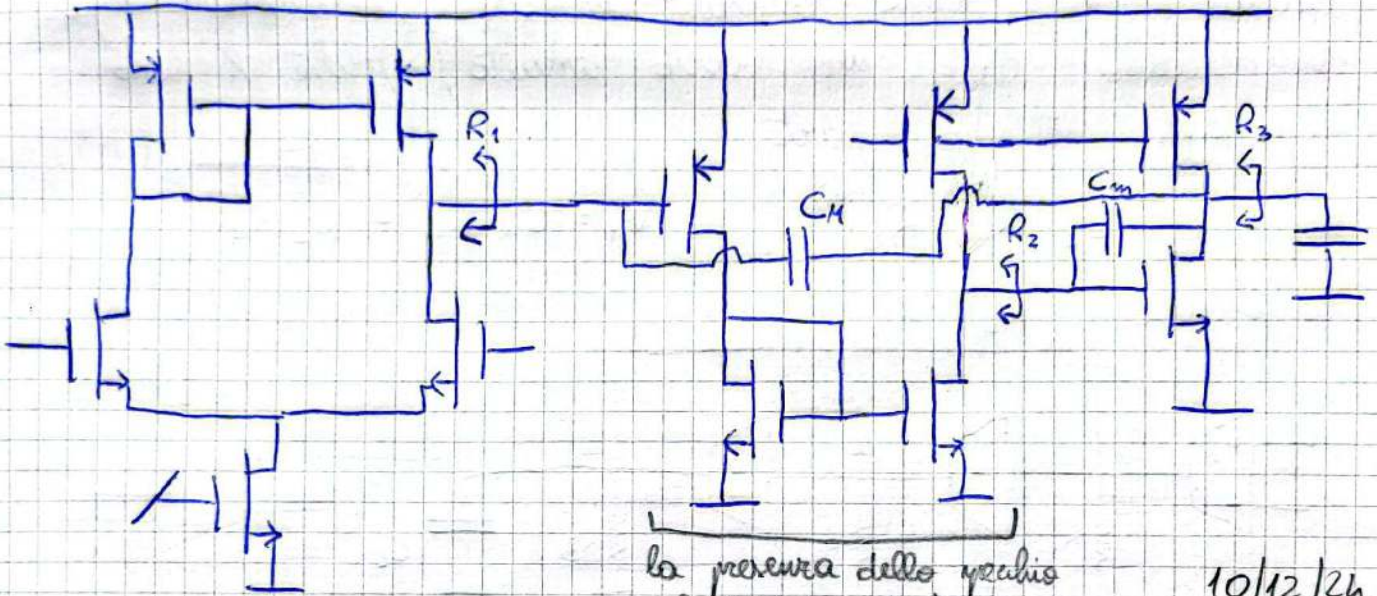
Manca da dimensionare C_H e G_{m1}

$$GBWP = \frac{G_{m1}}{2\pi C_H} = 5 MHz.$$

G_{m1} si dimensiona in

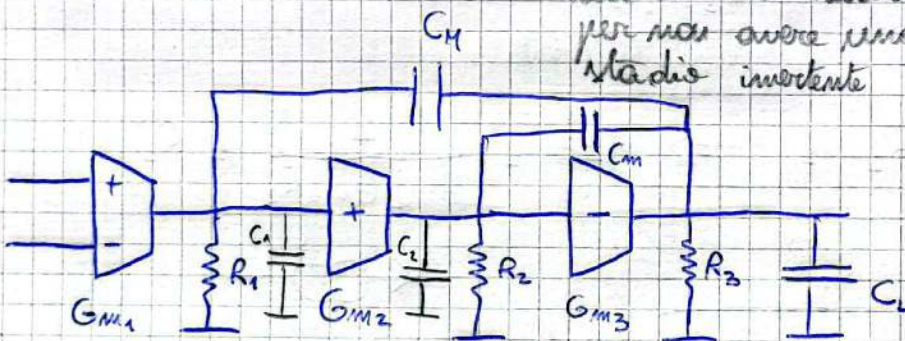
base al rumore. Volendo $S_V = \left(5 \mu V / \sqrt{Hz}\right)^2$, allora

$2I_1 = 150 \mu A$. Supponendo di minimizzare V_{ov1} per massimizzare g_{m1} , possiamo imporre $V_{ov1} = 0,1V$ da cui $g_{m1} = 1,5 \text{ mA/V}$. Per il bias in base al rumore otteniamo $G_{m1} = 1,5 \text{ mA/V}$, ora nell'equazione $\frac{G_{m1}}{2\pi C_M} = 5 \text{ MHz}$ l'unica incognita è C_M , da cui $C_M = \frac{G_{m1}}{2\pi \cdot 5 \text{ MHz}} = 4,8 \text{ pF}$. Circuito complessivo:



la presenza dello specchio nel secondo stadio è per non avere uno stadio invertente

10/12/24



C_1 e C_2 pos = sono essere trascurate, perché quando C_M e C_M vengono riferite a massa, il loro

valore equivalente diventa molto grande e sono in parallelo a C_1 e C_2 , che essendo molto più piccole possono essere trascurate.

Le tre capacità sono indipendenti $\Rightarrow T(s)$ avrà tre poli. Vediamo il numero di zeri: C_L introduce uno zero a frequenza infinita.

Mentre se C_M e C_M sono cortocircuitate, l'output non vale 0 $\forall$ input $\Rightarrow C_M$ e C_M introducono due zeri a frequenza finita. La funzione di tra =

sperimento varia del tipo:

$$T(s) = T(0) \frac{s^2 a_2 + s a_1 + 1}{\underbrace{(s \tau_H + 1)}_{\text{polo dominante}} (s^2 b_2 + s b_1 + 1)}$$

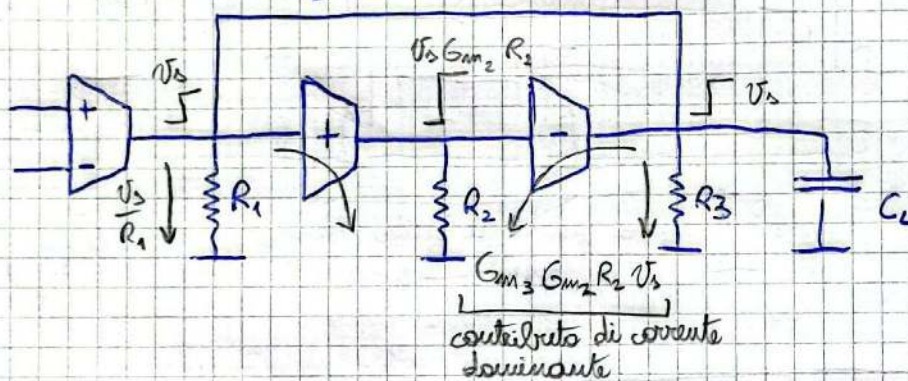
possiamo scrivere il denominatore in questa forma perché sappiamo che C_H

introduce un polo dominante dove $\tau_H = R_1 C_H G_{m2} R_2 G_{m3} R_3$

Usiamo il time constant method per calcolare i poli: consideriamo C_H un corto circuito, perché il polo dominante è a parte.

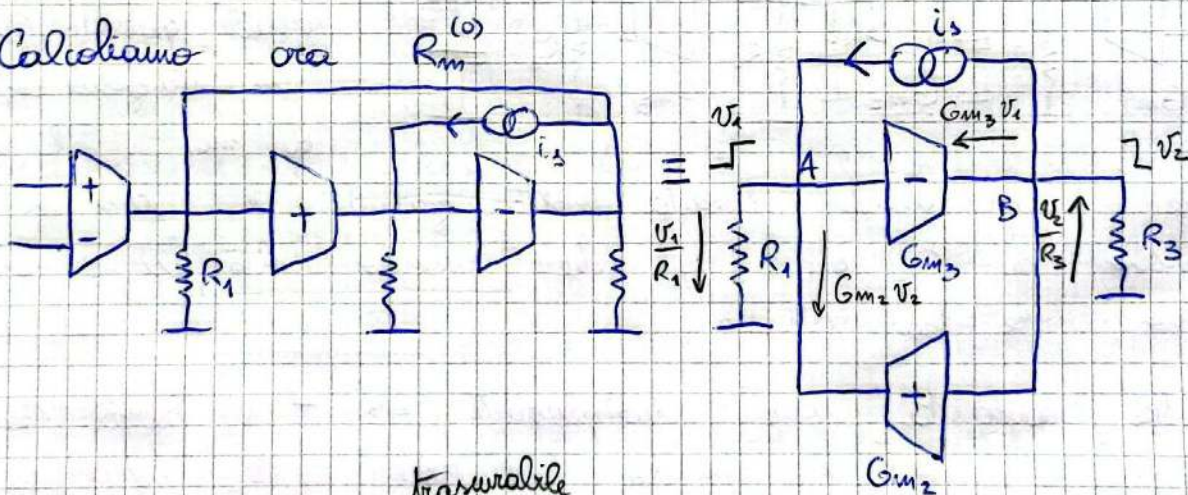
$$b_2 = C_m C_L R_m^{(0)} R_L^{(m)}; \quad b_1 = C_m R_m^{(0)} + C_L R_L^{(0)}$$

Calcoliamo $R_L^{(0)}$:



$$i_s \approx G_{m2} G_{m3} R_2 V_s \Rightarrow \frac{V_s}{i_s} = \frac{1}{G_{m2} G_{m3} R_2} = R_L^{(0)}$$

Calcoliamo ora $R_m^{(0)}$



Al nodo A: $i_s = \frac{V_1}{R_1} + G_{m2} V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{i_s}{G_{m2}}$

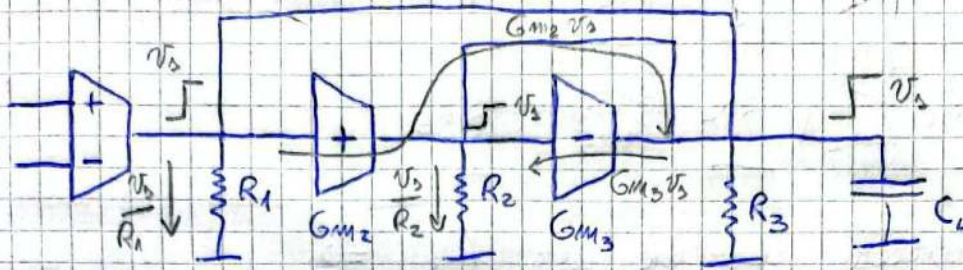
Al nodo B: $i_s = \frac{V_2}{R_3} - G_{m3} V_1 \Rightarrow V_1 = -\frac{i_s}{G_{m3}}$

trascurabile

da cui: $V_S = V_1 + V_2 = i_S \left(\frac{1}{G_{m2}} - \frac{1}{G_{m3}} \right) = i_S \frac{G_{m3} - G_{m2}}{G_{m2} G_{m3}}$

Però $R_m^{(0)} = \frac{G_{m3} - G_{m2}}{G_{m2} G_{m3}}$

Manca da calcolare $R_L^{(m)}$:



$i_S \approx (G_{m3} - G_{m2}) V_S$

$R_L^{(m)} = \frac{1}{G_{m3} - G_{m2}}$

Possiamo quindi risolvere il polinomio $b_2 s^2 + b_1 s + 1$:

$$b_2 s^2 + b_1 s = s^2 C_m C_L \frac{G_{m3} - G_{m2}}{G_{m2} G_{m3}} \frac{1}{G_{m3} - G_{m2}} + s \left[\frac{C_m}{G_{m2} G_{m3}} (G_{m3} - G_{m2}) + \frac{C_L}{G_{m2} G_{m3} R_2} \right]$$

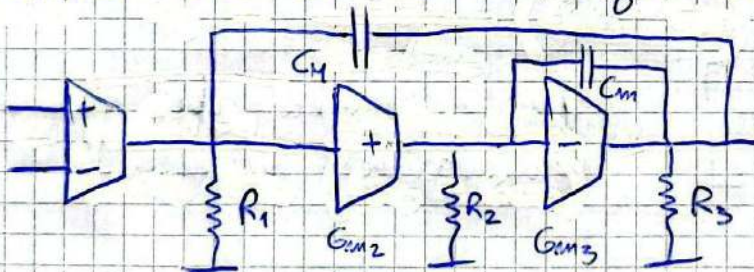
$$+ \frac{C_L}{G_{m2} G_{m3} R_2} = s^2 C_m C_L \frac{1}{G_{m2} G_{m3}} + s \left[\frac{C_m}{G_{m2} G_{m3}} (G_{m3} - G_{m2}) + \frac{C_L}{G_{m2} G_{m3} R_2} \right]$$

Il polinomio può essere scritto nella forma:

$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1$ da cui $Q = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_{m2} G_{m3}}{C_m C_L}}$

$b_1 = \frac{1}{\omega_0 Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 b_1} = \sqrt{\frac{C_m C_L}{G_{m2} G_{m3}}} \frac{1}{b_1}$

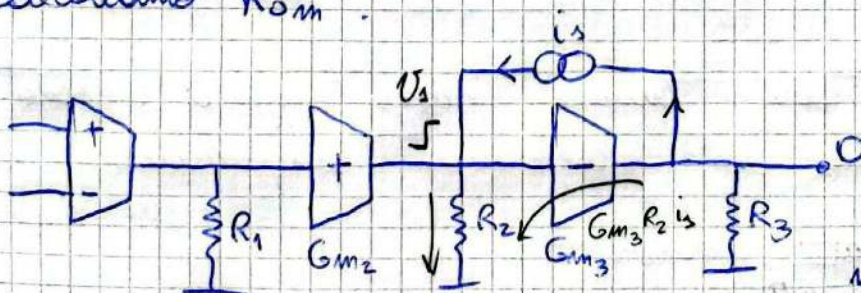
Passiamo ora al calcolo degli zeri:



$z_2 = C_m C_L R_m^{(0)} R_m^{(m)}$

$z_1 = C_m R_m^{(0)} + C_m R_m^{(m)}$

Calcoliamo $R_m^{(0)}$:



Non deve scorrere corrente per R_3 , però:

$G_{m3} R_2 i_S = -i_S$
ma $R_2 i_S = V_S \Rightarrow$

$f_p = 22,5 \text{ MHz}$ circa 1 volta il GBW

$Q = 0,67$ che è un valore vicino a 0,5. Se $Q = 0,5$

si hanno due poli reali, se $Q > 0,5$ i poli diventano complessi coniugati.

N.B. anche in questo caso, con un amplificatore a 3 stadi, possiamo inserire R_N per compensare lo zero positivo e migliorare la risposta in frequenza.

10/12/24

13/12/24

Lezione 23

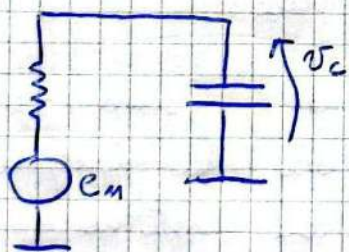
Approfondimento su alcuni argomenti riguardanti il rumore

(anche se è un approfondimento, è comunque da studiare)

Un resistore R ha una potenza spettrale di rumore
 $S_V = kTR$. Avevamo ottenuto questo risultato facendo l'analisi su una rete RC.

Il sistema ha un solo grado di libertà, infatti l'energia del sistema è interamente determinata dalla tensione V_C che c'è ai capi del condensatore. Per la legge di Boltzmann l'energia immagazzinata nel sistema è $\frac{1}{2} kT$. Energia nel condensatore $\frac{1}{2} C \langle v^2 \rangle \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} C \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \frac{kT}{C}$$



Il collegamento tra $\langle v^2 \rangle$ ed il generatore di rumore e_n è:

$$\langle v^2 \rangle = W \int_0^{\infty} |T(j\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

Il termine W deriva dal fatto che la tensione e_n è costituita da molti picchi, paragonabili a una serie di



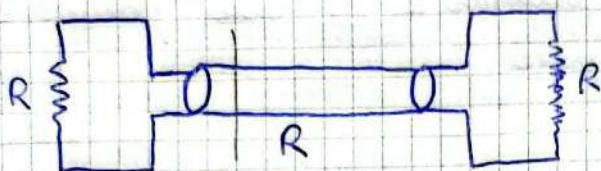
ma la trasformata di Fourier di una S è un valore costante, W è il valore complessivo di tutti i

contributi.

$$\langle v^2 \rangle = \frac{W}{4RC} \Rightarrow \frac{W}{4RC} = \frac{kT}{C} \quad \text{da cui } W = 4kTR.$$

$\Rightarrow$ questa dimostrazione si basa nel fatto che il rumore generato da e_n sia perfettamente bianco.

Facciamo ora una trattazione più precisa:



Se due resistori R sono connessi da un cavo coassiale che ha impedenza caratteristica = resistenza R .



Il campo elettrico E è radiale e presente tra lo strato interno e lo strato esterno del cavo coassiale. Calcoliamo quanto vale il campo a una distanza r dal conduttore interno.

Supponiamo ci sia carica positiva sul conduttore interno, mentre ci sia carica negativa sul conduttore esterno. Chiamo σ la densità di carica per unità di area sulla superficie del conduttore interno. $\sigma \left[\frac{C}{m^2} \right]$

Calcoliamo il flusso di campo elettrico attraverso il cilindro di raggio r e altezza h :

$E(r)$ è il modulo del campo elettrico a distanza r dal conduttore interno. Il flusso vale:

$E(r) \cdot 2\pi r h$. Per il teorema di Gauss, questo flusso è pari alla carica totale dentro la superficie, quindi quella posizionata sul conduttore interno. Quindi:

$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi r_0 h}{\epsilon}$ dove ϵ è la costante dielettrica e r_0 è il raggio del conduttore interno.

Quindi:
$$E(r) = \frac{\sigma r_0}{\epsilon r}$$

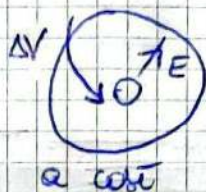
Chiamo r_1 il raggio del conduttore esterno, la differenza di potenziale $\Delta\phi$ che c'è tra r_0 e r_1 vale:

$$\Delta V = - \int_{r_0}^{r_1} E(r) dr = - \frac{\sigma r_0}{\epsilon} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r} = - \frac{\sigma r_0}{\epsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$



da cui

Se si cambia l'orientazione di ΔV , quindi

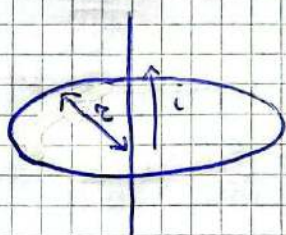
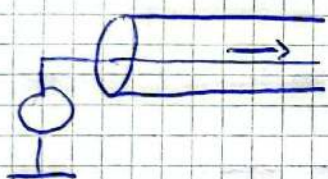


da cui

e ΔV diventa:

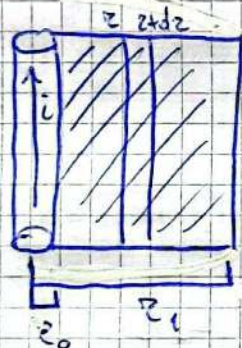
$$\Delta V = \frac{\sigma r_0}{\epsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

Per il conduttore scorre il segnale, può scorrere una corrente che genera un campo magnetico.



$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}$$

Però anche nel cavo cavi c'è campo magnetico circolare tra i due conduttori e c'è flusso di campo magnetico nella superficie tra i due.



Chiamo ϕ il flusso del campo magnetico

$$\phi = \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mu i}{2\pi r} dz \cdot h = \frac{\mu i}{2\pi} h \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) = Li$$

dove $L = \frac{\mu}{2\pi} h \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$ chiamiamo

definire L' primo come induttanza per unità di lunghezza, essa vale:

$$L' = \frac{L}{h} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

Sappiamo la carica totale Q posta nel conduttore interno:

$$Q = \sigma 2\pi r_0 h \quad \text{e} \quad \text{conosciamo anche } \Delta V \text{ la differenza di potenziale tra i due conduttori. Possiamo porre}$$

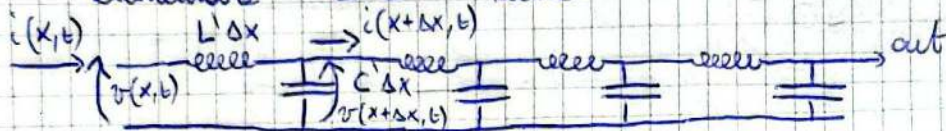
definire la capacità come:

$$C = \frac{\sigma 2\pi r_0 h}{\frac{\sigma r_0}{\epsilon} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} = \frac{2\pi \epsilon h}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$$

la capacità per unità di lunghezza vale:

$C' = \frac{C}{h} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$. Cambiando il materiale si agisce su μ e ϵ , cambiando le dimensioni si agisce su r_1 e r_0 , perciò modificando materiale e dimensioni si può agire su L e C .

Ogni pezzo di cavo può essere visto come una rete elementare L, C dove:



Possiamo considerare le grandezze nella trasformata di Laplace rispetto al tempo e sostituire t con s .

Le impedenze induttive e capacitive diventano:

$sL'\Delta x$ e $\frac{1}{sC'\Delta x}$. Possiamo scrivere che:

$$v(x+\Delta x, s) = v(x, s) - i(x, s) sL'\Delta x$$

$$i(x+\Delta x, s) = i(x, s) - v(x+\Delta x, s) sC'\Delta x$$

Risolviamo le equazioni come:

$$v(x+\Delta x, s) - v(x, s) = -i(x, s) sL'\Delta x$$

$$i(x+\Delta x, s) - i(x, s) = -v(x+\Delta x, s) sC'\Delta x \quad \text{dividiamo}$$

tutto per Δx e facciamo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x, s) - v(x, s)}{\Delta x} = -i(x, s) sL'$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i(x+\Delta x, s) - i(x, s)}{\Delta x} = -\overbrace{v(x, s)}^{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x+\Delta x, s)} sC' \quad \text{perciò:}$$

$$\frac{dv(x, s)}{dx} = -s i(x, s) L' \quad \text{e} \quad \frac{di(x, s)}{dx} = -s C' v(x, s)$$

Calcolo la derivata seconda della tensione:

$$\frac{d^2 v(x, s)}{dx^2} = -s L' \frac{di(x, s)}{dx} = s^2 L' C' v(x, s)$$

Calcoliamo ora la derivata seconda della corrente:

$$\frac{d^2 i(x, s)}{dx^2} = s^2 L' C' i(x, s) \quad \text{Se ora scriviamo le equazioni nel dominio del tempo:}$$

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{che è l'equazione d'onda:}$$

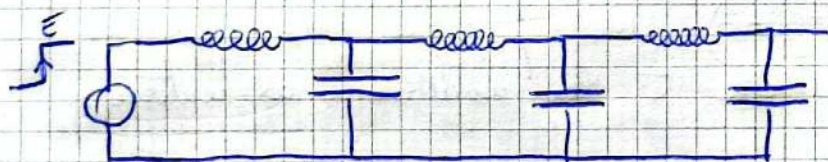
$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{1}{L' C'}}_{c^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{dove } \frac{1}{L' C'} = c^2 \text{ velocità della luce al quadrato.}$$

$$c = \frac{1}{L' C'} = \frac{1}{\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \frac{\epsilon 2\pi}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}} = \frac{1}{\mu \epsilon} \quad \text{che è il quadrato}$$

della velocità della luce nello strato tra i due conduttori.
Per la corrente:

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{Supponiamo di dare in ingresso}$$

al cavo una tensione a gradino di ampiezza E .



La trasformata di Laplace della funzione gradino di ampiezza E è $\frac{E}{s}$

tenendo a riferimento l'equazione: $\frac{d^2 v(x, s)}{dx^2} = s^2 L' C' v(x, s)$
possiamo chiamare $\lambda^2 = s^2 L' C'$ e perciò $\lambda = \pm s \sqrt{L' C'}$

la soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

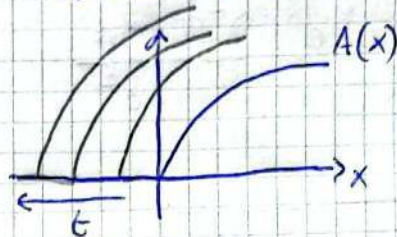
$$v(x, s) = A e^{s \sqrt{L' C'} x} + B e^{-s \sqrt{L' C'} x}$$

Nel dominio di Laplace, l'operatore e^{-sT} corrisponde a una traslazione nel dominio del tempo:

$e^{-sT} \hat{p}(s) \Rightarrow p(t-T)$
sarà del tipo:

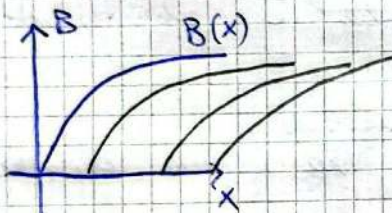
$v(x,t) = A(t + \sqrt{L'C'}x) + B(t - \sqrt{L'C'}x)$ dove A e B sono funzioni. Annunziamo che $A(0,0) = 0$, perciò il valore di x tale che $A=0$ è:

$$x = -\frac{t}{\sqrt{L'C'}} \quad , \quad \text{perci\`o:}$$



al crescere di t $A(x)$ trasla verso sinistra.

Anche $B(x,t) = 0$ per $x=0 \wedge t=0$. Il valore di x tale che $B=0$ è: $x = \frac{t}{\sqrt{L'C'}}$ perciò:



al crescere di t $B(x)$ trasla verso destra.

Dato che stiamo iniettando segnale dalla parte sinistra della rete e il segnale si propaga verso destra, siamo interessati alla funzione B e trascuriamo il termine $A(x,t)$ della soluzione.

Stiamo in ingresso ($x=0$) una funzione a gradino, perciò $v(0,s) = \frac{E}{s}$ che è la condizione al contorno.

$$v(x,s) = B e^{-s\sqrt{L'C'}x} \quad (\text{abbiamo trascurato il termine } A)$$

$$v(0,s) = B, \quad \text{ma} \quad v(0,s) = \frac{E}{s} \Rightarrow B = \frac{E}{s} \quad \text{Quindi}$$

$$v(x,s) = \frac{E}{s} e^{-s\sqrt{L'C'}x} \Rightarrow v(x,s) = \frac{E}{s} e^{-s\frac{x}{c}} \quad \text{con } c$$

velocità della luce nel mezzo.

Il collegamento tra tensione e corrente è dato dall'equazione:

$$\begin{aligned} \frac{dv(x,s)}{dx} &= -sL' i(x,s) \Rightarrow i(x,s) = -\frac{1}{sL'} \frac{dv(x,s)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{sL'} \frac{E}{s} \cdot \frac{s}{c} e^{-\frac{xs}{c}} = -\frac{E}{s} \frac{\sqrt{L'C'}}{L'} e^{-s\sqrt{L'C'}x} = \end{aligned}$$

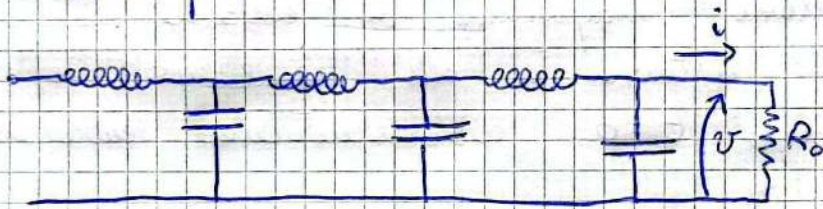
$$= \underbrace{\frac{\epsilon}{\Delta} e^{-\Delta \sqrt{L'C'} x}}_{v(x, \Delta)} \sqrt{\frac{\epsilon'}{L'}} \quad \text{Borio} \quad \frac{v(x, \Delta)}{i(x, \Delta)} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad \text{ed } \bar{e}$$

costante $\forall x$. Borio in ogni sezione del cavo coassiale, il rapporto tra tensione e corrente è costante e viene chiamato impedenza caratteristica del cavo R_0 . Vale che: 15/12/24

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \Rightarrow \text{cambiando le dimensioni } r_1 \text{ e } r_0 \text{ si può cambiare l'impedenza caratteristica del cavo.}$$

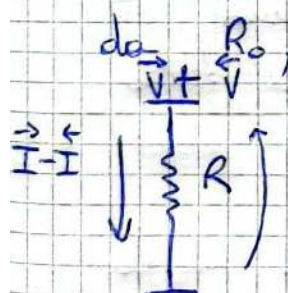
La forma d'onda si propaga attraverso il cavo senza alcuna degradazione. Idealmente la forma d'onda in uscita ha la stessa forma di quella in ingresso, solo in uscita si ha un segnale con un ritardo pari a: $\frac{L}{c}$ dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Se alla fine del cavo c'è una resistenza pari a R_0 non c'è riflessione.



Se invece alla fine del cavo si posiziona una resistenza diversa

da R_0 , si ha riflessione. se $R \neq R_0$, ai capi di R c'è tensione complessiva data dal segnale incidente e dal segnale riflesso. Mentre la corrente che scorre per R è data dalla differenza tra $\vec{I}$ e $\overleftarrow{I}$. Borio il valore di R vale



$$R = \frac{\vec{V} + \overleftarrow{V}}{\vec{I} - \overleftarrow{I}}, \quad \text{vale che } \frac{\vec{V}}{\vec{I}} = R_0, \quad \text{mentre anche } \frac{\overleftarrow{V}}{\overleftarrow{I}} = R_0. \quad \text{Definiamo il coefficiente:}$$

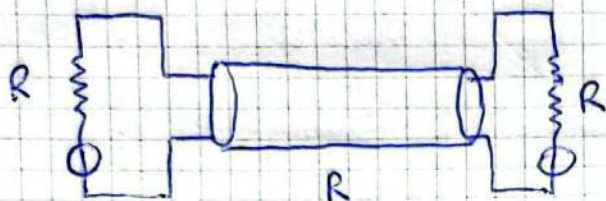
$\Gamma = \frac{\overleftarrow{V}}{\vec{V}}$ coefficiente di riflessione. Si può anche definire

come: $\Gamma = \frac{\overleftarrow{I}}{\vec{I}}$ e $\frac{\overleftarrow{V}}{\vec{V}} = \frac{\overleftarrow{I}}{\vec{I}} = R_0$

Però: $R = \frac{\vec{V} + \vec{V}}{\vec{I} - \vec{I}} = \frac{\vec{V}}{\vec{I}} \frac{1+p}{1-p} = R_0 \frac{1+p}{1-p} \Rightarrow$

$R - R p = R_0 + R_0 p$ da cui $p = \frac{R - R_0}{R + R_0}$

Torniamo al sistema:



Il sistema è in equilibrio
termico a temperatura T .

A causa del segnale di tensione
derivato dal rumore di R , c'è
segnale spedito attraverso il cavo.

Otto un tempo $\frac{L}{c}$, questo segnale raggiunge la resistenza
di destra. R è pari all'impedenza caratteristica del
cavo, e quindi non c'è segnale riflesso.

Lo stesso avviene per il rumore di tensione del resi-
store di destra. Anche questo segnale quando raggiun-
ge il resistore di sinistra non viene riflesso.

Ci sono due flussi indipendenti di energia.

Supponiamo che il sistema è all'equilibrio, e
nell'istante di tempo $t=0$ cortocircuitiamo entrambi
i terminali del cavo:



In questo modo stiamo
intrappolando l'energia dentro
il cavo coassiale.

In questo caso le condizioni al contorno sono:

$v(0, t) = v(L, t) = 0$

Prima d'onda. Il modo più facile è separare
le variabili. Però:

Abbiamo capito qual sia la
forma d'onda. Il modo più facile è separare
le variabili. Però:

$v(x, t) = X(x) T(t)$

l'equazione: $\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$

diventa: $X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = c^2 T(t) \frac{d^2 X}{dx^2}$

Dividiamo entrambi

i membri per XT e si ottiene:

$\frac{1}{T} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = c^2 \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2}$

Dato che il primo membro

dipende solo da t e il secondo membro dipende solo da x , e dato che t e x sono indipendenti, necessariamente i due membri sono uguali a una costante negativa $-\gamma^2$. Perciò:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = C^2 \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\gamma^2 \Rightarrow \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\gamma^2 T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\gamma^2 \Rightarrow \lambda = \pm i\gamma \Rightarrow T(t) = A \sin(\gamma t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{\gamma^2}{C^2} X(x) \Rightarrow \lambda = \pm i \frac{\gamma}{C} \Rightarrow X(x) = B \sin\left(\frac{\gamma}{C} x\right) + C \cos\left(\frac{\gamma}{C} x\right)$$

dove B e C sono costanti che dipendono dalle condizioni al contorno.

Perciò l'espressione di $v(x, t)$ è:

$$v(x, t) = \left[B \sin\left(\frac{\gamma}{C} x\right) + C \cos\left(\frac{\gamma}{C} x\right) \right] \sin(\gamma t + \varphi)$$

$$v(0, t) = C \cdot 1 \cdot \sin(\gamma t + \varphi), \text{ deve valere che } v(0, t) = 0 \text{ quindi } C = 0.$$

$$v(L, t) = B \sin\left(\frac{\gamma}{C} L\right), \quad v(L, t) = 0 \text{ se } B = 0 \text{ (ma avremmo una soluzione senza senso) oppure se } \frac{\gamma}{C} L = n\pi. \text{ Perciò la soluzione generale è:}$$

$$v(x, t) = B \sin\left(\frac{\gamma}{C} x\right) \sin(\gamma t + \varphi). \quad \omega = \gamma, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

con T periodo nel dominio del tempo.

$$\text{Mentre } K = \frac{\gamma}{C}, \text{ con } K = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ con } \lambda \text{ lunghezza d'onda.}$$

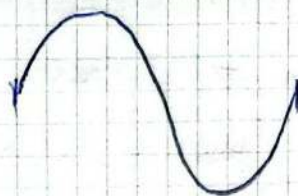
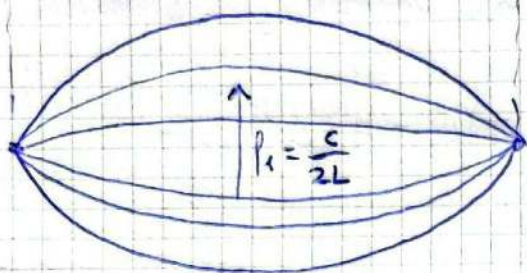
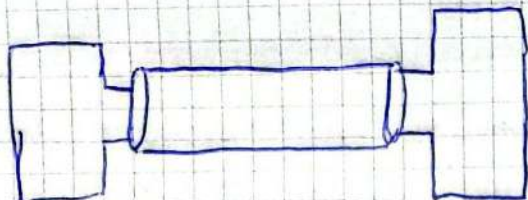
$$\text{Deve valere l'equazione: } \frac{\omega}{C} L = n\pi \text{ da cui}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} C. \quad \omega = Kc \text{ che può essere riscritto}$$

$$\text{come: } 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} c \Rightarrow c = \lambda f. \text{ Dato che}$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} c, \text{ per } n = 1 \quad \omega_1 = \frac{\pi c}{L} \text{ e } f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{c}{2L}$$

$$\text{e } \lambda_1 = \frac{c}{f_1} = 2L. \text{ Quello che succede per } n = 1:$$



$n=2$

per $n=2$: $\omega_2 = \frac{2\pi c}{L}$, $f_2 = \frac{c}{L}$ e

$\lambda_2 = L$.

per $n=3$: $\omega_3 = \frac{3\pi c}{L}$, $f_3 = \frac{3}{2} \frac{c}{L}$,

$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$



$n=3$

le frequenze possibili sono discrete: $\frac{c}{2L}$, $\frac{c}{L}$, $\frac{3}{2} \frac{c}{L}$...

la distanza tra due frequenze possibili è $\frac{c}{2L}$

Quanta energia dovuta al rumore si ha in un determinato intervallo di frequenze di ampiezza Δf ?

Il numero di oscillazioni possibili dentro l'intervallo Δf è: $\frac{\Delta f}{c/2L} = \Delta N$.

L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica dipende sia dal campo elettrico che dal campo magnetico.

$\Rightarrow$ l'onda elettromagnetica ha 2 gradi di libertà.

L'energia trasportata dentro il cavo vale:

$E = kT \Delta N = \frac{\Delta f}{c/2L} kT$. Questa energia è dovuta al

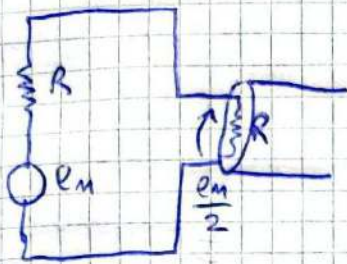
rumore dentro il cavo generato dai due resistori agli estremi. Un solo resistore aveva metà dell'energia totale.

$\frac{E}{2} = \frac{\Delta f}{c/2L} \frac{kT}{2}$

Se il tempo di transito dell'energia

è $\frac{L}{c}$, la potenza media causata da ciascun resistore è:

$$P = \frac{E}{2 \frac{L}{c}} = \frac{\Delta f}{C/2L} \frac{KT}{2 \frac{L}{c}} = KT \Delta f$$



la tensione ai capi dei terminali del cavo è $\frac{e_n}{2}$. ha potenza dovuta a questa tensione ai capi della resistenza caratteristica R è: $\left(\frac{e_n}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{e_n^2}{8R}$

e_n^2 è correlato all' S_v perché S_v è l'integrale sulle frequenze di e_n . Dev'essere vale che:

$\Delta e_n^2 = S_v(f) \Delta f$. Il valore quadratico medio di

$$e_n \text{ è } \frac{e_n^2}{2} \Rightarrow \frac{e_n^2}{2} = S_v(f) \Delta f \quad \text{Quindi:}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e_n}{2}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{S_v(f) \Delta f}{hR} \quad \text{Deve valere che:}$$

$$KT \Delta f = \frac{S_v(f) \Delta f}{hR} \Rightarrow S_v(f) = hKT R$$

16/12/24

17/12/24

Lezione 30

Definiamo in modo più approfondito la densità spettrale di potenza

$S(w)$: power spectral density. Vale che:

$S(w) = \mathcal{F} \left(K_{xx}(\tau) \right)$ la densità spettrale di potenza è la trasformata di Fourier dell'auto correlazione.

Consideriamo segnali deterministici $x(t)$:

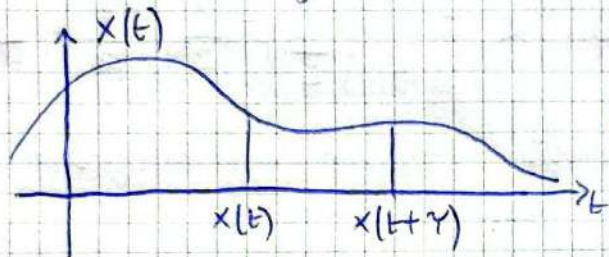
L'energia di un segnale deterministico $x(t)$ è proporzionale a $\int x^2(t) dt$, in particolare vale che:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad \text{per certe funzioni questo valore è finito, per altre è infinito.}$$

Proviamo anche definire la potenza del segnale $x(t)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \Rightarrow \text{la potenza \u00e9 legata al valore quadratico medio del segnale.}$$

Dato un segnale $x(t)$



si definisce autocorrelazione:

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t+\gamma) dt$$

Tale che: $K_{xx}(0) = P = \langle x^2(t) \rangle$

Calcoliamo ora la trasformata di Fourier di $K_{xx}(\gamma)$:

la definizione di $K_{xx}(\gamma)$ pu\u00f2 anche essere scritta come:

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) dt \quad \text{dove } x_T(t)$$

\u00e9 il segnale troncato tra $-T/2$ e $+T/2$

$$\mathcal{F}(K_{xx}(\gamma)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) e^{-j\omega\gamma} d\gamma dt$$

in forma pi\u00f9 compatta: $\mathcal{F}(K_{xx}(\gamma)) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{xx}(\gamma) e^{-j\omega\gamma} d\gamma$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) e^{-j\omega\gamma} d\gamma dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} x_T(t+\gamma) e^{-j\omega(t+\gamma)} d\gamma dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t+\gamma) e^{-j\omega(t+\gamma)} d\gamma dt =$$

possiamo chiamare $d = t + \gamma$ perci\u00f2 si ha:

$$\mathcal{S}(K_{xx}(\tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(\alpha) e^{-i\omega \alpha} d\alpha =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T^*(\omega) X_T(\omega) \quad \text{dove } X_T(\omega) \text{ è la trasformata}$$

di Fourier di $x_T(t)$, mentre $X_T^*(\omega)$ è il complesso coniugato della trasformata di Fourier di $x_T(t)$.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} X_T^*(\omega) X_T(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \quad \text{Quindi vale che:}$$

$$\mathcal{S}(K_{xx}(\tau)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} = S(\omega) \quad \text{vediamo perché}$$

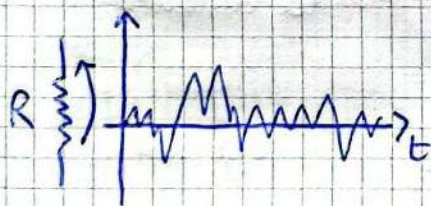
$\mathcal{S}(K_{xx}(\tau))$ corrisponde alla densità spettrale di potenza:

$$P = K_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \left[\text{visto che il segnale è reale,}$$

$$x^2(t) = |x(t)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \left[\text{per il teorema}$$

$$\text{di Parseval} \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_T(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega$$

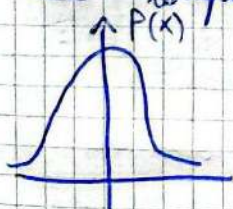
Consideriamo ora un segnale randomico: per esempio il rumore di un resistore in equilibrio termico.



Se consideriamo più resistori contemporaneamente, ogni rumore avrà la sua forma $\Rightarrow x(t)$ è una variabile randomica.

Per un processo stazionario, la fluttuazione statistica nelle differenti repliche deve essere la stessa.

vuol dire che la probabilità $p(x)dx$ è la stessa nel tempo.



la distribuzione $p(x)$ è sempre la stessa qualsiasi sia l'istante di tempo.

Un processo stazionario si dice ergodico quando quando la $p(x)$ riferita a un solo campione nel tempo, è la stessa di quella riferita a più campioni in un solo istante di tempo.

Il valore medio di una variabile randomica è:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \quad \text{questo stesso valore può essere}$$

calcolato nel tempo, come $\langle x(t) \rangle$, considerando un singolo campione. Ovvero $\bar{x} = \langle x(t) \rangle$.

$$\text{Vale anche che: } \bar{x^2} = \int x^2 p(x) dx = \langle x^2(t) \rangle$$

valore quadratico medio calcolato su più campioni
valore quadratico medio calcolato nel tempo su un singolo campione.

R_{xx} è la funzione di autocorrelazione calcolata sui di = versi campioni.

In un processo stazionario vale che: $p(x_1, x_2 | t_1, t_2) = p(x_1, x_2 | \tau)$ la probabilità non dipende da dove sono posizionati t_1 e t_2 in modo assoluto, ma da dove sono posizionati uno rispetto all'altro $\Rightarrow$ la distanza τ tra essi.

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2 | \tau) dx_1 dx_2 \quad \text{Per un}$$

processo ergodico vale che $R_{xx}(\tau) = K_{xx}(\tau)$, dove

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) x(t+\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) X_T(t+\tau) dt$$

Definisco $\overline{X_T(t)}$ il valore medio sui vari N campioni del segnale randomico $X_T(t)$.

è $\overline{X_T(\omega)}$ è la densità spettrale sugli N campioni.

$$\overline{X_T(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{X_T(t)} e^{-j\omega t} dt$$

Bisogna definire la densità spettrale di potenza del segnale randomico come:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\overline{X_T(\omega)}|^2}{T} \quad \text{e} \quad S(\omega) = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau))$$

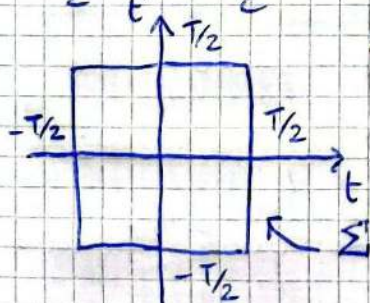
se il processo è ergodico: $S(\omega) = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) = \mathcal{F}(K_{xx}(\tau))$

Il fatto che $S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\overline{X_T(\omega)}|^2}{T}$ è anche

$\mathcal{F}(R_{xx}(\tau))$ è quello che viene detto nell'enunciato del teorema di Wiener - Khinchin. Dimostriamo ora questo teorema:

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt, \quad |X_T(\omega)|^2 = \overbrace{X_T^*(\omega) X_T(\omega)}^{\mathcal{H}} = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t') e^{-j\omega t'} dt'}_{\mathcal{H}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t) e^{-j\omega t} dt}_{\mathcal{H}} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(t') X_T(t) e^{-j\omega(t-t')} dt dt' \end{aligned}$$

t' è compreso tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$, anche t è compreso tra $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$. Il dominio di integrazione è Σ :



Possiamo chiamare $\gamma = t - t'$ e

$\eta = t' \Rightarrow t = \eta + \gamma$ Chiamo

Δ questa superficie definita in η e γ , perciò:

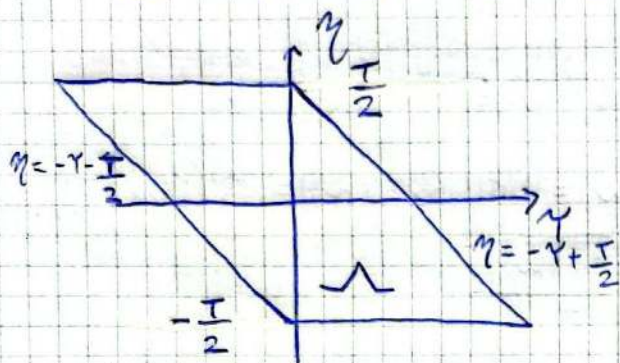
$$\int_{\Sigma} X_T(t') X_T(t) e^{-j\omega(t-t')} dt dt' = \int_{\Delta} X_T(\eta) X_T(\eta + \gamma) e^{-j\omega\gamma} d\eta d\gamma$$

debiamo dimostrare che $dt dt' = d\eta d\gamma$.

Ora il dominio di integrazione Λ è:

η è compresa tra $-\frac{I}{2}$ e $+\frac{I}{2}$, mentre $\eta = -\gamma + t$,

con t che va da $-\frac{I}{2}$ a $+\frac{I}{2}$. Osservo:



Un generico punto $A \in \Sigma$ subisce una trasformazione e diventa punto $P(\eta(t, t'), \gamma(t, t')) \in \Lambda$ dove η e γ dipendono da t e t' .

Supponiamo di muoverci lungo t e t' dal punto A , in questo modo si genera un rettangolo: A vediamo qual è la forma dell'elemento corrispondente nel dominio Λ .

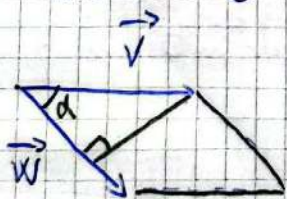
Se ci muoviamo lungo la linea nel dominio Λ dove t' è costante, vuol dire che γ e η variano in funzione di t ; chiamo $\vec{V}$ il vettore dato dal movimento lungo t :

$$\vec{V} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt \hat{i} + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt \hat{j}$$

Chiamo invece $\vec{W}$ il vettore del movimento lungo t' nel dominio Λ :

$$\vec{W} = \frac{\partial \gamma}{\partial t'} dt' \hat{i} + \frac{\partial \eta}{\partial t'} dt' \hat{j}$$

l'area dell'elemento in Σ da quella in Λ , perciò tra $dt dt'$ e $d\gamma d\eta$ c'è un fattore di proporzionalità.



Devo calcolare l'area di questo trapezio con lati $\vec{V}$ e $\vec{W}$.
l'area vale: $|\vec{W}| \cdot |\vec{V}| \sin \alpha$, questa

quantità corrisponde a: $|\vec{V} \wedge \vec{W}|$
prodotto vettoriale tra $\vec{V}$ e $\vec{W}$

Osservo:

$$d\gamma d\eta = |\vec{V} \wedge \vec{W}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t} dt & \frac{\partial \eta}{\partial t} dt & 0 \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t'} dt' & \frac{\partial \eta}{\partial t'} dt' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t'} & \frac{\partial \eta}{\partial t'} \end{vmatrix} dt dt'$$

$$= \frac{\partial(\gamma, \eta)}{\partial(t, t')} dt dt'$$

Nel nostro caso $\eta = t'$ e $\gamma = t - t'$, perciò:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial t'} & \frac{\partial \eta}{\partial t'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{da cui } dt dt' = d\gamma d\eta$$

abbiamo dimostrato che:

$$|X_T(\omega)|^2 = \iint_{\Sigma} X_T(t') X_T(t) e^{-j\omega(t-t')} dt dt' = \iint_{\Lambda} X_T(\eta) X_T(\eta+\gamma) e^{-j\omega\gamma} d\gamma d\eta$$

possiamo riscrivere l'equazione con i valori medi:

$$|\overline{X_T(\omega)}|^2 = \iint_{\Sigma} \overline{X_T(t')} \overline{X_T(t)} e^{-j\omega(t-t')} dt dt' = \iint_{\Lambda} \overline{X_T(\eta)} \overline{X_T(\eta+\gamma)} e^{-j\omega\gamma} d\gamma d\eta$$

Λ vedo che si può mettere tutto sotto valore medio poiché $X_T(\eta)$ e $X_T(\eta+\gamma)$ sono incoerenti

sulla superficie Λ , γ va da $-T$ a T , mentre η va da $-T/2$ a $T/2$. Perciò:

$$\iint_{\Lambda} \overline{X_T(\eta)} \overline{X_T(\eta+\gamma)} e^{-j\omega\gamma} d\gamma d\eta = \int_{-T}^T d\gamma \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\eta \overline{X_T(\eta)} \overline{X_T(\eta+\gamma)} e^{-j\omega\gamma}$$

Per definizione: $S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\overline{X_T(\omega)}|^2$, perciò:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T d\gamma \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\eta \overline{X_T(\eta)} \overline{X_T(\eta+\gamma)} e^{-j\omega\gamma}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\eta \int_{-T}^T \overline{X_T(\eta)} \overline{X_T(\eta+\gamma)} e^{-j\omega\gamma} d\gamma = \left[\text{dato che il sistema} \right]$$

$\bar{x}$ è stazionario e data la definizione di $R_{xx}(\tau)$ =

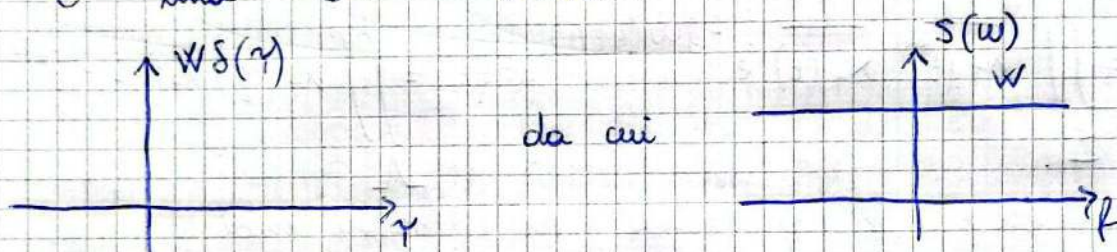
$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \int_{-\tau}^{\tau} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \left[\text{dato che } \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau = \frac{1}{T} \cdot T = 1 \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) \quad \text{però in definitiva}$$

$$S(\omega) = \mathcal{F}(R_{xx}(\tau)) = \mathcal{F}(K_{xx}(\tau)) \quad \text{C.V.D.}$$

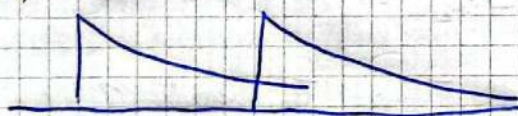
Il caso semplice è il rumore bianco: questo è costituito da picchi non correlati tra loro.

Quindi la funzione di autocorrelazione del rumore bianco è una δ . Perciò:



studiamo ora lo shot noise:

$x(t)$:



$x(t)$ è costituito da una serie di impulsi. Ogni impulso ha espressione:

$$q \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \text{la coda di}$$

ciascun impulso ha forma esponenziale decrescente con costante di tempo T . Chiamo λ il numero di impulsi per unità di tempo ed è costante. Abbiamo calcolato $K_{xx}(\tau)$ di questa funzione.

19/12/24

17/12/24

lezione 31

Per un segnale di potenza vale che:

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\tau) dt$$

Per un segnale di energia:

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) dt$$

Per un segnale deterministico, si può dimostrare che:

$$\mathcal{F}[K_{xx}(\gamma)] = S(\omega)$$

allo stesso modo, per un segnale di energia, si può dimostrare che:

$$\mathcal{F}(K_{xx}(\gamma)) = E(\omega)$$

Per un segnale randomico in un processo stocastico:

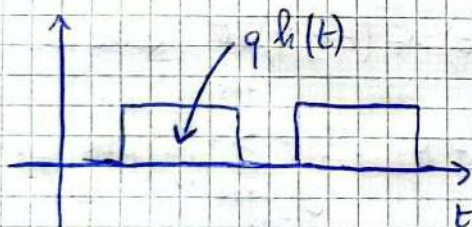
$$R_{xx}(\gamma) = \overline{x(t)x(t+\gamma)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t+\gamma) p(x(t), x(t+\gamma) | \gamma) dt$$

Per un processo ergodico:

$$R_{xx}(\gamma) = K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_T(t) \tilde{x}_T(t+\gamma) dt$$

Torniamo sullo shot noise:

Abbiamo descritto lo shot process come la sovrapposizione del rumore di una corrente composta da impulsi elementari.



tutti gli impulsi hanno la stessa forma d'onda. Questi avvengono casualmente, ma è ben definito il valore λ , ovvero il numero di

impulsi per unità di tempo. La densità spettrale di potenza vale:

$$S_I(f) = 2\lambda q^2 |H(\omega)|^2$$

ora da dimostrare

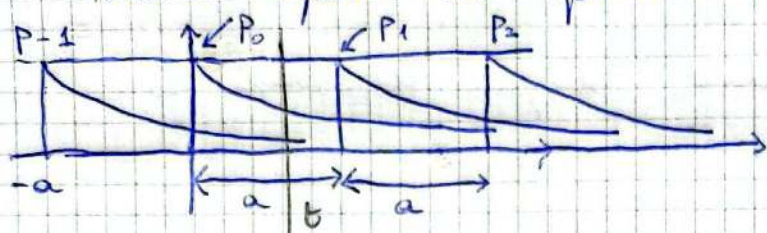
$$S_I(\omega) = \underbrace{\mathcal{F}(R_{xx}(\gamma))}_{\text{perché processo ergodico}} = \mathcal{F}(K_{xx}(\gamma))$$

Abbiamo calcolato così K_{xx} e R_{xx}

$K_{xx}(\gamma)$, dove la forma d'onda è costituita dalla sovrapposizione di tanti impulsi, randomicamente distribuiti nel tempo. Per definizione:

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) dt$$

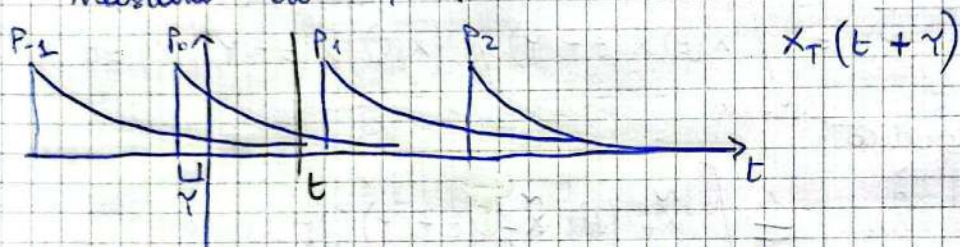
Facciamo delle piccole variazioni per capire meglio
 invece di usare impulsi rettangolari, è conveniente
 usare impulsi con forma di esponenziale decrescente:



In questo caso gli impulsi
 non sono distribuiti random-
 micamente, ma a distanza
 costante.

Supponiamo che $-\frac{T}{2}$ sia in corrispondenza di P_{-2} e che
 $T/2$ sia in corrispondenza di P_2 .

Abbiamo comparato $x_T(t)$ con la stessa funzione, ma
 traslata di γ .



Abbiamo calcolato il prodotto tra $x_T(t)$ e $x_T(t+\gamma)$ nell'i-
 stante t . Risultato:

$$\sum_i p_i(t) p_i(t+\gamma) + \sum_{i \neq k} p_i(t) p_k(t+\gamma)$$

Dato che $K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) x_T(t+\gamma) dt$, allora

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i p_i(t) p_i(t+\gamma) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i \neq k} p_i(t) p_k(t+\gamma) dt \right]$$

Il numero di termini nella sommatoria $\sum_i$ è pari
 a T/a , dove $a = \frac{1}{\lambda}$, quindi

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i p_i(t) p_i(t+\gamma) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda T}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t+\gamma) dt$$

Studiamo ora il secondo termine $\sum_{i \neq k}$, quanti prodotti
 ci sono?

Partiamo dal caso $j = -2$:

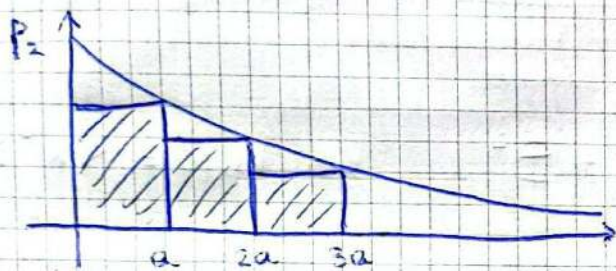
$$p_{-2}(t) p_{-1}(t+\gamma) + p_{-2}(t) p_0(t+\gamma) + p_{-2}(t) p_1(t+\gamma)$$

$$= P_{-2}(t) [P_{-1}(t+\gamma) + P_0(t+\gamma) + P_{+1}(t+\gamma) + P_2(t+\gamma)]$$

il termine $P_{-1}(t+\gamma) = P_{-2}(t+\gamma-a)$, mentre il
termine $P_0(t+\gamma) = P_{-2}(t+\gamma-2a)$ e così via

l'espressione:

$[P_{-2}(t+\gamma-a) + P_{-2}(t+\gamma-2a) + P_{-2}(t+\gamma-3a)] \cdot a$ corrisponde
graficamente a:



Area dei rettangoli
evidenziati.

Se a diventa molto piccolo,
l'espressione si avvicina
alla quantità:

$$\int P_{-2}(t) dt$$

Però vale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i \neq k} P_i(t) P_k(t+\gamma) dt = \sum_i P_i(t) \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y) dy, \quad \text{il numero}$$

di impulsi $\rightarrow$ T/a , perciò:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int \sum_{i \neq k} P_i(t) P_k(t+\gamma) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} P_i(t) dt \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} P(y) dy =$$

$$= \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} P(y) dy \quad \text{in definitiva:}$$

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) P(t+\gamma) dt + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} P(y) dy \right]$$



porta carica q

Espressione degli impulsi:

$$q h(t) = q \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad \lambda \text{ è il numero}$$

di impulsi al secondo, ogni impulso
porta la corrente media vale:

$$\bar{I} = \lambda q \quad \text{Riconsideriamo il termine: } \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy =$$

$$= \lambda^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy \right)^2 = \left(\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(y) dy \right)^2 = \left(\lambda q \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{-t/T} dt}_{=1} \right)^2 = (\lambda q)^2 =$$

$$= \bar{I}^2 \quad \text{Quindi:}$$

$$K_{xx}(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t+\gamma) dt}_{\text{funzione di autocorrelazione del singolo impulso}} + \bar{I}^2 \right]$$

$$K_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt + \bar{I}^2, \quad \text{ma } K_{xx}(0) = \langle x^2 \rangle$$

Tale che $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt = \overline{x^2} = (x - \bar{x})^2$, perciò il termine

$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t) dt$ è legato alla varianza del rumore,

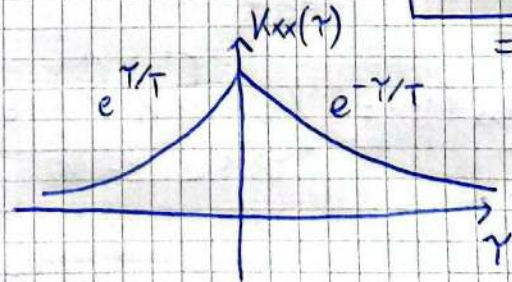
perciò è legato anche alla densità spettrale di potenza del rumore.

$$S(\omega) = \mathcal{F}(K_{xx}(\gamma)) = \mathcal{F} \left[\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t+\gamma) dt \right]$$

$$\text{se } p(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \text{ allora } \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) p(t+\gamma) dt =$$

$$= \left[\text{per } \gamma > 0 \right] = \frac{q^2}{T^2} \int_0^{+\infty} e^{-t/T} e^{-(t+\gamma)/T} dt = \frac{T}{2} \frac{q^2}{T^2} e^{-\gamma/T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t/T} dt}_{=1} \frac{2}{T} =$$

$$= \frac{q^2}{2T} e^{-\gamma/T} \quad \text{graficamente:}$$



$$S(\omega) = \frac{q^2}{2T} \mathcal{F}(e^{-|\gamma|/T})$$

$$\mathcal{F}(e^{-\gamma/T}) = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma/T} e^{-j\omega\gamma} d\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{1}{T} + j\omega)\gamma} d\gamma = \frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega}$$

(γ > 0)

$$\mathcal{F}(e^{\tau/T}) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau/T} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{(\frac{1}{T} - j\omega)\tau} d\tau =$$

($\tau < 0$)

$$= \frac{1}{\frac{1}{T} - j\omega}, \quad \text{perci\u00f2:}$$

$$S(\omega) = \frac{\lambda q^2}{2T} \mathcal{F}(e^{-|\tau|/T}) = \frac{\lambda q^2}{2T} \left[\frac{1}{\frac{1}{T} + j\omega} + \frac{1}{\frac{1}{T} - j\omega} \right] =$$

$$= \frac{\lambda q^2}{2T} \left[\frac{2/T}{\frac{1}{T^2} + \omega^2} \right] = \frac{\lambda q^2}{2T} \frac{2}{T} \frac{T^2}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{\lambda q^2}{1 + \omega^2 T^2}$$

Spettro unilaterale: $S^u(\omega) = 2\lambda q^2 \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$

$|H(\omega)|^2$