Dispositivi elettronici – AA2018/19

Homework 01

Valerio Nappi –
https://5n44p.github.io/triennale-elettronica-polimi/

Consegna

E1 – La Figura 1 rappresenta schematicamente il moto casuale degli elettroni in un metallo a temperatura ambiente. Ogni particella subisce in media λ=10^{14} urti/sec.

Si supponga che all'istante t=0, N=1000 elettroni emergano da una collisione e incominciano un nuovo tratto di "volo" libero. Tuttavia, progressivamente essi urtano, interrompendo nuovamente il loro moto.

Determinare:

a. la funzione N·f(t) che descrive come diminuisce nel tempo il numero di elettroni "fortunati" che per t>0 non hanno ancora subito un urto dopo quello a t=0.

b. In particolare, stimare quanti elettroni non hanno subito urto al tempo t_1=2fs e t_2=5fs.

c. Stimare il tempo medio che intercorre tra due collisioni.

1 Analisi del problema

Il problema descrive un fenomeno stocastico in cui è nota la frequenza media di un evento e la probabilità iniziale $P\;t$ al tempo t=0, $P\;0\; = 0$, avendo gli elettroni appena effettuato una collisione.

Avendo a disposizione un grande numero N di elettroni al tempo t=0, essendo la probabilità di un urto identica per tutti, ed essendo gli eventi di collisione indipendenti tra loro, è possibile correlare il numero di elettroni "sopravvissuti" dopo un determinato tempo t^*, alla probabilità che un singolo elettrone non abbia urtato fino al tempo t^*.

Per ogni tempo t sarà possibile individuare la probabilità che l'urto sia avvenuto, per un determinato elettrone. Per ogni tempo t, ogni elettrone subirà, in media, $10^{14} * t$ urti.

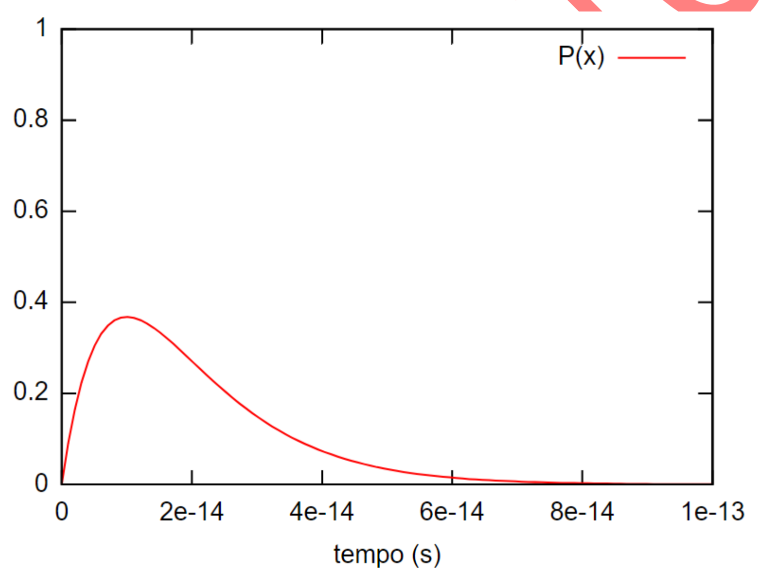
È necessario modellare la distribuzione statistica degli urti degli elettroni nel metallo. Essendo assegnato il numero medio di eventi per un dato tempo, essendo ciascun urto statisticamente indipendente dal precedente e dal successivo, ed essendo un gran numero di fenomeni delle particelle distribuito secondo una distribuzione di Poisson, sembra ragionevole ipotizzare che il fenomeno in studio possa presentarsi secondo questa distribuzione.

Utilizzando una distribuzione di Poisson si avrà che, per ogni tempo t, la probabilità che si sia verificato almeno un urto è:

$$P\ \ t\ \ = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad con\ n = 1\ e\ \lambda = 10^{14} t$$

Ottenendo:

$$P\ \ t\ \ = \frac{(10^{14}\ t)^1}{1!} e^{-10^{14}\ t} = \ 10^{14}\ t\ e^{-10^{14}\ t}$$



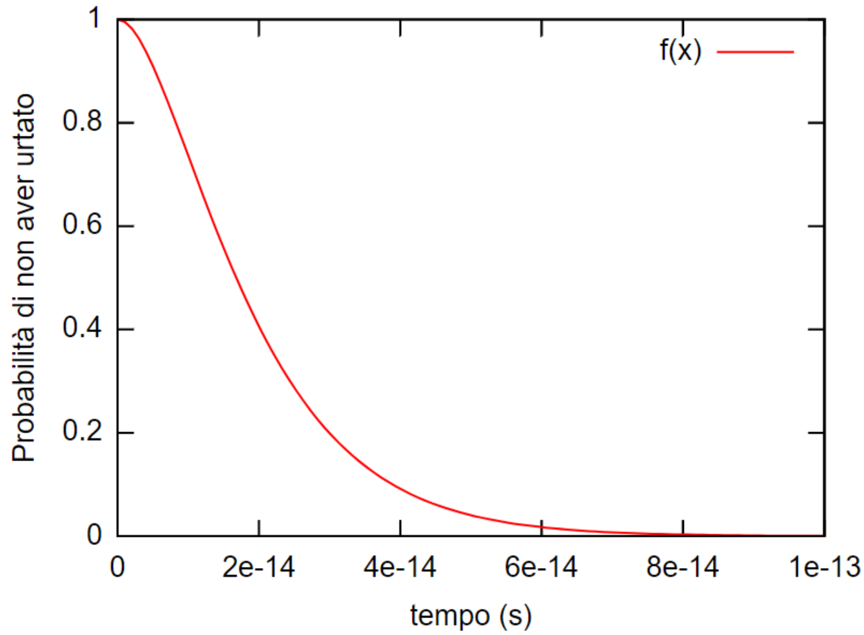
1.1 Funzione elettroni rimasti: $F_{e.r.}(t)$

Avendo un grande numero N di elettroni, ed essendo essi indipendenti, si può approssimare il numero di elettroni che non hanno ancora urtato con la probabilità che ciascun elettrone non abbia ancora urtato, moltiplicata per il numero di elettroni iniziali.

La probabilità che un elettrone non abbia ancora urtato al tempo t, sarà data dalla funzione di ripartizione della distribuzione di Poisson:

$$f\ \ t\ \ = \frac{\Gamma(n+1, \lambda)}{n!} = \int_{10^{14} t}^{\infty} e^{-\tau}\ \tau\ d\tau = \ \ 10^{14}\ t + 1\ \ e^{-10^{14}\ t}$$

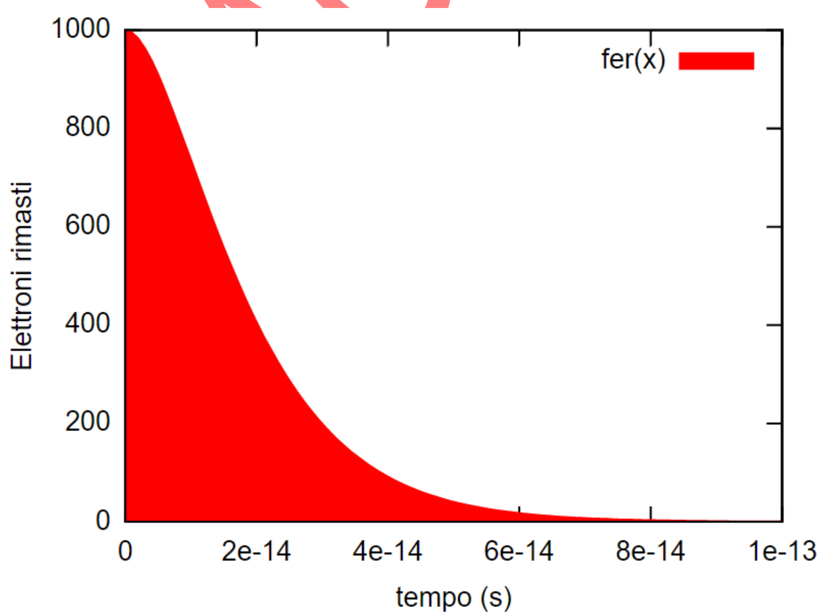
Che avrà andamento nel tempo:



La funzione elettroni rimasti sarà quindi:

$$\boldsymbol{F}_{e.r.}(\boldsymbol{t}) = N f(t) = 10^3 (10^{14} t + 1) e^{-10^{14} t}$$

Che avrà andamento:



1.2 Elettroni rimasti per t_1=2fs e t_2=5fs

È ora possibile determinare il numero di elettroni ancora presenti, mediamente, per t_1=2fs e t_2=5fs, tramite la funzione $\boldsymbol{F}_{e.r.}\ \boldsymbol{t}$.

Si avrà infatti:

$$\boldsymbol{F}_{e.r.}\ 2fs\ = 982.48\ \approx 982\ elettroni$$

$$\boldsymbol{F}_{e.r.}\ 5fs\ = 909.80\ \approx 910\ elettroni$$

1.3 Tempo medio tra due collisioni

Si conosce la frequenza media di urto di un singolo elettrone: $freq_{urti} = 10^{14}\ {}^{urti}/_{s}$. Si può quindi determinare il tempo medio tra due collisioni per un singolo elettrone:

$$T_{singolo} = \frac{1}{freq_{urti}} = 10\ fs$$

Se si volesse calcolare il tempo che intercorre, mediamente, tra due urti di due qualsiasi elettroni del gruppo in esame, si avrebbe in media:

$$T_{complessivo} = \frac{T_{singolo}}{1000} = 10\ as$$